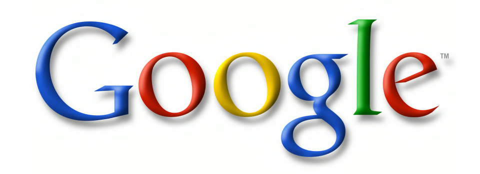
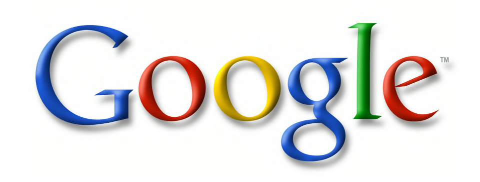
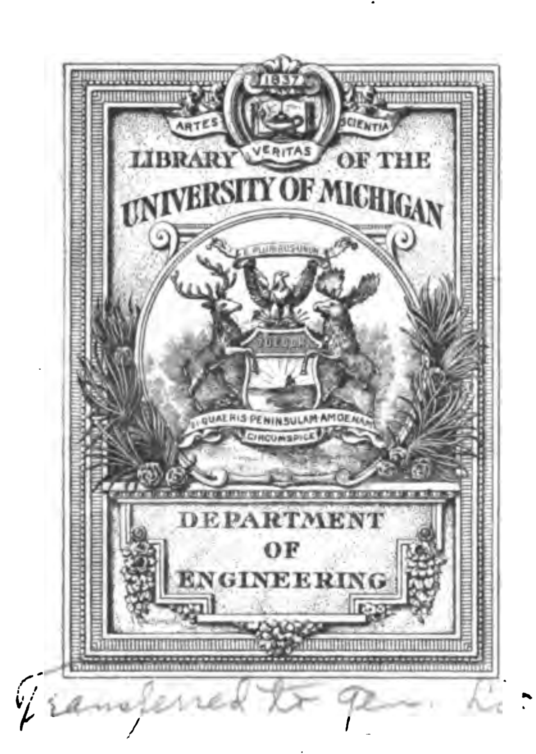





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Cie, RUE RACINE, 26, PRÈS DE L'ODÉON

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PREMIÈRE PARTIE.

DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

DEUXIÈME ÉDITION.

PAR M. THÉODORE OLIVIER,

Ancien élève de l'École polytechnique et ancien Officier d'artillerie; Docteur ès sciences de la Faculté de Paris;
Ancien professeur adjoint de l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz;
Ancien répétiteur à l'École polytechnique; Professeur de géométrie descriptive au Conservatoire des arts et métiers;
Professeur-fondateur de l'École centrale des arts et manufactures;
Membre honoraire de la Société philomathique de Paris et du comité des arts mécaniques de la Société d'encouragement pour l'industrie national
Membre étranger des deux Académies royales des sciences et des sciences militaires de Stockholm;
Membre correspondant de la Société royale des sciences de Liége et de la Société d'agriculture et arts utiles de Lyon,
des Académies des sciences de Metz, Dijon et Lyon;
Officier de la Légion d'honneur et Chevalier de l'Ordre royal de l'Étoile polaire de Suède.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET Vor DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n° 49.

1852

OUVRAGES SUR LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PUBLIÉS

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

I. COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PREMIÈRE PARTIE. — Du point, de la droite et du plan : in-4° de 136 pages avec un atlas de 43 pl. in-4°, 2e édition (1852).

DEUXIÈME PARTIE. — Des courbes et des surfaces, et en particulier des courbes et des surfaces du second ordre : in-4° de 400 pages avec un atlas de 52 pl. in-4°, 1re édition (1844).

II. ADDITIONS AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1847) : Démonstration nouvelle des propriétés principales des sections coniques : in-4° de 100 pages avec un atlas de 15 pl. in-4°.

III. DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1843) : in-4° de 500 pages avec un atlas de 27 pl. in-4°.

IV. COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1845) : in-4° de 472 pages avec un atlas de 58 pl. in-folio.

V. APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1846) : 1° aux ombres ; 2° à la perspective ; 3° à la gnomonique ; 4° aux engrenages : in-4° de 415 pages avec un atlas de 58 pl. in-folio.

VI. THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES ENGRENAGES (1842) destinés à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes situés ou non situés dans un même plan : in-4° de 125 pages avec 4 pl. dont une in-folio.

VII. MÉMOIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE (1851) : in-4° de 310 pages avec un atlas de 12 pl. in-folio.

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION (1843).

J'ai divisé ce cours de géométrie descriptive en deux parties : dans la première, je donne tout ce qui est relatif au point, à la droite et au plan; dans la seconde, je m'occupe des courbes et des surfaces, en général, et en particulier, des sections coniques et des surfaces du second ordre.

Je n'ai point voulu écrire un traité de géométrie descriptive, car alors j'aurais été obligé de donner un résumé de tout ce qui a été fait, et de classer avec ordre toutes les recherches dues aux divers savants (*) qui se sont occupés de la science, si vaste et si utile par ses nombreuses applications, à laquelle Monge a donné le nom de *géométrie descriptive*. En écrivant un cours, j'ai pu me borner à exposer mes idées et mes recherches sur cette science, tout en donnant ce qui est indispensable à ceux qui l'étudient dans le but de devenir *ingénieurs*.

Monge a souvent répété que, lorsqu'on savait les divers problèmes relatifs au point, à la droite et au plan, et dont l'ensemble forme ce que l'on appelle encore et assez improprement les *préliminaires de la géométrie descriptive*, on savait la géométrie descriptive. On n'a pas fait assez attention à cette manière de voir de *Monge*, au sujet de la géométrie nouvelle dont le premier il a formé un corps de doctrine, et à laquelle il a donné un nom, le nom de *géométrie descriptive*, qui a été souvent critiqué, faute de comprendre tout ce qu'il signifiait dans la pensée du savant fondateur de l'École polytechnique.

Il n'existe, à vrai dire, qu'une géométrie, et qui a pour but de reconnaître les propriétés de l'espace figuré. Ces propriétés sont de deux espèces, savoir : les propriétés de *relation* de *position*, et les propriétés de *relation métrique;* mais l'on peut employer des méthodes diverses pour arriver à la découverte des unes et des autres. Chaque méthode particulière a reçu, par extension, le nom de *géométrie*. Ainsi on disait la géométrie de Descartes, et l'on a dit la géométrie de Monge : Descartes employait *l'analyse* à la recherche des vérités géométriques, Monge a employé la *méthode des projections* à la recherche des propriétés dont jouissent les *formes géométriques*. Et comme les *surfaces* qui limitent et terminent les corps sont composées de *lignes*, et que les *lignes* sont formées de *points*, et qu'une

(*) Je me propose d'écrire un nouvel ouvrage qui aura pour titre: *De l'Enseignement de la Géométrie descriptive;* c'est alors que j'exposerai les travaux des divers savants qui, après *Monge*, ont écrit sur cette science; et alors je tâcherai de faire connaître, aussi complétement qu'il me sera possible, les *progrès* que chacun d'eux a fait faire à la *Géométrie descriptive*.

foule de corps sont terminés par des *faces planes*, et que d'ailleurs le plan joue un grand rôle lorsque l'on examine les surfaces, soit que l'on considère un plan comme *tangent* ou *sécant* par rapport à la surface particulière dont on discute les propriétés, soit qu'on le considère comme *tangent* ou *normal* ou *osculateur* en certain point de certaine courbe tracée sur la surface particulière, il est bien évident dès lors que, lorsqu'on saura représenter un point, une droite et un plan par la méthode des projections, et résoudre, par la méthode des projections, les divers problèmes que l'on peut proposer sur le point, la droite et le plan, on saura la *géométrie descriptive;* en ce sens que l'on saura tout ce qu'il faut pour appliquer la méthode des projections à la recherche des vérités géométriques qu'il lui est permis de démontrer touchant l'espace figuré; car, il faut bien le reconnaître, chaque méthode est plus spécialement applicable à un genre particulier de questions. C'est ainsi que *l'analyse* s'applique à la recherche des propriétés *de relation métrique*, et que la *géométrie descriptive* s'applique à la recherche des propriétés de *relation de position*.

La géométrie descriptive doit être considérée comme un *art* et comme une *science*. Pendant longtemps et depuis très-longtemps, *l'art des projections* était connu des *stéréomètres*, et ainsi des *appareilleurs* pour la coupe des pierres et des *charpentiers;* mais c'est vraiment depuis *Monge* que la géométrie descriptive a été reconnue être une *science*, et c'est aux travaux de Monge qu'on le doit; car c'est lui qui le premier a démontré que, dans ce que l'on appelait *l'art des projections*, résidait réellement une *méthode scientifique* qui permettait de rechercher et de démontrer certaines *vérités géométriques*, et ainsi toutes celles relatives à *la forme* de l'espace figuré. Et, à ce sujet, nous devons rappeler que Monge a souvent dit : « Si je refaisais mon ouvrage qui a pour titre *de l'analyse appliquée à la géométrie* (ouvrage dans lequel il s'est servi de *l'analyse infinitésimale* pour rechercher et démontrer un si grand nombre de propriétés inconnues jusqu'à lui et dont jouissent les courbes et les surfaces), je l'écrirais en deux colonnes : dans la première, je donnerais les démonstrations par *l'analyse;* dans la seconde, je donnerais les démonstrations par la *géométrie descriptive*, en d'autres termes, par la méthode des projections; et l'on serait peut-être, ajoutait-il, bien étonné, en lisant cet ouvrage, de voir que l'avantage serait presque toujours du côté de la seconde colonne, pour la clarté du raisonnement, la simplicité de la démonstration, et la facilité de l'application des *théorèmes* trouvés aux divers *travaux* des *ingénieurs*. »

Or il faut savoir que Monge avait d'abord recherché et démontré par la géométrie descriptive presque tout ce qu'il a donné dans *son analyse appliquée à la géométrie*. Mais comme il lui était défendu de faire connaître ses méthodes géométriques, attendu qu'il était attaché comme professeur à l'école du génie de *Mé-*

zières, il fut obligé de traduire en *analyse* les résultats auxquels il était parvenu directement par la méthode des projections. Et, chose digne de remarque, c'est peut-être à cette nécessité de ne pas présenter ses recherches sous leur première forme, que nous devons les démonstrations si admirables données par *Monge* au moyen *du calcul aux différences partielles*, et qui ont fait faire un si grand pas à l'application de *l'analyse* à la *géométrie*.

Tout le monde sait que ce ne fut qu'après la révolution de 89, après la destruction de l'École du génie de Mézières, et lors de la création de la première École normale, qui précéda la création de l'École centrale des travaux publics, qui plus tard prit le nom d'Ecole polytechnique, que *Monge* publia son Traité de *géométrie descriptive*, dans lequel se trouvaient révélées toutes les méthodes graphiques dont l'école de *Mézières* faisait un secret; et cependant un ouvrage moins complet, il est vrai, avait déjà paru sur ce sujet important. Cet ouvrage avait été publié, sous le titre de *Complément de géométrie*, par *Lacroix* (que les sciences viennent de perdre), alors qu'il était professeur aux écoles d'artillerie.

Il n'est pas sans intérêt pour l'histoire des sciences de rappeler comment *le Complément de géométrie* a été écrit par Lacroix, et ce qui lui a donné naissance. Un officier du génie vint en congé à Besançon, où était une école d'artillerie; *Lacroix* y était professeur. Cet officier laissa dans sa chambre la collection de ses *épures*, ce que l'on appelait, en termes d'école, *la gache*, et s'absenta pour quelques mois. Les officiens d'artillerie, qui avaient sur le cœur quelques plaisanteries, fort innocentes sans doute, sur leur ignorance des travaux de Mézières, résolurent de s'emparer du *trésor* de l'officier du génie. Le complot fut exécuté, les *épures* enlevées furent calquées, et puis les *originaux* remis en place. Mais grand fut l'étonnement, lorsque le travail fini, on voulut se mettre à déchiffrer les *hiéroglyphes* de l'école de *Mézières* : personne n'y comprenait rien. Alors on va trouver *Lacroix*, et on lui remet tous les *calques*. *Lacroix* parvint à déchiffrer tout ce qui est relatif au *point*, *à la droite* et *au plan*, et il rédigea sur ce sujet un petit traité qu'il fit publier sous le titre de *Complément de géométrie*. Ce fut son premier ouvrage, qui plus tard devait être suivi d'un si grand nombre de traités remarquables et utiles. *Populariser* la science, et ainsi la faire descendre des hautes régions pour la rendre accessible au plus grand nombre, fut une des pensées dominantes de *Lacroix*, et l'on voit que son premier début fut, non pas seulement de *populariser* une science, mais d'arracher à des mains avares une science éminemment utile à tous ceux qui s'occupent des travaux d'*ingénieurs*. *Lacroix* avait bien réfléchi avant de donner à son petit traité le titre de *complément de géométrie;* il ne l'adopta qu'après avoir bien reconnu qu'en effet, la nouvelle méthode poussait réellement plus en avant la géométrie qui nous avait été léguée par les *anciens*, et qu'elle permettait de

s'occuper avec certitude des problèmes à trois dimensions. *Monge* donna à son traité le titre de *géométrie descriptive*, parce qu'il connaissait toutes les ressources et tous les procédés de la géométrie nouvelle qu'il venait enfin d'enseigner *publiquement.* Il savait que, lorsqu'on considère un système dans l'espace, on parvient, en procédant par voie de *synthèse* et au moyen du *raisonnement géométrique*, à reconnaître les *diverses propriétés géométriques* dont jouit le système proposé; et que l'on décrit au fur et à mesure chacune de ses propriétés, en passant successivement des unes aux autres, les premières servant à reconnaître et à établir la vérité, l'exactitude des suivantes. Mais il savait aussi que l'*esprit* se fatigue par une attention trop longtemps soutenue, et qu'il est nécessaire *d'écrire* au fur et à mesure les découvertes faites, en un mot : ce que l'*esprit* voit et reconnaît être vrai, pour ne pas le surcharger et lui permettre d'ailleurs, lorsqu'il vient à s'égarer, de revenir avec certitude sur ses pas, pour reprendre sa route d'une manière plus assurée. *Monge* comprit dès lors que la géométrie nouvelle sert en même temps, et à *décrire* ce que *l'esprit* voit, et à *écrire*, et ainsi à fixer d'une manière invariable, ce que *l'esprit* a vu. C'est pour cela qu'il a donné à cette géométrie nouvelle le nom de *géométrie descriptive. Lacroix* et *Monge* ont toujours considéré l'un et l'autre la *géométrie descriptive* comme une *science* dont la méthode fondamentale, celle *des projections*, était un nouveau moyen d'accroître nos connaissances géométriques, et de plus il l'ont regardée comme un *procédé graphique*, apte à écrire les *propriétés géométriques* d'un système à trois dimensions.

C'est en me conformant à cette manière d'envisager la *géométrie descriptive*, que j'ai écrit ce *Cours* que je soumets au jugement des *géomètres* et des *ingénieurs* (*).

(*) Lorsque je songeai à rédiger mon Cours de géométrie descriptive, je priai M. de Paul, mon répétiteur à l'École centrale des arts et manufactures, d'assister à mes leçons, de les rédiger et de les lithographier pour l'usage de nos élèves. M. de Paul rédigea avec soin et avec zèle la première partie (du point, de la droite et du plan) et quelques fragments de la seconde partie (des courbes et des surfaces); ce sont ces lithographies faites, sous ma direction, d'après mes leçons et quelques notes que je rédigeai à la hâte, qui m'ont servi de *bases* pour la rédaction définitive.

J'ai peu changé à la rédaction de la première partie, j'y ai fait cependant quelques additions et quelques corrections: c'est d'après les dessins de M. de Paul que les quarante-deux planches de la première partie ont été gravées.

J'ai écrit en son entier la seconde partie, en y faisant entrer les fragments rédigés, sous ma direction, par M. de Paul.

PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION (1852).

Je n'ai rien changé à la distribution des matières dans cette seconde édition de mon Cours de géométrie descriptive.

En écrivant ce traité, en 1843, je n'avais point songé à écrire un ouvrage en vue de tel ou tel programme officiel; j'ai voulu exposer mes idées, les croyant bonnes et utiles, j'ai écrit un traité *ex professo.*

J'avais toujours pensé, et cette opinion a été chez moi confirmée par trente-cinq années d'expérience dans l'enseignement, que les principes fondamentaux de la géométrie descriptive résidaient dans tous les problèmes que l'on pouvait être appelé à résoudre au sujet du point, de la droite et du plan, et que, lorsque l'on sait très-bien tout ce qui est relatif au point, à la droite et au plan, l'on aborde très-facilement les courbes et les surfaces. Qu'ainsi il fallait, dans la 1re partie du cours, montrer toutes les méthodes usitées en géométrie descriptive, pour n'avoir plus à en faire que des applications dans la 2e partie, lorsque l'on s'occupait des courbes et des surfaces.

On sait le calcul différentiel lorsque l'on sait différentier toutes les fonctions connues; on a ensuite les applications du calcul différentiel à telles ou telles questions. De même l'élève sait la géométrie descriptive, lorsque tout ce qui dans cette science est relatif au point, à la droite et au plan lui est connu; le reste n'est plus que l'application des méthodes de la géométrie descriptive à la solution de telles ou telles questions.

D'après ces vues, j'ai dû, dans la 1re partie, exposer les principes de tous les systèmes de projection; j'ai dû faire connaître certains procédés particuliers à la géométrie descriptive pour la solution des problèmes proposés, tels que changement des plans de projection; mouvement de rotation d'un point, d'une droite, d'un plan autour d'un axe; transformation d'une figure ou d'un relief, en une autre figure ou un autre relief, etc. Dans cette seconde édition j'ai ajouté ce qui

est relatif à la projection isométrique dont les Anglais et les Allemands font maintenant un usage constant dans le dessin des machines.

Lorsque cet ouvrage a paru, en 1843, il a été très-critiqué par les professeurs dont il venait gêner les habitudes, cependant peu à peu on est venu à reconnaître que je pourrais bien avoir raison. Le temps est un grand maître, il efface peu à peu toutes les oppositions à ce qui est bon et utile.

C'est ainsi que l'on commence à comprendre, que, lorsque l'on veut parler aux élèves des propriétés d'une surface, la première chose à faire est de mettre sous leurs yeux le relief de cette surface, pour qu'ils voient distinctement ce dont on veut leur parler.

Il y a plusieurs années que l'usage des modèles était encore proscrit et pour ainsi dire officiellement et de par l'autorité scientifique, dans l'enseignement de la géométrie ordinaire et de la géométrie descriptive : on enseignait en se servant seulement de la craie, du tableau noir et de l'éponge. Montrer un relief à un élève était chose défendue, on aurait semblé douter de sa haute intelligence. Aussi, ce principe admis, on en était venu à enseigner la physique en ne faisant aucune expérience ; la craie, le tableau noir et l'éponge étaient les seules choses nécessaires à un professeur, quelle que fût la science qu'il enseignât, physique, astronomie, géodésie, géométrie descriptive, mécanique, etc.

Heureusement que le bon sens a enfin fait justice de cette étrange utopie.

Donner au professeur de géométrie descriptive le moyen de faire autant de figures qu'il voudra et avec un seul instrument, est donc une chose utile.

Utile dans l'intérêt de l'enseignement, utile sous le point de vue économique.

Ce sont ces vues d'utilité et d'économie qui me portèrent, en 1829, à construire un instrument auquel je donnai le nom d'*omnibus* et qui fût apte à montrer le relief de tous les problèmes relatifs au point, à la droite et au plan, en un mot apte à montrer le relief de tout système géométrique composé de lignes droites.

Cet instrument est ainsi composé :

On prend une boîte à deux fonds, semblable à celle connue sous le nom de trictrac portatif. On remplit chacun des deux fonds par une plaque de liége ; on a ainsi deux plans tournant autour d'une charnière.

L'un des fonds étant horizontal, on peut placer le second en une position verticale et l'y maintenir au moyen d'un crochet.

On a alors les deux plans de projection en leur véritable position.

On a ensuite quatre jeux de fiches dont la section est pour chacune un carré de 3 à 5 millimètres environ; les fiches du premier jeu sont rouges, celles du deuxième sont noires, celles du troisième sont divisées en tronçons alternativement rouges et blancs, et celles du quatrième sont divisées en tronçons alternativement noirs et blancs.

Chaque fiche porte à son extrémité une aiguille qui permet de la fixer solidement, en telle ou telle position, dans la plaque de liége.

Dans chaque jeu, la longueur des fiches varie depuis 1 décimètre jusqu'à 3 ou 4 ou 6 ou 7 ou 8 décimètres.

On a ainsi un certain nombre de fiches de même longueur et de longueurs variées.

Au moyen des fiches rouges on construit dans l'espace un système rapporté de position aux deux plans de projection.

Au moyen des fiches rouges et blanches on projette les divers points du système de l'espace sur chacun des deux plans de projection; au moyen des fiches noires et blanches, on projette sur la ligne de terre (intersection des deux plans de projection) les projections des points de l'espace; et enfin au moyen des lignes noires on a les projections des lignes rouges de l'espace et ainsi les projections des *données* et des *résultats*. Il est inutile de dire que c'est au moyen des fiches que l'on exécute sur les deux plans rectangulaires entre eux les opérations graphiques nécessaires à la solution du problème.

Cela fait on enlève toutes les fiches, rouges et blanches, qui sont dans l'espace.

Tout le système solide a disparu, il ne reste plus que les deux projections horizontale et verticale du système. On rabat le plan vertical sur le plan horizontal et l'on a *l'épure*, au moyen de laquelle on doit et l'on peut reconstruire le système solide.

On peut donc varier à volonté les données d'un même problème et, sur le relief même, discuter le choix et la méthode à employer (en vertu des données particulières que l'élève à sous les yeux) pour la meilleure solution graphique du problème proposé.

Avec cet instrument on peut faire voir : les surfaces développables et leur arête de rebroussement, les cônes, les cylindres, les paraboloïdes, les hyperboloïdes, les conoïdes, enfin toute surface réglée.

Les professeurs peuvent faire exécuter cet instrument dans la ville où ils professent, à peu de frais, par un bon ouvrier menuisier de l'endroit.

Je me suis très-bien trouvé de l'emploi de cet omnibus dans l'enseignement de la géométrie descriptive, soit à l'école centrale des arts et manufactures depuis 1829, soit au conservatoire des arts et métiers depuis 1841.

Je saisis avec plaisir cette occasion de remercier le général d'artillerie, M. Morin, mon ancien camarade, d'avoir propagé l'usage de cet instrument dans les écoles d'arts et métiers et dans les écoles régimentaires de l'artillerie.

Paris, 25 mai 1852.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LE POINT, LA DROITE ET LE PLAN.

Droites et plans perpendiculaires entre eux.

Intersection des droites et des plans.

Angles des droites et des plans.

Des plus courtes distances.

CHAPITRE IV.

DES ANGLES TRIÈDRES ET DES PYRAMIDES.

CHAPITRE V.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE PROJECTIONS.

Des projections coniques et de la perspective.

De la projection isométrique.

CHAPITRE VI.

DE LA TRANSFORMATION CYLINDRIQUE ET CONIQUE.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Ce,
26, RUE RACINE, PRÈS DE L'ODÉON.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PREMIÈRE PARTIE.

DU POINT, DE LA DROITE ET DU PLAN.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

---

1. La géométrie ordinaire montre parfaitement la disposition relative des parties d'une figure entièrement située sur un seul plan, mais elle n'est plus suffisante pour représenter les constructions que l'on doit exécuter dans l'espace, pour la solution des problèmes à trois dimensions, comme on peut s'en assurer par des exemples fort simples; ainsi par exemple :

On sait que la distance d'un point à un plan est mesurée par la perpendiculaire abaissée de ce point sur le plan; mais comment fixer la direction de cette perpendiculaire? Comment déterminer le point où elle rencontre le plan? La géométrie ordinaire n'enseigne pas à résoudre ces questions; les méthodes graphiques dont elle fait usage sont à cet égard complétement impuissantes. On est obligé d'employer des méthodes particulières, dont l'étude dépend de la *géométrie descrip-*

tive; mais pourtant la géométrie descriptive est mal définie (ou plutôt incomplétement définie) lorsqu'on dit *qu'elle a pour but d'apprendre à représenter sur une feuille de dessin, qui n'a que deux dimensions, des corps qui ont trois dimensions.* Ce n'est là qu'une faible partie de cette science; la géométrie descriptive enseigne en outre des méthodes de recherche qui peuvent s'appliquer avantageusement à tous les problèmes de *relation de position;* car, *en général,* l'analyse seule peut donner la solution des problèmes de *relation métrique.* Enfin, en faisant marcher ensemble ces deux branches des mathématiques, il n'est pas de problème que l'on ne puisse parvenir à résoudre.

Monge a dit de la géométrie descriptive que c'est *la langue de l'ingénieur*, il faut donc apprendre à la lire et à l'écrire.

Tous les travaux des ingénieurs se réduisent à la résolution des deux problèmes suivants :

1° *Faire un lever,* c'est-à-dire : représenter sur une feuille de dessin l'image d'un corps ou d'un système de corps existant, de manière à pouvoir le reproduire identiquement partout où l'on voudra;

2° *Faire un projet*, c'est-à-dire : ayant conçu un corps ou un système de corps, en faire un dessin, à l'aide duquel on puisse l'exécuter exactement.

2. Lorsqu'on imprime un mouvement quelconque à un plan ou à une surface, en général elle n'éprouve aucune altération dans aucune de ses parties. Les dispositions relatives des points et des lignes entre eux demeurent les mêmes à une époque quelconque du mouvement. Les angles que les lignes forment entre elles ne changent pas de grandeur, et les longueurs des lignes non indéfinies se conservent les mêmes. Si l'on fait tourner un plan autour de son intersection avec un autre plan, jusqu'à ce qu'il se confonde avec celui-ci, on dit qu'on *rabat* le premier plan sur le second. Cette opération est fréquemment répétée en géométrie descriptive dans le but de ramener sur la feuille de dessin des constructions qui n'y sont pas contenues, ou, en d'autres termes, qu'il faudrait exécuter dans l'espace. Nous y parviendrons aussi par d'autres considérations également fécondes (*).

Représentation d'un point.

3. Un corps, une surface, une ligne, sont connus, quand on peut, au moyen

(*) Ayant mené un plan sécant à travers un corps, le rabattre, soit sur le plan horizontal, soit sur le plan vertical de projection, c'est faire en *géométrie descriptive* identiquement ce que l'on fait en *analyse* lorsqu'on emploie les formules d'Euler pour trouver l'équation d'une courbe de section dans le plan même *de section*, en rapportant cette courbe à deux axes, rectangulaires entre eux, tracés dans son plan.

des données, trouver tous les points qui composent le corps, la surface et la ligne. Il faut donc avant tout savoir fixer la position d'un point dans l'espace.

Pour cela on peut employer plusieurs méthodes dont nous parlerons par la suite, mais dont la plus simple consiste à considérer deux plans (qui se coupent à angle droit) HH′ et VV′ (*fig.* 1). On suppose que l'un d'eux, HH′, est *horizontal*, l'autre, VV′, est alors *vertical*, leur intersection LT prend le nom de *ligne de terre*. Ces deux plans, qu'il faut concevoir indéfiniment prolongés dans tous les sens, se coupent mutuellement en deux parties ou régions.

La partie LTH du plan horizontal, située en avant du plan vertical, se nomme *partie antérieure;* la partie LTH′, située derrière le plan vertical, se nomme *partie postérieure.*

La partie LTV du plan vertical, située au-dessus du plan horizontal, se nomme *partie supérieure;* la partie LTV′, située au-dessous du plan horizontal, se nomme *partie inférieure.*

De plus ces deux plans forment quatre angles dièdres, que l'on désigne par les noms des parties qui les comprennent, ainsi :

HLTV	se nomme	angle antérieur-supérieur	et s'écrit ainsi :	$\widehat{A,S}$
H′LTV	—	angle postérieur-supérieur	—	$\widehat{P,S}$
H′LTV′	—	angle postérieur-inférieur	—	$\widehat{P,I}$
HLTV′	—	angle antérieur-inférieur	—	$\widehat{A,I}$

4. Cela posé, si d'un point *m* de l'espace on abaisse une perpendiculaire *mn* sur le plan horizontal HH′, le pied *n* de cette ligne est dit *la projection horizontale du point m*, et la perpendiculaire *mn* est *la ligne projetant horizontalement le point m;* de même si l'on abaisse *mp* perpendiculaire sur le plan vertical VV′, le pied *p* de cette droite est *la projection verticale du point m*, et la perpendiculaire *pm* est *la ligne projetant verticalement le point m.*

5. Si l'on conduit un plan par les droites *mn* et *mp*, la figure *mnop* située dans ce plan est évidemment un rectangle; de plus ce plan est perpendiculaire aux deux plans HH′ et VV′, et par suite à leur intersection LT; donc :

1° la distance *mn* du point *m* au plan vertical est égale à la distance *po* de sa projection verticale à la ligne de terre;

2° La distance *mp* du point *m* au plan vertical est égale à la distance *no* de sa projection horizontale à la ligne de terre;

3° Si des deux projections d'un même point on abaisse des perpendiculaires sur la ligne de terre, elles la coupent au même point.

6. *Les deux projections n et p d'un point m en fixent la position dans l'espace.* En

effet le point doit se trouver sur une perpendiculaire au plan HH′ élevée par la projection horizontale *n* et à une distance égale à *op*, donc en prenant *nm*=*op*, le point *m* est le point cherché; on obtient aussi le même point *m* de l'espace en prenant *pm*=*on*, sur une perpendiculaire élevée du point *p* au plan vertical VV′; enfin on sait que les perpendiculaires aux plans HH′ et VV′, élevées respectivement par les points *n* et *p*, sont dans un même plan, elles se coupent donc au point *m*, dont les points *n* et *p* sont les projections.

7. Un point est encore déterminé par la condition d'être situé à la fois sur deux droites ou sur une droite et un plan, c'est même toujours ainsi qu'il est donné; car assigner les deux projections d'un point c'est dire que le point est sur deux droites perpendiculaires aux plans de projection, et passant par les projections données de ce point.

8. Dans ce qui précède nous avons considéré deux plans perpendiculaires entre eux; pour ramener toutes les constructions à n'être exécutées que sur la feuille de dessin et ainsi sur un seul plan et non dans l'espace, on suppose que le plan vertical VV′ tourne autour de la droite LT, comme charnière, pour se *rabattre* sur le plan horizontal HH′ et de telle manière que la partie supérieure LTV de ce plan vertical se couche sur la partie postérieure LTH′ du plan horizontal, et que la partie inférieure LTV′ se recouche sous la partie antérieure LTH.

Dans ce mouvement la projection verticale *p* du point *m* de l'espace, est entraînée, ainsi que la ligne *op* laquelle vient se placer, après le rabattement, en *oq* sur le prolongement de la droite *no*, de telle sorte qu'après le rabattement du plan vertical les deux projections *n* et *q* d'un même point *m* de l'espace sont situées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. On doit conclure de ce qui précède que, sur le dessin tracé sur une feuille de papier, dessin que l'on appelle épure : *deux points choisis arbitrairement, l'un sur le plan vertical et l'autre sur le plan horizontal des projections ne peuvent représenter les projections d'un même point de l'espace, qu'autant qu'ils sont situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

9. A l'avenir, nous désignerons un point de l'espace par une lettre minuscule, et ses projections par la même lettre avec un indice supérieur *h* ou *v*. Ainsi le point *m* de l'espace est celui dont les projections horizontale et verticale sont respectivement m^h et m^v (*fig.* 2). Un point étant déterminé, en géométrie descriptive, par ses deux projections, quand on dit, qu'un point est donné, il faut entendre que l'on donne les projections horizontale et verticale de ce point; et quand on demande de trouver un point de l'espace, il faut entendre qu'on demande de trouver les deux projections de ce point.

Quand une figure est énoncée ou décrite dans l'espace, il faut pouvoir l'écrire immédiatement sur la feuille de dessin, ou, en d'autres termes, sur un seul plan; et

réciproquement, quand une figure est écrite sur la feuille de dessin, il faut savoir la lire immédiatement dans l'espace. Pour cela il faut, au moyen des projections d'un point, concevoir de suite la position qu'il occupe dans l'espace; et, réciproquement, connaissant la position d'un point dans l'espace, il faut savoir en déduire de suite les positions de ses deux projections.

10. *Alphabet du point.* — Un point peut occuper dans l'espace plusieurs positions qui seront indiquées par celles de ses projections à l'égard de la ligne de terre, comme elles le sont dans la géométrie analytique par les signes et les grandeurs des coordonnées.

1° Lorsqu'un point est situé dans l'un des quatre angles dièdres formés par les plans de projection, il est facile de voir que les projections de ce point se trouvent sur les parties des plans qui comprennent cet angle; les quatre positions que le point peut affecter dans ce cas sont indiquées par la *fig.* 3.

2° Le point peut être sur l'un des plans de projection; il est alors à lui-même sa projection sur ce plan, et son autre projection est évidemment sur la ligne de terre. On a encore quatre cas représentés dans la *fig.* 4, où l'on a écrit la lettre m, qui désigne le point, sans indice pour exprimer que c'est le point lui-même et non une de ses projections.

3° Si le point est sur la ligne de terre, il n'a pas d'autres projections que lui-même, c'est pourquoi on écrit seulement la lettre m à côté du point (*fig.* 5).

4° Un point, situé dans l'un des quatre angles dièdres, peut être également distant des deux plans de projection, c'est-à-dire que l'on peut avoir $om^v = om^h$ (*fig.* 2) (N° 5); dans ce cas les deux projections se confondent lorsqu'elles sont du même côté de la ligne de terre; on a donc encore les deux cas représentés dans la *fig.* 6. On conclut de là que :

1° *Tous les points dont les projections sont distinctes et également éloignées de la ligne de terre, se trouvent sur le plan bissecteur des angles dièdres* $\widehat{A,S}$ *et* $\widehat{P,I}$;

2° *Tous les points dont les projections sont confondues, se trouvent sur le plan bissecteur des angles dièdres* $\widehat{P,S}$ *et* $\widehat{A,I}$.

Représentation de la ligne droite.

11. Si par tous les points d'une droite on abaisse des perpendiculaires sur le plan horizontal, leurs pieds sont les projections horizontales des divers points de la droite, et la ligne qui les unit est la *projection horizontale de la droite.* Toutes ces perpendiculaires sont dans un même plan perpendiculaire au plan ho-

rizontal et dont l'intersection avec ce plan est la *projection* de la droite; on raisonnerait de même à l'égard de la projection d'une droite sur tout autre plan; donc *la projection d'une droite sur un plan est une ligne droite.* On obtient les deux projections d'une droite en menant par cette droite deux plans respectivement perpendiculaires aux plans de projection; on les nomme *plan projetant horizontalement la droite* et *plan projetant verticalement la droite.*

12. Nous désignerons une droite de l'espace par une lettre majuscule, et ses projections par la même lettre avec des indices supérieurs h ou v; ainsi D^h et D^v (*fig.* 7) sont les projections horizontale et verticale de la droite D. Quelquefois aussi nous indiquerons une droite par deux de ses points, et principalement une droite finie de longueur, qui doit très-souvent être désignée par les points auxquels elle se termine; ainsi, la droite passant par deux points a et b sera désignée de la manière suivante: droite (a, b).

13. *Une droite est, en général, déterminée par ses deux projections;* car en élevant par D^h un plan perpendiculaire au plan horizontal, et par D^v un plan perpendiculaire au plan vertical, la droite D doit se trouver à la fois sur ces deux plans, elle est donc leur intersection. Il résulte de là qu'une droite donnée par ses deux projections est réellement donnée par deux plans dont elle est l'intersection.

Une droite est aussi complétement déterminée par deux de ses points; car ils feront connaître deux points de chaque *projection*. Parmi les points d'une droite on considère d'une manière spéciale les deux points en lesquels elle perce les plans de projection et que l'on nomme les *traces* de la droite; ces deux points remarquables sont très-propres à fixer la direction d'une droite par rapport aux plans des projections et par suite sa direction dans l'espace.

14. Problème 1. — *Étant données les traces d'une droite, construire ses projections* (*fig.* 7). Soient a la trace horizontale et b la trace verticale d'une droite D; a^v et b^h seront sur la ligne de terre (n° 10, 2°) et sur des perpendiculaires à cette ligne abaissées des points a et b (n° 8); on aura donc deux points a et b^h de D^h et deux points a et a^v de D^v; donc ces projections D^h et D^v sont connues.

15. Problème 2. — *Trouver les traces d'une droite, dont on connaît les projections* (*fig.* 7). La trace horizontale appartenant à la fois à la droite D et au plan horizontal, sa projection verticale doit être sur D^v et sur LT, donc en a^v; le point a est à lui-même sa projection horizontale, donc il se trouve sur D^h et sur une perpendiculaire menée à la ligne de terre par a^v, c'est-à-dire à l'intersection a de ces deux droites. De même la trace verticale étant sur D et sur un plan vertical, sa projection horizontale est en b^h, et le point est lui-même en b.

De là on peut conclure que pour avoir une des traces d'une droite, *il faut prolonger la projection de nom contraire jusqu'à la ligne de terre et par le point de rencontre*

avec cette ligne de terre, élever une perpendiculaire à cette ligne de terre, et le point où cette perpendiculaire coupe l'autre projection de la droite sera la trace demandée.

16. Une droite indéfiniment prolongée peut n'être pas tout entière contenue dans un seul des angles dièdres formés par les plans de projection; alors la portion située dans l'angle dièdre $\widehat{A, S}$ est *vue*, mais tout ce qui se trouve derrière le plan vertical ou au-dessous du plan horizontal est caché par l'un de ces plans; on exprime cela sur la figure par la manière d'écrire les projections de ces portions de la droite. On est convenu d'écrire en *lignes pleines* les projections de la partie comprise dans l'angle dièdre $\widehat{A, S}$, et en *lignes ponctuées* (ou formées de points ronds) les projections des parties de droite comprises dans l'un des trois autres angles dièdres, comme nous l'indiquerons sur les figures suivantes : il est évident qu'une portion de droite *vue* a, sur l'épure, sa projection horizontale au-dessous et sa projection verticale au-dessus de la ligne de terre.

Mais cette ponctuation ne convient qu'aux *lignes principales* d'une figure c'est-à-dire, aux lignes qui représentent les données ou les quantités cherchées du problème. Quant aux autres lignes on les distingue en deux classes :

1° *Lignes auxiliaires* qui, sans être au nombre des lignes principales ci-dessus indiquées, jouent dans la figure un rôle assez important; on les écrit en *lignes mixtes*, c'est-à-dire formées de petits traits longs et séparés entre eux par un ou plusieurs points ronds;

2° *Lignes de construction*, que l'on nomme aussi quelquefois lignes de projection, qui sont censées ne pas exister, parce qu'elles n'ont dans l'épure qu'un rôle d'une très-faible importance; on les trace en *lignes pointillées*, c'est-à-dire formées de petits traits plus courts et plus fins que ceux des lignes mixtes (les lignes de projection sont celles qui unissent entre eux, sur l'épure, les points qui sont les projections d'un même point de l'espace, elles sont dès lors perpendiculaires à la ligne de terre).

Outre les parties d'une figure cachées par les plans de projection, d'autres parties peuvent l'être par les parties antérieures de la figure elle-même; mais pour ne pas multiplier sans nécessité les lignes ponctuées, ce qui en outre nuirait à l'intelligence de la figure, on suppose souvent que ces portions de la figure sont seulement représentées par les lignes tracées sur les plans de projection, lignes qui suffisent ordinairement pour les déterminer complétement.

17. *Alphabet de la droite.* Une droite peut affecter dans l'espace (et ainsi par rapport aux deux plans de projection) un grand nombre de positions, qu'on exprime, sur l'épure, par les situations respectives de ses projections par rapport à la ligne de terre, et par la ponctuation de ses *projections.*

1° La droite peut être oblique par rapport aux deux plans de projection, et la

portion comprise entre ses traces horizontale et verticale, peut être située dans l'un des quatre angles dièdres; il est évident que les traces de la droite sont situées sur les parties des plans qui forment cet angle; ainsi on aura les quatre positions indiquées (*fig.* 8), qu'il serait facile de lire par la ponctuation seule. Pour établir cette ponctuation, remarquons que dans le premier cas la partie *ab* étant dans l'angle $\widehat{A, S}$ est *vue*, les portions ab^h et a^vb des projections doivent donc être en ligne pleine; mais au delà du point *a* la droite D passe au-dessous du plan horizontal, et au delà du point *b* elle passe derrière le plan vertical : c'est pourquoi les parties de la projection horizontale situées en dehors des points *a* et b^h et les parties de la projection verticale situées en dehors des points *a* et b^v sont en lignes ponctuées. On trouverait de même la ponctuation qu'il convient d'adopter dans les trois autres cas. Supposant maintenant les droites tracées sans notation; pour conclure de la ponctuation seule où est la projection horizontale, nous dirons : la partie de la droite dont les projections sont en ligne pleine doit être dans l'angle $\widehat{A, S}$; donc dans le 4e cas, par exemple, c'est la portion à gauche du point *a*; donc pour cette partie la projection horizontale est au-dessous et la projection verticale au-dessus de la ligne de terre. Par suite le point *a* est la trace horizontale et le point *b* la trace verticale de la droite. On trouverait de même la direction de la droite dans les trois autres cas.

2° La droite peut être parallèle au plan horizontal; sa projection verticale est alors parallèle à la ligne de terre, car tous les points de la droite D sont à la même distance du plan horizontal; la projection horizontale est quelconque, et l'on a les trois positions indiquées (*fig.* 9), suivant que la droite D est au-dessus du plan horizontal, dans ce plan, ou au-dessous de lui.

3° Si la droite est parallèle au plan vertical; sa projection horizontale est parallèle à la ligne de terre, sa projection verticale est quelconque, et l'on a les trois positions indiquées (*fig.* 10), suivant que la droite D est en avant du plan vertical, dans ce plan, ou derrière lui.

4° La droite peut être parallèle à la fois aux deux plans de projection, et par conséquent à la ligne de terre; ses deux projections sont alors parallèles à LT. Ce cas présente neuf positions, savoir : *quatre*, lorsque la droite est située dans l'un des quatre angles dièdres (*fig.* 11); *quatre*, lorsqu'elle se trouve sur l'une des quatre régions des plans de projection (*fig.* 12); enfin elle peut être confondue avec la ligne de terre (*fig.* 13). Ces neuf positions sont les mêmes que les neuf positions du point (*fig.* 3, 4, 5), il suffit de remplacer les points *m*, m^h, m^v, etc., par des droites D, D^h, D^v, etc., parallèles à la ligne de terre. Si dans ce cas la droite est également distante des deux plans de projection, ses deux projections seront

distinctes ou séparées et placées à la même distance de la ligne de terre, lorsque cette droite sera située dans les angles dièdres $\widehat{A, S}$ ou $\widehat{P, I}$. Elles se confondront quand elles seront situées du même côté (*fig.* 14) de la ligne de terre; et, dans ce cas, la droite se trouvera dans les angles dièdres $\widehat{A, I}$ et $\widehat{P, S}$. Dans le premier cas la droite sera sur le plan bissecteur de l'angle $\widehat{A, S}$, et dans le deuxième cas elle sera sur le plan bissecteur de l'angle $\widehat{A, I}$.

5° Si la droite est perpendiculaire au plan horizontal, sa projection horizontale se réduit à un seul point et sa projection verticale est perpendiculaire à la ligne de terre, car le plan projetant verticalement la droite et le plan vertical de projection sont tous deux perpendiculaires au plan horizontal. La droite peut dans ce cas affecter trois positions : elle peut être située en avant du plan vertical, dans ce plan, ou derrière lui (*fig.* 15).

6° Trois positions semblables (*fig.* 16) répondent au cas d'une droite perpendiculaire au plan vertical et située au-dessus du plan horizontal, dans ce plan, ou au-dessous de lui.

Il résulte de ces deux cas que om^v (*fig.* 2) est la projection verticale de la droite projetant horizontalement le point m, laquelle a pour projection horizontale le point m^h, et om^h est la projection horizontale de la droite projetant verticalement le point m, laquelle a pour projection verticale le point m^v.

7° Si la droite D a dans l'espace une direction perpendiculaire à la ligne de terre LT, ses deux projections se confondent en une seule droite perpendiculaire à la ligne de terre; car si l'on fait passer par la droite D un plan vertical, ce plan est de plus perpendiculaire à LT; donc ses intersections avec les deux plans de projection, ou D^h et D^v, sont toutes deux perpendiculaires à LT et la coupent au même point, et par conséquent se confondent après le rabattement du plan vertical. Les deux projections de la droite ne suffisent donc plus, *dans ce cas*, pour en fixer la direction dans l'espace, mais elle sera complétement déterminée si l'on donne deux de ses points. La droite dans ce cas peut affecter quatre positions suivant que la portion comprise entre ses traces est interceptée dans l'un des quatre angles dièdres (*fig.* 17).

8° Si la droite rencontre la ligne de terre, ses traces a et b se confondent en un même point de cette ligne; dans ce cas il peut arriver que les projections D^h et D^v (*fig.* 18) fassent des angles aigus avec la même portion de LT, l'une au-dessus et l'autre au-dessous; cette disposition appartient évidemment à une droite traversant les angles $\widehat{A, S}$ et $\widehat{P, I}$. Si les angles aigus sont formés avec les deux parties de LT (*fig.* 19), cela représente évidemment une droite traversant les angles $\widehat{P, S}$ et $\widehat{A, I}$. Si les angles aigus sont égaux, la droite est sur l'un des deux plans bi-

secteurs (n° 10, 4°) et dans le dernier cas les deux projections se confondent en une seule droite (*fig.* 20).

9° Si la droite rencontrant la ligne de terre lui est perpendiculaire, les deux projections se réunissent en une seule droite perpendiculaire à LT; dès lors elles ne suffisent plus pour la déterminer; il faut alors donner un autre point quelconque de la droite (*fig.* 21).

18. On voit par tout ce qui précède qu'une droite est toujours entièrement déterminée par les projections de deux de ses points, tandis que, dans quelques cas particuliers, les projections de la droite ne sont plus suffisantes.

19. Deux droites qui ne sont pas perpendiculaires à la ligne de terre peuvent toujours représenter les projections d'une droite de l'espace. Car en élevant les deux plans projetants, ils se coupent suivant une droite déterminée. La droite est indéterminée quand les deux projections se confondent en une perpendiculaire à la ligne de terre LT. Deux droites dont une seule est perpendiculaire à la ligne de terre, ou qui lui étant toutes deux perpendiculaires ne la coupent pas au même point, ne peuvent pas être les projections d'une même droite de l'espace.

20. Deux droites D et D′ situées dans l'espace peuvent se couper, être parallèles, ou n'être pas situées dans un même plan.

1° Si elles se coupent (*fig.* 22), les projections de leur point d'intersection m appartiennent à la fois aux projections de ces deux droites D et D′, donc m^h et m^v en lesquels se coupent respectivement les projections D^h, D'^h et D^v, D'^v, doivent (*sur l'épure*) être situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (n° 8).

2° Si elles sont parallèles, leurs projections de même nom sont parallèles (*fig.* 23), car les deux plans projetants correspondants sont parallèles.

3° Si elles ne sont pas situées dans un même plan, le point d'intersection de leurs projections verticales n'est pas sur une même perpendiculaire à la ligne de terre avec le point d'intersection de leurs projections horizontales (*fig.* 24).

21. Les réciproques de ces trois propositions sont vraies, c'est-à-dire que, 1° si les projections de deux droites se coupent en deux points m^v et m^h situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (*fig.* 22), les droites se coupent dans l'espace; car le point m, ayant ses projections sur celles de la droite D, appartient à cette droite et par une même raison il appartient à la droite D′.

2° Si les projections de même nom sont parallèles (*fig.* 23) les droites sont parallèles, car les quatre plans projetants sont deux à deux parallèles et par conséquent les quatre intersections dont deux ne sont autres que les droites D et D′, sont aussi parallèles.

3° Si les projections des droites se coupent en des points non situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, les droites ne sont pas dans un même

plan (*fig.* 24), car deux droites tracées sur un plan se coupent ou sont parallèles, et leurs projections seraient disposées comme dans les *fig.* 22 ou 23. Il en résulte que si les deux projections horizontales seules ou si les deux projections verticales seules sont parallèles, les droites ne sont pas parallèles.

22. Lorsque deux droites sont perpendiculaires à LT, leurs projections sont respectivement parallèles; mais il n'en résulte pas que les droites dans l'espace le soient. Mais si D et D′ (*fig.* 25) sont parallèles, choisissant deux points *a* et *b*, *a′* et *b′* sur chaque droite, si l'on conçoit des verticales abaissées des points *b* et *b′* et des horizontales menées des points *a* et *a′* qui coupent les verticales en des points que nous désignerons par *i* et *i′*, on formera deux triangles *abi*, *a′b′i′* qui seront semblables comme ayant les côtés respectivement parallèles, on a donc :

$$ia : ib :: i'a' : i'b'$$

mais

$$ia = a^h b^h,\ ib = a^v b^v,\ i'a' = a'^h b'^h,\ i'b' = a'^v b'^v$$

donc

$$a^h b^h : a^v b^v :: a'^h b'^h : a'^v b'^v$$

23. Réciproquement, si cette relation a lieu, les droites D et D′ sont parallèles; car ayant construit comme ci-dessus les triangles *abi* et *a′b′i′* rectangles en *i* et *i′*, ils sont semblables comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; ces côtés sont en outre parallèles, donc aussi les hypoténuses *ab* et *a′b′* ou les droites D et D′ sont parallèles.

24. Problème 3. *Par un point donné mener une droite parallèle à une droite donnée* (*fig.* 26). Les projections de la droite cherchée X doivent passer respectivement par les projections du point donné *m*, et être parallèles aux projections de la droite donnée D.

Représentation des lignes courbes.

25. Si de tous les points *a*, *b*, *c*,.... *m* (*fig.* 27) d'une courbe C on abaisse des perpendiculaires sur le plan horizontal, les pieds $a^h, b^h, c^h, \ldots m^h$ de ces perpendiculaires forment une ligne C^h, qui est la *projection horizontale de la courbe* C. Toutes les perpendiculaires $aa^h, bb^h, cc^h \ldots mm^h$ sont parallèles et forment une surface que nous désignerons plus loin sous le nom de *surface cylindrique*, et qui est dite *surface ou cylindre projetant horizontalement la courbe* C. En abaissant de même des perpendiculaires sur le plan vertical, elles formeront *le cylindre projetant verticalement la courbe* C. Une courbe C peut donc être toujours considérée comme l'intersection de deux surfaces cylindriques.

Si la courbe C était tracée dans un plan perpendiculaire au plan horizontal, par exemple, toutes les droites aa^h, bb^h, etc., seraient situées dans ce plan, C^h serait l'intersection de ce plan avec le plan horizontal, et par conséquent cette projection de la courbe C serait une droite et l'autre projection serait nécessairement une courbe. Si la courbe C était dans un plan perpendiculaire à LT, ses deux projections seraient l'une et l'autre des droites.

26. Problème 4. *Trouver les points en lesquels une courbe rencontre les plans de projection* (*fig.* 28). Les points en lesquels la courbe C rencontre le plan horizontal se projettent verticalement sur C^v et sur LT (n° 20, 2°) donc à leur intersection en a^v et en b^v, les points a et b seront sur C^h et sur des perpendiculaires à LT élevées par les points a^v et b^v; mais ces perpendiculaires rencontrent généralement la courbe C^h en plusieurs points, qui peuvent indifféremment être pris pour les traces de la courbe C, à moins que par une circonstance quelconque on soit conduit à exclure quelques-uns d'entre eux, comme dans ce cas-ci, par exemple, nous excluons les points α et β qui, évidemment, ne peuvent être les traces de la courbe C. On trouverait de même les traces verticales de la courbe C.

Remarquons qu'une partie de C^h ne correspond à aucune partie de C^v et ne peut pas par conséquent être la projection d'une portion de la courbe C; de même une partie de C^v n'appartient pas à la projection de la courbe C : nous donnerons ailleurs l'explication de cette circonstance.

Les lignes courbes étant représentées de la même manière que les lignes droites, au moyen de deux projections, on doit en conclure que, si deux courbes, C et C' situées dans l'espace, se coupent en un point m, leurs projections C^h, C'^h et C^v, C'^v se couperont respectivement en des points qui seront m^h et m^v projections du point m, et dès lors tels qu'ils pourront (*sur l'épure*) être unis par une même perpendiculaire à la ligne de terre.

Représentation du plan.

27. Par deux droites parallèles, ou qui se coupent, par une droite et un point, par trois points, on peut faire passer un plan et on ne peut en faire passer qu'un; parmi les droites qui peuvent fixer la position d'un plan dans l'espace, on choisit celles en lesquelles il coupe les plans de projection et que l'on nomme les *traces du plan*. Il est évident que les deux traces d'un plan doivent rencontrer la ligne de terre au même point, qui est le point d'intersection de cette ligne et du plan.

Nous désignerons un plan dans l'espace par une lettre majuscule, et ses traces horizontale et verticale respectivement par les lettres H et V avec la lettre

qui désigne le plan, pour indice, ainsi (*fig.* 29) H^p et V^p sont les traces du plan P.

Lorsqu'un plan sera donné par deux droites nous l'indiquerons par les lettres qui désignent ces droites mises entre parenthèses : ainsi le plan (A, B) signifiera le plan déterminé par les deux droites A et B ; nous dirons de même le plan (A, *a*) pour indiquer le plan déterminé par la droite A et le point *a* ; et enfin le plan (*a*, *b*, *c*) exprimera le plan passant par les trois points *a*, *b* et *c*.

28. Problème 5. *Étant connue la projection horizontale d'une droite située sur un plan donné par ses traces, trouver sa projection verticale* (*fig.* 29). Il est évident que les traces d'une droite située sur un plan se trouvent sur les traces de ce plan, donc la trace horizontale de la droite D sera le point *a*, intersection de H^p et D^h, d'où l'on déduit un point a^v de D^v. La trace verticale de D se projette horizontalement au point b^h, intersection de D^h et de LT, et le point lui-même est en *b* sur V^p; donc on connaît D^v. Si l'on donnait D^v on en conclurait de même D^h.

29. Problème 6. *Étant connue la projection horizontale d'un point situé sur un plan donné par ses traces, trouver sa projection verticale* (*fig.* 29). Si par le point *m* et dans le plan P on conduit une droite D quelconque, D^h passera par m^h, et l'on en conclura D^v (n° 20) ; puis m^v, devant se trouver sur D^v et sur une perpendiculaire à LT et abaissée du point m^h, sera à l'intersection de ces deux droites. Si l'on donnait m^v, on en conclurait de la même manière m^h.

Il résulte de là qu'*un plan est complétement déterminé par ses traces.*

30. *Un plan est aussi complétement déterminé par deux droites quelconques, qui se coupent* (*fig.* 30). En effet soit m^h la projection horizontale d'un point appartenant au plan (A, B) (n° 27); par le point *m* et dans le plan (A, B) menons une droite quelconque X ; X^h passera par m^h, cette droite X rencontrera nécessairement les droites A et B en des points *a* et *b*, dont les projections horizontales sont les points a^h et b^h, intersection de X^h avec A^h et B^h ; on en conclut a^v et b^v qui font connaître la droite X^v sur laquelle est située la projection verticale m^v du point *m*, donc ce point est déterminé. Il est évident qu'il en serait de même si les droites A et B étaient parallèles.

31. Problème 7. *Un plan étant donné par deux droites* (*qui se coupent*), *en trouver les traces* (*fig.* 31 et 32). Les traces de chacune des droites devant se trouver sur les traces du plan, nous chercherons ces traces (n° 15) et nous aurons deux points *a* et *b* de H^p et deux points a' et b' de V^p; il faut en outre que ces traces coupent LT au même point, ce qui servira de vérification à l'exactitude des constructions.

Nous dirons à cette occasion que dans tous les problèmes à résoudre, l'élégance des méthodes consiste à se ménager le plus possible des moyens de vérification,

sans toutefois en augmenter le nombre aux dépens de la simplicité des constructions.

32. Si l'on voulait trouver les traces d'un plan donné par une droite D et un point *m*, par le point *m* on mènerait une droite D' parallèle à D, ou la coupant, et ensuite on chercherait les traces du plan (D, D').

Si le plan était donné par trois points, unissant ces points deux à deux on obtiendrait trois droites, ou bien on pourrait unir deux points par une droite à laquelle on mènerait une parallèle par le troisième point. Il sera facile de résoudre ces diverses questions.

33. *Alphabet du plan.* Un plan peut affecter plusieurs positions dans l'espace.

1° Il peut être oblique par rapport aux deux plans de projection, il y a deux cas à distinguer (*fig.* 33) suivant que les traces font des angles aigus α et β avec la même partie de LT, ou avec des parties différentes.

2° Dans les deux cas les angles α et β peuvent être égaux, et dans le dernier cas les deux traces se confondent (*fig.* 34).

3° Si le plan est perpendiculaire au plan horizontal, sa trace horizontale serait aussi perpendiculaire au plan horizontal (*fig.* 35) et par conséquent à la ligne de terre.

4° Si ce plan était perpendiculaire au plan vertical la trace horizontale serait perpendiculaire à la ligne de terre (*fig.* 36).

5° Si le plan était perpendiculaire à la ligne de terre, les deux traces se confondraient évidemment en une seule droite perpendiculaire à la ligne de terre (*fig.* 37).

6° Lorsque le plan est parallèle au plan vertical, sa trace horizontale est parallèle à LT, sa trace verticale n'existe pas ou plutôt elle est située à l'infini ; le plan peut alors affecter deux positions (*fig.* 38).

7° Un plan parallèle au plan horizontal n'a pas de trace horizontale et sa trace verticale est parallèle à LT ; il peut encore affecter deux positions (*fig.* 39).

8° Le plan peut être parallèle à la ligne de terre, ses traces sont alors toutes deux parallèles à LT, car s'il en était autrement la ligne de terre rencontrerait le plan. Suivant que les traces sont situées sur l'une ou sur l'autre des parties de chaque plan de projection, le plan P peut affecter quatre positions (*fig.* 40).

9° Le plan peut être également incliné par rapport aux deux plans de projection, ses deux traces sont alors à égale distance de la ligne de terre, et si elles sont du même côté elles se confondent (*fig.* 41).

10° Un plan passant par la ligne de terre ne peut plus être déterminé par ses traces, qui ne forment qu'une seule droite ; mais un plan étant déterminé par une droite et un point, on choisit la ligne de terre et l'on donne en outre un point quel-

conque que nous noterons par la même lettre que le plan. Ce plan peut affecter deux positions (*fig.* 42) suivant qu'il traverse l'angle $\widehat{A, S}$ et son opposé, ou les deux autres angles dièdres.

11° Enfin le plan pourrait être l'un des plans de projection, le point donné devrait alors avoir une de ses projections sur la ligne de terre.

34. De tout ce qui précède nous pouvons conclure qu'un plan est toujours déterminé par une droite et par un point, tandis que ses traces ne sont pas suffisantes dans un cas particulier, celui où il passe par la ligne de terre.

35. Parmi les droites que l'on peut tracer sur un plan, il faut principalement distinguer :

1° Les horizontales du plan; ce sont des droites situées dans le plan et parallèles au plan horizontal.

2° Les verticales du plan; ce sont des droites situées sur le plan et parallèles, au plan vertical.

3° Les lignes de plus grande pente par rapport au plan horizontal; ce sont des droites perpendiculaires à la trace horizontale de ce plan. En effet par un point m (*fig.* 43) du plan MP menons mo perpendiculaire et mq oblique sur MN, abaissons aussi mp perpendiculaire sur le plan AN et joignant po et pq; po sera perpendiculaire et pq oblique sur MN, donc $po < pq$, d'où $\frac{pm}{po} > \frac{pm}{pq}$; or, ces rapports sont ce qu'on nomme les pentes des droites mo et mq tracées sur le plan AN, donc mo est la ligne de plus grande pente du plan AN.

Remarquons que $\frac{pm}{po} = \text{tang. } \alpha$, et nous en conclurons que la pente d'une droite ou d'un plan sur un autre plan est exprimée par la tangente trigonométrique de l'angle que fait cette droite ou ce plan avec le second plan.

4° Les lignes de plus grande pente par rapport au plan vertical; ce sont des perpendiculaires à la trace verticale de ce plan (d'après la démonstration précédente).

36. Problème 8. *Tracer une horizontale et une verticale d'un plan* (*fig.* 44). Une horizontale D du plan P étant parallèle au plan horizontal, sa projection verticale D^v est parallèle à LT, sa trace verticale doit être sur V^p et sur D^v, donc en b, dont la projection horizontale est b^h; la droite D étant parallèle à H^p, sa projection horizontale D^h doit être aussi parallèle à H^p (n° 20, 2°) et passer par b^h.

Une verticale B du plan P étant parallèle au plan vertical, sa projection horizontale B^h est parallèle à LT, et sa projection verticale B^v est parallèle à V^p.

Les deux droites D et B étant sur le plan P se coupent en un point m; donc m^h et

m^v doivent être sur une même perpendiculaire à LT, ce qui sert à vérifier (*sur l'épure*) l'exactitude des constructions.

37. PROBLÈME 9. *Tracer dans un plan donné les lignes de plus grande pente.* La *fig.* 43 prouve que la projection *po* de la ligne de plus grande pente *mo* du plan MP sur le plan AN est perpendiculaire à l'intersection MN de ces plans.

Cela posé, la projection horizontale D^h (*fig.* 45) d'une ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal doit être perpendiculaire à H^p, on en déduit D^v (nº 28). De même la projection verticale K^v d'une ligne de plus grande pente par rapport au plan vertical est perpendiculaire à V^p, et l'on en déduit la projection horizontale K^h.

Les deux droites D et K situées sur le plan P se coupent en un point *m*; donc m^h et m^v doivent être sur une même perpendiculaire à LT.

38. On voit par là qu'une ligne de plus grande pente d'un plan suffit pour le déterminer complétement, puisqu'on peut par son moyen obtenir tant d'horizontales (si la ligne de plus grande pente est donnée par rapport au plan horizontal) ou de verticales (si c'est la ligne de plus grande pente par rapport au plan vertical de projection qui est donnée), que l'on veut, de ce plan; on connaît dès lors deux droites qui se coupent et sont situées dans ce plan, le plan est donc bien fixé de position dans l'espace par rapport aux deux plans de projection.

39. PROBLÈME 10. *Par un point donné mener un plan parallèle à un plan donné.*

Deux plans parallèles ont évidemment leurs traces de même nom parallèles; de plus nous savons que si deux plans P et Q sont parallèles, que par un point quelconque *m* du plan Q on mène une parallèle à une droite située dans le plan P, elle est tout entière contenue dans le plan Q.

Cela posé, dans le plan P donné (*fig.* 46) conduisons une droite quelconque D, puis par le point *m* menons la droite K parallèle à D; elle est située dans le plan cherché Q, donc sa trace horizontale *a* est un point de H^q et sa trace verticale *b* est un point de V^q; d'ailleurs ses traces doivent être respectivement parallèles à H^p et V^p, elles sont donc connues, et de plus, comme vérification, elles doivent se couper sur LT.

On peut se dispenser de mener la droite D, car par le point donné *m*, si l'on fait passer une horizontale K (*fig.* 47) du plan Q, K^h sera parallèle à H^q et par conséquent à H^p, et K^v sera parallèle à LT; puis la trace verticale *b* de cette droite sera un point de V^q qui doit être parallèle à V^p; cette trace rencontre LT en un point *q*, par lequel on mènera H^q parallèle à H^p. Au lieu d'une horizontale, on pourrait employer une verticale du plan, et l'on trouverait ainsi directement un point de H^q.

40. Si le plan P n'est pas donné par ces traces, mais par deux droites qui se

coupent, il suffira évidemment de mener par le point donné deux droites respectivement parallèles aux deux droites données, elles détermineront le plan cherché.

Si le plan P était donné par deux droites parallèles, par une droite et par un point, ou par trois points, on se ramènerait d'abord à l'un des deux cas précédents en construisant les traces du plan donné (n°s 31 et 32), ou deux droites situées dans ce plan et se coupant, et l'on déterminerait alors le plan Q comme ci-dessus (n° 39).

41. Arrêtons-nous un instant sur les figures précédentes afin de montrer les avantages de la notation adoptée dans ce cours. La *fig.* 18 est exactement reproduite dans le premier cas de la *fig.* 33, la notation seule rappelle qu'il s'agit dans la première (*fig.* 18) d'une droite rencontrant la ligne de terre et dans l'autre (*fig.* 33) d'un plan quelconque; la notation (*) par lettres accentuées sur le plan vertical ne serait pas encore suffisante puisqu'elle s'applique également aux plans et aux droites. Le premier et troisième cas des figures 11 et 40 ne diffèrent aussi que par la notation. La figure 12 est identiquement reproduite dans les figures 38 et 36. Dans la figure 14 la notation seule peut indiquer qu'il s'agit de droites dont les projections se confondent et non de droites tracées sur la partie postérieure du plan vertical (*fig.* 12), ou encore de plans parallèles au plan vertical (*fig.* 38) ou au plan horizontal (*fig.* 39). Sans la notation employée dans la figure 41, on ne reconnaîtrait pas des plans parallèles à la ligne de terre et dont les traces se confondent, mais bien plutôt des plans parallèles au plan horizontal (*fig.* 39) ou au plan vertical (*fig.* 38). Enfin la figure 42 ne présenterait que les projections d'un point, et ne pourrait pas rappeler un plan passant par la ligne de terre. Il est essentiel de remarquer que la ponctuation des lignes ne peut pas suppléer à l'insuffisance des autres notations dans les exemples que je viens de citer; ils sont donc très-propres à prouver l'utilité de la notation que j'emploie depuis vingt-trois ans dans mes leçons.

En résumé :

1° Un point de l'espace peut occuper *treize* positions par rapport aux deux plans de projection, en y comprenant les quatre positions où il est également distant de ces deux plans.

2° Une droite de l'espace peut occuper *trente-neuf* positions par rapport aux deux plans de projection en y comprenant celles où elle se trouve située dans l'un

(*) Cette *notation* qui est adoptée et conservée malgré ses inconvénients et qui consiste à représenter les projections d'un point A de l'espace par *a* sur le plan horizontal et par *a'* sur le plan vertical, ne peut se prêter que très-difficilement à écrire les solutions *graphiques* des problèmes, lorsque l'on emploie la méthode du changement de plans de projection.

des deux plans bissecteurs et celles où elle est perpendiculaire à l'un de ces deux plans bissecteurs, ainsi qu'il suit :

4 Positions où la droite coupe les plans de projection d'une manière arbitraire.
4 Positions où elle est perpendiculaire à l'un des plans bissecteurs.
6 Positions où elle est parallèle à l'un des plans de projection et oblique à l'autre.
6 Positions où elle est perpendiculaire à l'un des plans de projection.
6 Positions où elle est parallèle à la ligne de terre et à une distance arbitraire des deux plans de projection.
5 Positions où étant parallèle à la ligne de terre elle est située dans l'un des plans bissecteurs.
2 Positions où coupant la ligne de terre elle fait un angle aigu avec elle.
2 Positions où elle est située dans un plan bissecteur.
2 Positions où coupant la ligne de terre elle lui est perpendiculaire.
2 Positions où elle est située dans un plan bissecteur.

3° Un plan de l'espace peut occuper *vingt et une* positions par rapport aux deux plans de projection en y comprenant celles où il est perpendiculaire à l'un des deux plans bissecteurs et celles où il n'est autre que l'un de ces deux plans bissecteurs, ainsi qu'il suit :

2 Positions où le plan coupe les deux plans de projection et la ligne de terre.
4 Positions où il est parallèle à l'un des plans de projection.
2 Positions où il est perpendiculaire à l'un des plans de projection et oblique par rapport à l'autre plan de projection.
2 Positions où il passe par la ligne de terre.
2 Positions où il n'est autre que l'un des deux plans bissecteurs.
4 Positions où il est parallèle à la ligne de terre et oblique aux plans de projection.
4 Positions où il est parallèle à la ligne de terre et perpendiculaire à l'un des plans bissecteurs.
1 Position où il est perpendiculaire à la ligne de terre.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES FONDAMENTAUX DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

(Changement des plans de projection et rotation des figures autour d'un axe.)

12. Lorsque l'équation d'une ligne ou d'une surface est trop compliquée, on cherche, en *analyse*, à la simplifier en rapportant la courbe ou la surface à de nouveaux axes choisis de manière à faire disparaître certains termes, comme par exemple les rectangles des coordonnées et les termes du premier degré dans les équations des courbes ou des surfaces du second ordre. Dans la Géométrie descriptive, une figure tracée sur les plans de projection peut être très-compliquée; et parmi les lignes qui la composent, quelques-unes sont une conséquence nécessaire de la nature de la question, on ne peut pas s'en débarrasser; d'autres peuvent provenir de la position des plans de projection par rapport à la figure de l'espace qu'on veut représenter; ces dernières disparaîtront par un choix convenable de plans de projection; on peut aussi conserver les mêmes plans de projection et changer la position de la figure par rapport à ces plans; cette dernière opération s'effectue toujours en faisant tourner la figure autour d'un axe. Nous aurons donc à résoudre les deux problèmes suivants :

1° Connaissant les projections d'une figure de l'espace sur deux plans rectangulaires entre eux, trouver la projection de cette figure sur un troisième plan perpendiculaire à l'un des deux premiers ;

2° Connaissant les projections d'une figure de l'espace sur deux plans rectangulaires entre eux, trouver les projections de cette figure sur les mêmes plans après l'avoir fait tourner autour d'un axe fixe d'une quantité angulaire donnée. Chacun de ces problèmes se subdivise en plusieurs cas dont l'étude détaillée sera l'objet de ce chapitre.

13. Avant d'entrer en matière nous préviendrons que toute ligne de terre sera représentée par les lettres LT, avec ou sans accent, ces lettres L et T étant placées

de telle manière qu'en se supposant au-dessus du plan horizontal et en face du plan vertical, on ait la lettre L à gauche et la lettre T à droite ; de sorte que la position respective de ces lettres indique la partie de la feuille de dessin où l'on doit chercher les *régions* de chacun des deux plans de projection. Les projections des points ou des lignes sur les nouveaux plans de projection seront encore marquées par l'indice v ou h portant le même nombre d'accents que les lettres L et T de la nouvelle ligne de terre, pour marquer que c'est le même point ou la même ligne, mais rapportées à un nouveau plan vertical, on a un nouveau plan horizontal. De même les nouvelles traces des plans seront marquées par les lettres V ou H affectées du même nombre d'accents. Quelquefois aussi, surtout dans les questions d'application, on ne met aucune lettre à la ligne de terre, mais on l'ébarbe du côté de la partie antérieure du plan horizontal.

44. PROBLÈME 1. *Changer de plan vertical par rapport à un point* (*fig.* 48). Soient m^h et m^v les projections d'un point m sur deux plans caractérisés par la ligne de terre LT, supposons qu'on cherche sa projection sur un autre plan vertical L'T'. La position des lettres montre que la partie supérieure de ce plan vertical est rabattue vers la gauche du dessin, et la partie inférieure vers la droite. Puisque le plan horizontal n'est pas changé, la projection m^h ne change pas et le point m conserve la même hauteur au-dessus de ce plan ; donc sa nouvelle projection verticale $m^{v'}$ doit se trouver avec m^h sur une même perpendiculaire à L'T' (n° 8), sur la partie supérieure du nouveau plan vertical (n° 10, 1°) et à une distance $o'm^{v'}$ de L'T' égale à la distance om^v du point m au plan horizontal (n° 5, 1°).

On peut écrire cette relation sur la figure en menant, par le point i intersection de LT et L'T', les droites perpendiculaires, savoir : il à LT et ik à L'T'; puis l'on tracera la droite m^vl parallèle à oi, l'arc lk décrit du centre i, et la droite $km^{v'}$ parallèle à io'. Il est évident par ces constructions que l'on a : $om^v = il = ik = o'm^{v'}$.

45. PROBLÈME 2. *Changer de plan horizontal par rapport à un point* (*fig.* 48). Ce problème ne diffère en rien du précédent, si ce n'est que l'on doit faire, par rapport au plan horizontal, les opérations qui ont été faites par rapport au plan vertical. Si l'on voulait changer à la fois les deux plans de projection il faudrait effectuer ces opérations successivement, c'est pourquoi nous supposerons qu'après avoir changé comme ci-dessus, de plan vertical, on se propose de changer de plan horizontal ; soit L''T'' la nouvelle ligne de terre, de sorte que la partie antérieure de ce nouveau plan soit située au-dessous et la partie postérieure au-dessus de L''T''. Puisque le plan vertical reste le même, le point ou projection $m^{v'}$ ne change pas et le point m de l'espace demeure toujours en avant du plan vertical défini de position dans l'espace par la ligne de terre L'T' et à la même distance de ce plan vertical ; donc la nouvelle projection horizontale $m^{h''}$ doit se trouver avec $m^{v'}$ sur une même

perpendiculaire à L″T″ (n° 8), au-dessous de cette ligne de terre (n° 10, 1°) et à une distance $o''m^{h''}=o'm^{h}$ (n° 5, 2°). On écrira cette égalité *graphiquement* par des constructions analogues aux précédentes, desquelles on conclut :

$$o'm^{h}=i'l'=i'k'=o''m^{h''}.$$

Par des changements successifs de plans horizontal et vertical, on pourra rapporter un point à deux plans rectangulaires quelconques, dont l'un sera toujours dit horizontal quelle que soit sa direction, et l'autre vertical quelle que soit aussi sa direction dans l'espace, par rapport aux deux plans primitifs de projection.

46. Problème 3. *Changer de plans de projection par rapport à une droite.* On peut résoudre relativement à une droite les mêmes problèmes que nous venons de résoudre par rapport à un point; car une droite étant déterminée par deux points, il suffira de trouver les projections de deux de ses points sur les nouveaux plans. Soit L′T′ (*fig.* 49) la trace d'un nouveau plan vertical, la position des lettres sur cette nouvelle ligne de terre montre que la partie supérieure est rabattue à droite, et la partie inférieure à gauche de la feuille de dessin (n° 43) ; prenant donc sur la droite D deux points quelconques *m* et *n*, leurs projections horizontales ne changeront pas, et comme ces points sont au-dessus du plan horizontal, les nouvelles projections verticales devront se trouver à gauche de L′T′ et à des distances $o'm^{v'}=om^{v}$ et $p'n^{v'}=pn^{v}$ (n° 44). La trace horizontale *a* de D ne change pas ; donc si l'on a bien opéré, la droite $aa^{v'}$ doit être perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre L′T′. On aurait pu choisir ce point *a* et un autre point quelconque, pour trouver la nouvelle projection $D^{v'}$ de la droite D.

Remarquons encore, à l'occasion de ce problème, l'avantage de la nouvelle notation adoptée dans ce cours, car n'est-il pas évident que par son moyen on peut lire sur la figure non-seulement la signification de chaque ligne, sa position et sa direction dans l'espace, mais encore le sens du rabattement des plans qui situés dans l'espace ne coïncident avec la feuille du dessin et ne coïncident qu'après avoir effectuée (par la pensée) ce rabattement. Observons encore que les accents des lettres *h* et *v*, analogues à ceux de la ligne de terre correspondante, montrent au premier coup d'œil, par quels changements successifs de plans de projection, on a fait passer les projections de la figure de l'espace, ce que l'on n'obtiendrait pas par la notation ancienne, c'est-à-dire : *par lettres accentuées*, à moins de compliquer extrêmement cette notation.

Il serait maintenant très-facile de trouver la projection de la droite D sur un nouveau plan horizontal, c'est-à-dire, sur un plan perpendiculaire au plan vertical L′T′. Pour ne pas surcharger la figure, nous ne ferons pas ici cette recherche.

47. Problème 4. *Changer de plans de projection par rapport à un plan* (*fig.* 50). Nous considérerons le plan comme étant donné par ses traces H^p, V^p, et nous chercherons ses traces sur les nouveaux plans de projection. Proposons-nous de trouver la trace du plan P sur un nouveau plan vertical L'T'. La trace horizontale H^p ne changeant pas, le point o', où elle rencontre la nouvelle ligne de terre L'T', sera déjà un point de la nouvelle trace verticale cherchée (n° 27) ; si l'on prenait sur le plan P une droite quelconque, le point où elle rencontrerait le nouveau plan vertical de projection en serait un second point (n° 28), et par conséquent le problème serait résolu. Pour plus de simplicité, on choisit une horizontale K, parce qu'alors tous ses points sont à la même distance $b^h b$ du plan horizontal qui ne varie pas; donc en prolongeant K^h jusqu'à L'T' en b^h, élevant par ce point b^h une perpendiculaire à L'T' et prenant sur cette perpendiculaire une longueur $b'^h b' = b^h b$, on aura en b' la nouvelle trace verticale de l'horizontale K du plan P (n° 15), et par conséquent en V'^p (droite qui unit les points o' et b') la nouvelle trace verticale du plan P. Remarquons qu'il était inutile d'écrire la projection verticale de la droite K, puisqu'il suffisait d'en déterminer le point b, qui seul nous a servi.

Parmi toutes les horizontales du plan P, il vaut mieux, quand on le peut, employer celle A dont la projection A^h passe par le point d'intersection de LT et L'T'. Le point a appartenant à la fois aux deux plans verticaux, nous le soulignons sur le plan L'T'. S'il arrivait que la trace horizontale H^p ne rencontrât pas la nouvelle ligne de terre L'T' dans les limites du dessin, sans pourtant lui être parallèle, on ne connaîtrait pas le point o'; il faudrait alors trouver directement deux points de la trace verticale V'^p par la considération de deux horizontales du plan P. Et si dans ce cas la trace verticale sortait tout entière des limites du dessin, on prendrait sur le plan P deux droites, dont on pût trouver les nouvelles projections verticales, et le plan serait suffisamment déterminé par ces deux droites (n° 27).

Pour changer de plan horizontal, il faut opérer d'une manière semblable en employant une ou deux verticales du plan donné, suivant que la trace verticale de ce plan rencontre ou ne rencontre pas la nouvelle ligne de terre dans les limites du dessin, sans pourtant lui être parallèle.

48. Problème 5. *Connaissant les projections d'un point sur deux plans rectangulaires entre eux, trouver sa projection sur un troisième plan quelconque* (*fig.* 51). Le plan P, n'étant perpendiculaire ni au plan horizontal, ni au plan vertical, ne peut pas être considéré comme un nouveau plan vertical ou horizontal de projection, mais si nous voulons le prendre comme plan horizontal de projection, nous devons d'abord changer de plan vertical et choisir ce nouveau plan de manière à ce qu'il soit perpendiculaire au plan P ; pour cela il faut que H^p soit perpendiculaire

à la nouvelle ligne de terre L'T'; nous tracerons donc sur le plan horizontal de projection (et ainsi sur l'épure) une droite L'T' perpendiculaire à H^v, et elle définira la position du nouveau plan vertical de projection (n° 33, 4°); nous chercherons la trace du plan P (n° 47) et la projection du point m (n° 44) sur ce nouveau plan vertical; puis prenant le plan P pour nouveau plan horizontal de projection, la nouvelle ligne de terre L''T'' ne sera autre que V'^v et nous trouverons $m^{h''}$ (n° 45) qui sera la projection du point m sur le plan P.

On pourrait se proposer, considérant ce point $m^{h''}$ comme étant un point du plan P, d'en trouver les projections sur les plans primitifs caractérisés par la ligne de terre LT. Pour cela nous nommerons ce point n (au lieu de le désigner par $m^{h''}$); comme il est situé sur le plan horizontal L''T'', sa projection verticale doit être sur la ligne de terre en $n^{v'}$. Passant ensuite du système de plans qui se coupent suivant la ligne de terre L''T'' au système caractérisé par la ligne de terre L'T', la projection $n^{v'}$ ne changera pas et la nouvelle projection horizontale sera en n^h sur une perpendiculaire à L'T' abaissée de $n^{v'}$ et à une distance $i'n^h = n^{v'}n = b'^h m^h$. Enfin nous passerons au système de plans caractérisés par la ligne de terre LT en changeant de plan vertical, et nous trouverons la projection n^v sur une perpendiculaire à LT abaissée du point n^h et à une distance $in^v = i'n^{v'}$.

49. Remarquons que la droite $m^h n^h$ étant parallèle à L'T', est perpendiculaire à H^v; or la droite mn dans l'espace est perpendiculaire au plan P et $m^h n^h$ en est la projection horizontale. Au lieu de considérer le plan P comme un nouveau plan horizontal de projection, on aurait pu le considérer comme un nouveau plan vertical de projection; il aurait alors fallu changer d'abord de plan horizontal et choisir L'T' perpendiculaire à V^v, puis H'^v aurait été la nouvelle ligne de terre L''T''; et en cherchant de même les projections du point $m^{v''}$ considéré comme un point n du plan P, on aurait trouvé d'abord n^v situé avec m^v sur une perpendiculaire à V^v; or $m^v n^v$ est la projection verticale de la perpendiculaire mn au plan P. Il résulte donc de ce problème que *les projections d'une perpendiculaire à un plan sont respectivement perpendiculaires aux traces de même nom du plan*. Mais nous démontrerons directement ce théorème par la suite.

50. Problème 6. *Ramener une droite à être parallèle à l'un des plans de projection* (*fig.* 52). Pour que la droite D soit parallèle au plan vertical, il faut que D^h soit parallèle à la ligne de terre (n° 17, 3°), il suffira donc de prendre L'T' parallèle à D^h et de chercher la projection $D^{v'}$ de la droite D sur ce nouveau plan vertical (n° 46). Si l'on voulait rendre la droite parallèle au plan horizontal, il faudrait changer de plan horizontal et prendre L'T' parallèle à D^v (n° 17, 2°).

51. Problème 7. *Ramener une droite à être perpendiculaire à l'un des plans de projection* (*fig.* 52). Si la droite D était parallèle au plan vertical, tout plan per-

pendiculaire à cette droite, serait en même temps perpendiculaire au plan vertical, et pourrait être choisi pour nouveau plan horizontal de projection combiné avec le plan vertical. Si la droite D était parallèle au plan horizontal, tout plan perpendiculaire à cette droite serait perpendiculaire au plan horizontal et pourrait être considéré comme un nouveau plan vertical de projection combiné avec le plan horizontal. Mais lorsque la droite D n'est parallèle à aucun des plans de projection, un plan perpendiculaire à cette droite n'est perpendiculaire ni au plan horizontal, ni au plan vertical, et ne peut par conséquent être pris ni comme nouveau plan vertical, ni comme nouveau plan horizontal de projection combiné avec l'un des plans primitifs; c'est pourquoi, pour résoudre le problème actuel, il faut commencer par rendre la droite donnée parallèle à l'un des plans de projection (n° 50).

Si, par exemple, on veut ramener la droite D à être perpendiculaire au plan horizontal, on la rendra d'abord parallèle au plan vertical, puis on changera de plan horizontal en remarquant que si la droite D est perpendiculaire au plan horizontal, sa projection verticale est perpendiculaire à la ligne de terre (n° 17, 5°); nous prendrons donc $L''T''$ perpendiculaire à $D^{v'}$, et la projection horizontale sera un seul point situé sur le prolongement de $D^{v'}$ en avant de $L''T''$, et à une distance $a^{v}D^{h''} = aa^{v'}$, distance d'un point quelconque de la droite D au plan vertical.

52. Problème 8. *Rendre un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.* Ce problème a été résolu accidentellement (n° 48); nous avons vu que pour rendre le plan P perpendiculaire au plan vertical, il faut changer de plan vertical de projection et prendre la nouvelle ligne de terre perpendiculaire à H^{p}; et pour rendre le plan P perpendiculaire au plan horizontal, il faut changer le plan horizontal de projection et prendre la nouvelle ligne de terre perpendiculaire à V^{p}.

53. Problème 9. *Rendre un plan perpendiculaire à la ligne de terre.* Le plan doit être perpendiculaire à la fois au plan horizontal et au plan vertical; nous changerons d'abord de plan vertical, en prenant $L'T'$ perpendiculaire à H^{p}, et nous en conclurons V'^{p} (n° 47); puis nous changerons de plan horizontal, en prenant $L''T''$ perpendiculaire à V'^{p}, le plan restera toujours perpendiculaire au plan vertical précédent, et sera en outre perpendiculaire au nouveau plan horizontal; il sera donc perpendiculaire à leur intersection, ou à la nouvelle ligne de terre.

54. Problème 10. *Rendre un plan parallèle à la ligne de terre* (*fig.* 53). Un plan parallèle à la ligne de terre a ses deux traces parallèles à cette ligne (n° 33, 8°); si donc nous voulons résoudre le problème par un changement de plan vertical, il faudra prendre $L'T'$ parallèle à H^{p}; puis pour obtenir un point de V'^{p}, on pour-

rait, dans le plan P, construire une droite quelconque et chercher son intersection avec le nouveau plan vertical; mais on y parvient plus simplement comme il suit: les deux plans verticaux et le plan P ont en commun un point a dont la projection horizontale est évidemment le point a^h, intersection des deux lignes de terre LT et L'T'; ce point, rapporté au plan vertical LT, est en a sur V^p; rapporté au plan vertical L'T', il est sur une perpendiculaire à L'T' et à une distance $a^h\underline{a} = a^h$, et le point $\underline{a}$ est un point de V'^p.

Si l'on voulait résoudre le problème par un changement de plan horizontal, il faudrait prendre la nouvelle ligne de terre parallèle à V^p, et l'on trouverait d'une manière analogue un point de la nouvelle trace horizontale.

55. Problème 11. *Rendre un plan parallèle à l'un des plans de projection.* Un plan parallèle à l'un des plans de projection est nécessairement perpendiculaire à l'autre; donc pour résoudre le problème actuel, il faut commencer par rendre le plan donné perpendiculaire à l'un des plans de projection (n° 52), puis on le rendra parallèle à l'autre plan. Si, par exemple, on veut que le plan donné P soit parallèle au plan vertical, on le rendra d'abord perpendiculaire au plan horizontal, puis on changera de plan vertical, en prenant la nouvelle ligne de terre parallèle à H'^p (n° 33, 6°). Si au contraire on veut rendre le plan P parallèle au plan horizontal, on le rendra d'abord perpendiculaire au plan vertical, puis on changera de plan horizontal en prenant la nouvelle ligne de terre parallèle à V'^p (n° 33, 7°). Il est évident que dans le second changement de plan, il n'y a pas de trace du plan à chercher.

Il faut bien comprendre que, lorsque sur l'épure on trace une nouvelle ligne de terre L'T', elle est l'intersection du plan horizontal qui ne change pas et du nouveau plan vertical de projection, ou l'intersection du plan vertical qui ne change pas et du nouveau plan horizontal de projection, suivant que l'on veut effectuer un changement de plan vertical de projection ou un changement de plan horizontal de projection.

56. Avant de résoudre le problème de la rotation des figures autour d'un axe, nous ferons connaître trois principes évidents, et qui nous seront d'une grande utilité:

1° Toute figure contenue dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, se projette sur ce plan suivant une figure identique. En effet, en abaissant des extrémités d'une droite des perpendiculaires sur le plan de projection, on forme un parallélogramme rectangle, dont la projection de la droite et la droite projetée sont deux côtés opposés, et dès lors parallèles et égaux en longueur; et cela a lieu que la figure soit limitée par des lignes droites finies ou infiniment petites.

2° Toute figure contenue dans un plan P perpendiculaire à l'un des plans de

projection, se projette sur ce plan de projection suivant la trace du plan P qui la contient ; car les perpendiculaires abaissées de chaque point de la figure ne sortent pas de ce plan P.

3° Quand une figure tourne autour d'un axe, sa projection sur un plan perpendiculaire à cet axe tourne autour du pied de l'axe sur ce plan, en restant identique à elle-même, tandis que sa projection sur tout autre plan change de forme à chaque instant du mouvement.

Cela posé, la rotation d'une figure peut se faire autour d'un axe perpendiculaire ou parallèle à l'un des plans de projection, ou dirigé d'une manière quelconque. Après la rotation, les différentes parties de la figure ayant changé de position dans l'espace, c'est, à proprement parler, une autre figure identique à la première dont nous cherchons les projections ; c'est pourquoi dans ce cas nous accentuons les lettres caractéristiques des points, des lignes et des plans, et non plus les indices, qui se rapportent toujours aux mêmes plans de projection.

57. Problème 12. *Faire tourner un point d'un angle donné autour d'un axe vertical et trouver ses projections dans sa nouvelle position* (*fig.* 54). Soient donnés un point m et un axe vertical A ; si du point m on abaisse une perpendiculaire R sur l'axe, elle sera horizontale, et par conséquent se projettera horizontalement en R^h dans sa véritable grandeur (n° 56, 1°), et sa projection verticale R^v sera parallèle à LT (n° 17, 2°). Si l'on imprime un mouvement de rotation au système et autour de l'axe A, la perpendiculaire R restera toujours perpendiculaire à cet axe A et ne changera pas de longueur ; elle décrira donc un cercle C dans un plan perpendiculaire à A, ou, en d'autres termes, dans un plan horizontal, et dont le centre sera sur l'axe A ; sa projection horizontale C^h sera un cercle identique dont le centre est en A^h et dont le rayon sera égal à R^h, sa projection verticale C^v est une droite parallèle à LT. Le point m ne sortant pas de cette circonférence C pendant son mouvement de rotation, lorsqu'il sera venu prendre dans l'espace la position m', ses projections m'^h et m'^v seront respectivement sur C^h et C^v. Si l'on suppose que le point m tourne autour de l'axe A d'un angle α et dans le sens de la flèche F', le rayon R sera venu dans une position R' faisant avec R un angle égal à α ; les projections horizontales R^h et R'^h devront faire entre elles le même angle α, puisque les droites R et R' sont horizontales ; dès lors il suffira de mener R'^h faisant avec R^h l'angle α ; le point en lequel cette droite R'^h rencontrera C^h sera la projection horizontale m'^h du point m après la rotation ; sa projection verticale devant se trouver sur la projection verticale du cercle C sera en m'^v sur C^v. Si la rotation avait lieu en sens contraire, comme l'indique la flèche F'', le rayon R serait venu en R'' et le point m en m''.

58. Problème 14. *Faire tourner un point d'un angle donné autour d'un axe perpen-*

13

diculaire au plan vertical (*fig.* 55). Ce problème ne diffère en rien du précédent, seulement le cercle C décrit par le point m est dans un plan parallèle au plan vertical, de sorte que l'angle donné α doit être formé par les projections verticales R^v et R'^v des rayons (de ce cercle C) passant par les points m et m'.

59. PROBLÈME 14. *Faire tourner une droite d'un angle donné autour d'un axe vertical ou perpendiculaire au plan vertical.* La droite donnée peut occuper trois positions distinctes par rapport à l'axe :

1° Elle peut lui être parallèle, elle décrit alors une surface cylindrique à base circulaire, comme on l'a vu en géométrie élémentaire;

2° Elle peut couper l'axe en un point, elle décrit alors une surface conique à base circulaire, comme l'apprend également la géométrie élémentaire;

3° Enfin elle peut n'être pas située dans un même plan avec l'axe; dans ce cas elle décrit une surface que nous étudierons plus tard sous le nom d'*hyperboloïde de révolution à une nappe.*

Premier cas. Soient l'axe vertical A (*fig.* 56) et la droite D parallèle à cet axe, et par conséquent verticale; tous les points de la droite D tournant autour de A conserveront la même distance à cet axe, donc D et A seront toujours parallèles; la trace horizontale de la droite D décrira l'angle α, et par suite la droite D viendra en D'.

Deuxième cas. Soient l'axe vertical A (*fig.* 57) et la droite D qui coupe cet axe au point m; quand on aura fait tourner la droite D d'un angle α autour de l'axe A, elle ne cessera pas de passer par le point m; il suffit donc pour connaître entièrement la nouvelle position D' de la droite D, de fixer celle que prendra un autre quelconque des points de la droite D; la question est donc ramenée à faire tourner autour de l'axe A un point de la droite D. Parmi tous les points de cette droite, on choisit de préférence sa trace horizontale a, quand elle se trouve dans les limites du dessin, parce que le cercle C qu'elle décrit est situé dans le plan horizontal, et par suite sa projection verticale C^v n'est autre que la ligne de terre; le point a viendra en a' dont la projection verticale a'^v sera sur LT, joignant ce point a' avec le point m, on a la droite D'. La trace verticale b sort, pendant le mouvement, du plan vertical, et la nouvelle trace verticale de la droite D' (qui est le point c') n'est pas la position qu'est venu prendre le point b, trace de la droite D, après que D est venu en D'; c'est pourquoi nous désignons la trace verticale de D', non par b', mais par une autre lettre, et ainsi par c'.

Troisième cas. Soient l'axe vertical A (*fig.* 58) et la droite D, qui n'est pas située dans un même plan avec l'axe A. Pour connaître la position que prendra la droite D après avoir tourné d'un angle α autour de l'axe A, il suffit évidemment de déterminer les nouvelles positions de deux points de cette droite; prenons donc deux points m et n sur la droite D, ils décriront pendant la révolution des arcs de cercle C et C' situés dans des plans perpendiculaires à l'axe A, et par

conséquent parallèles au plan horizontal, le point m viendra en m' et le point n en n'. Après avoir trouvé le point m' comme on l'a enseigné ci-dessus (n° 57), pour n'avoir plus à construire l'angle α, on prolonge le rayon mené par n^h jusqu'en r, on prend l'arc rs = l'arc $m^h m'^h$, et cela au moyen des cordes et ainsi par une seule ouverture de compas; on joint sA^h, et cette droite va couper le cercle C'^h au point n'^h d'où l'on conclut ensuite n'^v.

On simplifie les constructions en prenant deux points dont les projections horizontales sont à la même distance de A^h, car alors les cercles qu'ils décrivent ont la même projection horizontale; si l'on prend, par exemple, les points a et m, on construira l'un de ces points m, comme ci-dessus (n° 57), on prendra ensuite sur le cercle C'' ou le cercle C^h, $aa' = m^h m'^h$ et l'on aura le point a'.

Enfin on peut encore choisir les points d'une manière particulière, qui quelquefois peut seule permettre de résoudre le problème. Abaissons du point A^h sur D^h une perpendiculaire N, qui la rencontre en p^h, projection horizontale d'un point p de la droite D; supposons que le système de la droite D, de la projection horizontale D^h et de la normale N, tourne autour de l'axe A de la quantité angulaire α, la normale viendra en N' faisant avec N l'angle α; la droite D^h pendant la rotation ne cessera pas d'être perpendiculaire à N et d'être la projection horizontale de la droite D dans toutes ses positions (n° 56, 3°); donc en menant D'^h perpendiculaire à N' ou tangente au cercle C'^h, on aura la projection horizontale D'^h de la droite D après la rotation, et l'on a aussi un point p'^v de la projection verticale D'^v; si donc on connaissait la direction, ou un second point, de cette projection D'^v, on pourrait la construire. On aura le point a'^v en ramenant le point a en a' sur D'^h par un arc de cercle décrit du point A^h comme centre. On pourrait évidemment choisir tout autre point que le point a.

On résoudrait de la même manière le problème : *faire tourner une droite autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical*, seulement les constructions que nous avons effectuées sur le plan horizontal devraient être faites sur le plan vertical, et réciproquement.

60. Problème 15. *Faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe vertical.* La nouvelle position du plan P donné sera connue si l'on trouve celles de deux droites quelconques situées sur ce plan. Parmi ces droites, on choisit de préférence deux horizontales, et l'on prend pour l'une d'elles la trace horizontale du plan P, parce que dans le mouvement de rotation de ce plan P, elle ne sort pas du plan horizontal. Abaissant du point A^h (*fig.* 59) la perpendiculaire N sur H^p, elle rencontre cette trace au point p, qui décrit pendant la rotation un cercle C auquel la trace horizontale H^p demeure toujours tangente, or cette droite N viendra en la position N' faisant avec N l'angle donné α, le point p de la trace H^p viendra

donc en p', et si l'on mène une tangente en p' au cercle C, ce sera la trace horizontale $H^{p'}$ du plan P après la rotation, et le point ϖ' où elle rencontre la ligne de terre appartient à la nouvelle trace verticale du plan P' nouvelle position du plan P. Pour en avoir un second point, nous emploierons une horizontale K du plan P; pendant la rotation elle conservera la même distance au plan horizontal, et par conséquent sa projection verticale sera toujours sur la même parallèle à LT; quant à sa projection horizontale, elle restera parallèle à la trace horizontale du plan P pendant la rotation; or K^h coupe la droite N en un point q^h qui se porte en q'^h sur N', menant par ce point q'^h la droite K'^h parallèle à $H^{p'}$, ce sera la projection horizontale de l'horizontale K' après la rotation (nº 56, 3°), et le point b' où K' perce le plan vertical est le second point cherché de la trace $V^{p'}$; joignant donc $b'\varpi'$, on aura cette trace $V^{p'}$.

Au lieu d'abaisser la perpendiculaire N sur H^p, on aurait pu chercher les nouvelles positions de deux points quelconques de $H^{p'}$, mais les constructions auraient été plus longues, même en choisissant ces deux points à la même distance du point A^h. Nous avons pris une horizontale K quelconque, on aurait simplifié un peu la figure, en prenant celle qui passe par le point où l'axe A perce le plan P, sa projection horizontale aurait alors passé par le point A^h.

Si la trace horizontale $H^{p'}$ ne rencontrait pas la ligne de terre dans les dimensions du dessin, on n'aurait plus le point ϖ' de la trace verticale $V^{p'}$; on serait alors obligé d'employer une seconde droite que l'on choisirait encore de préférence horizontale, et l'on chercherait sa trace verticale après la rotation, ce qui donnerait un point de $V^{p'}$ que l'on joindrait à b' pour avoir cette trace $V^{p'}$.

Enfin, le même problème pourrait se résoudre en prenant un axe perpendiculaire au plan vertical; ce serait alors des verticales du plan que l'on devrait employer.

61. **Problème** 16. *Amener une droite dans une position parallèle à l'un des plans de projection* (*fig.* 60). Au lieu de faire tourner une droite d'un angle donné, on peut demander de la faire tourner jusqu'à ce qu'elle soit dans une position déterminée par rapport aux plans de projection. Supposons, par exemple, qu'on veuille faire tourner la droite D autour de l'axe vertical A, jusqu'à ce qu'elle soit parallèle au plan vertical; dans cette position sa projection horizontale sera parallèle à la ligne de terre (nº 17, 3°); il suffira donc d'en connaître un point. Il est facile de voir qu'on doit ici employer la dernière considération du nº (59, 3°); nous abaissons donc du point A^h une perpendiculaire N sur D^h, qui la rencontrera en p^h projection horizontale d'un point p de la droite D. Si l'on conçoit un système formé de la droite D, de sa projection horizontale D^h, de la verticale abaissée du point p et enfin de la droite N, et qu'on le fasse tourner autour de l'axe A, ces

quatre droites conserveront entre elles les mêmes positions relatives, donc D^a sera perpendiculaire à N′ ou tangente au cercle décrit de A^a comme centre et avec N pour rayon et en même temps elle sera parallèle à LT; le point p se portera en p' à la même hauteur au-dessus du plan horizontal, le point a viendra en a', et par suite D^v sera la projection verticale de la droite D dans sa nouvelle position D′.

Tous les points de la droite D décrivant des arcs de cercles horizontaux, il est facile de conclure de la figure elle même l'angle α décrit par le rayon N, angle dont par suite doivent tourner les autres parties de la figure, supposées entraînées dans le mouvement de rotation de la droite D.

62. Si l'axe A n'est pas donné d'avance, on le choisira passant par un point de la droite D, parce que alors la figure est plus simple. Remarquons que pour amener la droite D à être parallèle au plan vertical, on est obligé de choisir un axe vertical; nous avons vu en effet que le problème est alors résoluble. Si au contraire l'axe était perpendiculaire au plan vertical, tous les points de la droite D décriraient des cercles parallèles au plan vertical et conserveraient par conséquent la même distance à ce plan, donc la droite D n'aurait pas après la rotation tous ses points également distants du plan vertical, donc enfin elle ne serait pas parallèle à ce plan. Par une raison semblable on ne pourra amener la droite D dans une position parallèle au plan horizontal que par un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

63. Problème 17. *Amener une droite dans une position perpendiculaire à l'un des plans de projection* (*fig.* 61). Lorsqu'une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, elle est nécessairement parallèle à l'autre. Or, pour rendre une droite parallèle au plan vertical, on est obligé de la faire tourner autour d'un axe vertical (n° 62), mais dans ce mouvement tous les points de la droite conservent la même distance à l'axe, et par conséquent elle ne pourra jamais devenir parallèle à cet axe; d'un autre côté une droite quelconque tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical ne peut jamais devenir parallèle à ce plan, si elle ne l'est pas avant la rotation, donc il sera impossible de rendre une droite verticale par un mouvement simple de rotation autour d'un seul axe. Mais par un premier mouvement autour d'un axe vertical A, nous amènerons la droite D dans la position D′ parallèle au plan vertical (n° 61), puis par un second mouvement de rotation autour d'un axe B perpendiculaire au plan vertical nous l'amènerons dans la position verticale D″; car pendant cette seconde rotation la projection D^v prendra successivement toutes les positions tangentes au cercle C^v, et par conséquent il y aura un instant où elle sera perpendiculaire à LT et alors la droite D″ sera verticale (n° 17, 5°).

Pour amener la droite donnée dans une position perpendiculaire au plan vertical, il faudrait d'abord la rendre parallèle au plan horizontal par un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, puis l'amener dans la position demandée par un second mouvement de rotation autour d'un axe vertical.

Remarquons que l'on trouve par la construction les angles α et β dont la droite D a tourné autour de chacun des deux axes, de sorte que si l'on avait d'autres lignes ou d'autres points entraînés pendant ces mouvements de rotation, on devrait les faire tourner de quantités angulaires égales respectivement à α et à β.

64. Problème 18. *Amener un plan dans une position perpendiculaire à l'un des plans de projection* (*fig.* 62). Soient un plan P et un axe vertical A, supposons qu'on demande de faire tourner le plan P autour de l'axe A jusqu'à ce qu'il soit devenu perpendiculaire au plan vertical; dans sa nouvelle position sa trace horizontale sera perpendiculaire à LT, si donc l'on abaisse du point A^h une perpendiculaire N sur H^p qui la rencontre en r; ce point décrira un cercle C auquel la trace horizontale du plan sera toujours tangente; la normale N deviendra parallèle à LT en N′ ou N″ suivant que la rotation aura lieu de droite à gauche ou de gauche à droite; on aura ensuite $H^{p'}$ ou $H^{p''}$ en menant une tangente au cercle C perpendiculairement à LT; pour avoir la trace verticale, remarquons que l'axe A coupe le plan P en un point m qui ne varie pas pendant la rotation, et dont la projection verticale sera sur la nouvelle trace verticale du plan (nº 56, 2°), si donc nous menons une horizontale K du plan P rencontrant l'axe en m, le point m^v sera un point de la trace verticale $V^{p'}$ ou $V^{p''}$ cherchée, le point p' ou p'' en lequel la trace horizontale $H^{p'}$ ou $H^{p''}$ rencontre LT, en est un second, donc la trace $V^{p'}$ ou $V^{p''}$ est déterminée.

Si l'on avait voulu rendre le plan perpendiculaire au plan horizontal, il aurait fallu le faire tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

65. Problème 19. *Amener un plan dans une position perpendiculaire à la ligne de terre* (*fig.* 63). Le plan, dans sa nouvelle position, sera perpendiculaire à la fois aux deux plans de projection; or, nous avons vu (nº 64) qu'on ne peut pas le rendre perpendiculaire au plan horizontal par un seul mouvement de rotation autour d'un axe vertical; le problème actuel ne pourra donc se résoudre que par deux rotations effectuées, l'une autour d'un axe vertical A pour amener le plan P dans la position P′ perpendiculaire au plan vertical de projection, l'autre autour d'un axe B perpendiculaire au plan vertical de projection pour amener le plan P′ dans la position P″ perpendiculaire au plan horizontal; et comme pendant ce second mouvement la position du plan P′ à l'égard du plan vertical de projection ne change pas (nº 56, 3°), le plan P″ sera perpendiculaire à la fois aux deux plans de pro-

jection, et par conséquent à la ligne de terre. On simplifiera la figure en faisant passer les deux axes A et B par un même point *m* du plan donné P.

66. Problème 20. *Amener un plan dans une position parallèle à la ligne de terre* (*fig.* 64). On pourra résoudre le problème en faisant tourner le plan P autour d'un axe vertical A, jusqu'à ce que sa trace horizontale soit parallèle à LT (n° 33, 8°); puis pour avoir la trace verticale, qui doit aussi être parallèle à LT, il est évident qu'on ne peut plus employer une horizontale du plan, car après la rotation cette droite serait parallèle à LT, et par conséquent ne rencontrerait pas le plan vertical. Mais nous pouvons chercher le point *m* en lequel l'axe A rencontre le plan P, ce point reste invariable; et si dans le plan P et par ce point *m* on fait passer une droite D, dont nous ne traçons ici que la projection horizontale D^h, elle ne cessera pas de passer par le point *m*, sa trace horizontale *a* viendra en *a'*, et la droite D prendra la position D', dans laquelle elle a pour trace verticale le point *b'*; si donc de ce point *b'* on mène une parallèle à LT, ce sera la trace $V^{p'}$ cherchée. Au lieu de la trace *a*, on peut évidemment employer un autre point quelconque de la droite D.

67. Problème 21. *Amener un plan dans une position parallèle à l'un des plans de projection.* Un plan parallèle au plan vertical est en même temps perpendiculaire au plan horizontal, et sa trace horizontale est parallèle à la ligne de terre. Nous devrons donc rendre d'abord le plan donné P perpendiculaire au plan horizontal par un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical (n° 64); puis, par un second mouvement autour d'un axe vertical, on le rendra parallèle au plan vertical.

De même, pour amener un plan dans une position parallèle au plan horizontal, on le rendra d'abord perpendiculaire au plan vertical, par un mouvement de rotation autour d'un axe vertical; puis parallèle au plan horizontal par un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

68. On pourrait, par des mouvements de rotation tout à fait semblables, amener un plan dans une position telle qu'il eût sa trace horizontale, par exemple, parallèle à une droite donnée dans le plan horizontal. On pourrait aussi fixer telle autre condition que l'on voudrait pour limiter le mouvement qui doit être imprimé au plan.

69. Tous les problèmes de géométrie descriptive peuvent se résoudre à l'aide des changements de plans de projection et des mouvements de rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'un des plans de projection, ce qui n'est au fond que le même principe.

En effet, changer de plan vertical de projection, par exemple, revient évidemment à faire tourner l'ancien plan vertical autour d'un axe vertical jusqu'à ce qu'il soit venu prendre la position nouvelle qu'on veut lui donner. Toute la

différence entre les deux principes fondamentaux que nous venons d'établir consiste donc en ce que dans le premier, c'est l'un des plans de projection que l'on fait tourner autour d'un axe perpendiculaire à l'autre plan jusqu'à ce qu'il soit venu dans une position convenable à l'égard de la figure que l'on veut projeter; dans le second c'est la figure elle-même que l'on fait tourner autour d'un pareil axe jusqu'à ce qu'elle soit dans une position convenable à l'égard des plans de projection dit *primitifs*, parce qu'on ne les fait pas varier de position; ils restent *immobiles*. Il résulte de là que les problèmes pourront presque toujours se résoudre par des changements de plans de projection, ou par des mouvements de rotation, ou enfin par ces deux principes combinés. Cependant, nous verrons qu'il est quelquefois plus simple d'employer l'un plutôt que l'autre.

Déjà, dans ce qui précède, on peut voir qu'un plan est amené dans une position parallèle à la ligne de terre plus simplement par un changement de plan que par un mouvement de rotation, puisque la seconde méthode nécessite l'emploi d'une droite dont on n'a pas besoin lorsque l'on se sert de la première méthode. Mais, par un choix convenable des axes, l'emploi des mouvements de rotation est préférable à celui des changements de plans pour amener un plan dans une position perpendiculaire à la ligne de terre. Le problème énoncé au n° 68 ne pourrait évidemment pas se résoudre par des changements de plan.

70. Dans les applications, on est souvent conduit à faire tourner une figure autour d'un axe, qui n'est plus perpendiculaire à l'un des plans *primitifs* de projection, mais ordinairement parallèle et plus souvent encore situé dans l'un de ces plans, c'est encore par la considération des mouvements de rotation autour d'un axe perpendiculaire à un nouveau plan de projection que l'on résout ces problèmes; aussi est-on alors obligé de faire, au préalable, un changement de plan de projection, ainsi que nous allons le voir.

71. Problème 22. *Faire tourner un point ou une droite d'un angle donné autour d'un axe parallèle à l'un des plans de projection.* Soit, par exemple, un axe horizontal A (*fig.* 65) oblique par rapport au plan vertical, et proposons-nous de faire tourner un point m ou une droite D d'un angle donné α autour de cet axe. Le point m et tous les points de la droite D décriront des arcs de cercle situés dans des plans perpendiculaires à l'axe A, et par conséquent verticaux, lesquels se projetteraient verticalement suivant des cercles identiques, si le plan vertical (*primitif*) de projection était lui-même perpendiculaire à l'axe A, c'est pourquoi nous changerons d'abord le plan vertical, et nous en choisirons un perpendiculaire à l'axe A. Nous serons ainsi ramenés à faire tourner le point m et la droite D autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical de projection. Nous avons appris (n°s 58 et 59) à trouver les projections du point m' et de la droite D' sur les plans qui se

coupent suivant la ligne de terre L'T', mais il faut rapporter ce point et cette droite aux anciens plans de projection; il suffit évidemment pour cela de mener par m'^h une perpendiculaire à LT et de prendre $om'^v = o'm'^{v'}$; prenant de même $ib'^v = i'b'^{v'}$, nous aurons la projection verticale d'un second point b' de la droite D', qui est par là entièrement déterminée ainsi que le point m'.

72. La première partie du problème consistait à rendre l'axe A perpendiculaire à l'un des plans de projection; il est évident qu'on aurait pu y parvenir par un mouvement de rotation autour d'un axe vertical (n° 63), mais les constructions que nous avons eu à effectuer sont plus simples, comme il est facile de s'en convaincre; elles répondent aussi plus directement à la question proposée.

Si l'on voulait faire tourner le point ou la droite autour d'un axe parallèle au plan vertical, on remarquerait que les cercles décrits par chaque point sont perpendiculaires à cet axe et par conséquent au plan vertical, de sorte qu'on est conduit à rendre d'abord cet axe vertical en prenant un nouveau plan horizontal qui lui soit perpendiculaire, parce qu'alors tous ces cercles se projetteront sur ce nouveau plan suivant des cercles identiques.

73. Problème 23. *Faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe parallèle à l'un des plans de projection.* Soit un axe A (*fig.* 66) parallèle au plan vertical, mais oblique par rapport au plan horizontal, et proposons-nous de trouver les traces du plan P quand il aura tourné d'un angle α autour de l'axe A. Tous les points du plan P décriront pendant le mouvement de rotation des arcs de cercles situés dans des plans perpendiculaires à l'axe A, et qui se projetteraient suivant des cercles identiques si le plan horizontal était perpendiculaire à l'axe A; c'est pourquoi nous changerons d'abord de plan horizontal pour le prendre perpendiculaire à A, la ligne de terre L'T' doit alors être perpendiculaire à A^v, la projection horizontale de A sera en un seul point $A^{h'}$ distant de L'T' d'une quantité égale à la distance de A^h à LT. Pour avoir H'^p nous prolongerons V^p jusqu'à L'T' en o', puis nous déterminerons un second point b' de H'^p par une verticale K du plan P. Cela fait, abaissant du point $A^{h'}$ une perpendiculaire $A^{h'}p$ sur H'^p et décrivant un arc de cercle dont le centre est $A^{h'}$ et le rayon $A^{h'}p$; menant la droite $A^{h'}p'$ telle qu'elle fasse avec $A^{h'}p$ l'angle donné α; puis en p' construisant une tangente à l'arc de cercle décrit, nous aurons la trace horizontale $H'^{p'}$ du plan dans sa nouvelle position; on en déduit la trace verticale $V^{p'}$ à l'aide d'une horizontale B du plan P', laquelle fait connaître le point c' de $V^{p'}$; enfin on aura un second point de la trace horizontale H' du plan P' sur l'ancien plan en prolongeant $V^{p'}$ jusqu'à LT, si cela est possible, vu la longueur de la feuille de dessin, ou en déterminant un autre point d' de $H^{p'}$ à l'aide d'une verticale E' du plan P'.

Pour faire tourner le plan autour d'un axe parallèle au plan horizontal, il faudrait

prendre d'abord un nouveau plan vertical perpendiculaire à cet axe. Au lieu de donner l'angle α, on pourrait se proposer d'amener la droite ou le plan dans une position déterminée par d'autres conditions.

74. PROBLÈME 24. *Faire tourner un point, ou une droite, d'un angle donné autour d'un axe quelconque.* Soient l'axe A (*fig.* 67) donné par ses projections A^h et A^v, le point m donné aussi par ses projections m^h et m^v, et enfin la droite D donnée de même par ses projections D^h et D^v, il faut trouver les projections D'^h et D'^v de la droite D, et celles m'^h et m'^v du point m après qu'ils auront tourné, ensemble, d'un angle α autour de l'axe A. Pendant la rotation, le point m et tous les points de la droite D décriront des arcs de cercle situés dans des plans perpendiculaires à l'axe A, et qui se projetteraient suivant des cercles identiques si l'axe A était perpendiculaire à l'un des plans de projection; il faut donc se ramener à cet état de choses, en choisissant un nouveau plan de projection perpendiculaire à A; mais ce plan ne serait perpendiculaire à aucun des plans auxquels la figure est actuellement rapportée, c'est pourquoi nous aurons recours à un double changement de plan.

Nous prendrons d'abord un nouveau plan vertical parallèle à l'axe A, et pour plus de simplicité nous choisirons le plan projetant horizontalement cet axe; la nouvelle ligne de terre L'T' sera alors la projection A^h elle-même; les projections horizontales A^h, m^h, D^h ne changeront pas, et les projections verticales sur le nouveau plan de projection défini (ou fixé de position dans l'espace) par la nouvelle ligne de terre L'T', seront respectivement en A, $m^{v'}$, $D^{v'}$ (n°s 44 et 46) : nous sommes ainsi ramenés à faire tourner un point m ou une droite D autour d'un axe A parallèle à l'un des plans de projection (problème résolu ci-dessus n° 71). Il faut donc maintenant changer de plan horizontal, en prenant L''T'' perpendiculaire à A, la nouvelle projection horizontale de l'axe A sera en un seul point $A^{h''}$; les projections verticales $m^{v'}$ et $D^{v'}$ ne changeront pas, les projections horizontales correspondantes seront $m^{h''}$ et $D^{h''}$. Enfin, pour faire tourner le point m et la droite D autour de l'axe A, actuellement perpendiculaire au nouveau plan horizontal et qui est défini de position par la ligne de terre L''T'', nous joindrons les points $A^{h''}$ et $m^{h''}$, et avec cette droite $\overline{A^{h''}m^{h''}}$ pour rayon et du point $A^{h''}$ pour centre, nous décrirons un cercle coupant $D^{h''}$ en un second point $q^{h''}$, menant ensuite par le point $A^{h''}$ une droite faisant un angle α avec la droite $A^{h''}m^{h''}$, nous obtiendrons le point $m'^{h''}$, et portant $q^{h''}q'^{h''} = m^{h''}m'^{h''}$, nous aurons un second point de $D'^{h''}$; les projections $m'^{v'}$ et $q'^{v'}$ se trouvent sur des parallèles à L''T'' menées par $m^{v'}$ et $q^{v'}$; nous aurons donc $D'^{v'}$. Il faut maintenant changer de plan horizontal en choisissant L'T' pour ligne de terre, ayant soin de prendre m'^h derrière et q'^h devant cette ligne comme sont disposés $m'^{h''}$ et

$q'^{h''}$ par rapport à L″T″ (n° 43), on obtient ainsi D'^{h}, puis on en conclut D'^{v} (n° 45).

75. PROBLÈME 25. *Faire tourner un plan d'un angle donné autour d'un axe quelconque.* Soient l'axe A (*fig.* 68), donné par ses projections A^h et A^v, et le plan P donné par ses traces H^p et V^p, il s'agit de faire tourner le plan P d'un angle α autour de l'axe A. Pendant la rotation tous les points du plan P décriront des arcs de cercles situés dans des plans perpendiculaires à l'axe A, et qui ne seront par conséquent ni parallèles ni perpendiculaires à l'un des plans de projection : c'est pourquoi, comme dans le problème précédent, nous changerons d'abord de plan vertical, prenant le nouveau plan parallèle à l'axe A, ou plus simplement passant par l'axe A lui-même ; la ligne de terre L′T′ sera confondue avec A^h, dès lors pour avoir la position de l'axe A sur ce plan, nous chercherons les positions de deux de ses points a et m, et nous aurons A ; la trace H^p du plan ne change pas, nous déterminerons la trace verticale V'^p par une horizontale B du plan P. Changeons maintenant de plan horizontal, en le choisissant perpendiculaire à l'axe A, la ligne de terre L″T″ sera perpendiculaire à A ; la projection horizontale de l'axe A sera en un seul point $A^{h''}$; la trace verticale V'^p ne changera pas, et l'on obtiendra la trace horizontale H''^p à l'aide d'une verticale K du plan P. Il faut enfin faire tourner le plan P donné par ses traces H''^p et V'^p autour de l'axe A actuellement perpendiculaire au nouveau plan horizontal de projection. Pour cela, nous abaissons $A^{h''}p$ perpendiculaire sur H''^p, nous construisons l'angle α, puis décrivant un arc de cercle du centre $A^{h''}$, nous obtiendrons le point p', menant $H''^{p'}$ tangente en ce point p' au cercle C, ce sera la trace horizontale du plan P dans sa nouvelle position ; la trace verticale V'^p rencontre l'axe A en un point n qui est invariable pendant le mouvement de rotation, et qui devra par conséquent appartenir encore à la trace verticale V'^p. Si maintenant nous changeons de plan horizontal, en prenant L′T′ pour ligne de terre, nous déterminerons la trace horizontale $H^{p'}$ à l'aide d'une verticale R′ du plan P′ ; enfin, changeant encore de plan vertical, en prenant LT pour ligne de terre, nous trouvons la trace verticale $V^{p'}$ à l'aide d'une horizontale S′ du plan P′.

76. Lorsqu'une figure plane est donnée dans l'espace, il est souvent utile d'en avoir la véritable forme ; pour cela il faut amener le plan qui la contient en une position parallèle à l'un des plans de projection (n° 56, 1°), c'est à quoi l'on parvient par deux méthodes distinctes :

1° En prenant un nouveau plan de projection parallèle au plan de la figure, ou plus simplement encore en considérant ce plan lui-même comme un nouveau plan de projection, mais lorsque ce plan n'est pas déjà perpendiculaire à l'un des plans primitifs de projection, il faut commencer par l'amener dans cette position particulière ;

2° En faisant tourner le plan de la figure autour d'un axe, et l'on choisit ordinairement pour axe l'une de ses traces, cette opération porte alors le nom de *rabattement;* mais comme ce mouvement a lieu autour d'un axe parallèle à l'un des plans de projection, il nécessite encore deux opérations (n° 73). Donc, en général, pour trouver la véritable forme d'une figure située dans un plan quelconque, il faut effectuer deux opérations, qui ont pour but : la première de rendre le plan de la figure perpendiculaire à l'un des plans de projection; la seconde de l'amener à se confondre avec l'autre plan de projection, ou tout au moins à lui être parallèle. Chacune de ces opérations peut s'effectuer soit par un changement de plan de projection, soit par un mouvement de rotation, ce qui donne lieu à quatre méthodes pour résoudre le problème actuel :

1° Par deux changements de plans de projection;

2° Par un changement de plan de projection et un mouvement de rotation;

3° Par un mouvement de rotation et un changement de plan de projection;

4° Par deux mouvements de rotation.

Ces questions sont suffisamment résolues par ce qui précède, nous allons d'ailleurs en démontrer directement l'application en résolvant les quatre problèmes suivants, qui nous conduiront aussi à la question réciproque : qui s'énonce ainsi qu'il suit : *étant donnée la position d'un point sur un plan rabattu ou considéré comme plan de projection, trouver ses projections sur deux plans donnés et rectangulaires entre eux.*

77. Problème 26. *Sur une droite donnée dans un plan, construire un triangle équilatéral* (*fig.* 69). Soit P le plan (donné par ses traces) sur lequel doit être exécutée la construction demandée, la droite *ab* ne peut être donnée que par sa projection horizontale a^hb^h, et la condition qu'elle soit dans le plan P fera trouver sa projection verticale a^vb^v (n° 28); ou mieux la droite étant terminée aux points *a* et *b*, nous chercherons les projections verticales de ces points (n° 29) en employant pour cela des horizontales du plan P. Cela posé, nous ne pourrons effectuer les constructions demandées qu'après avoir ramené le plan P à se confondre avec l'un des plans de projection; nous emploierons à cet effet la première méthode (n° 76), c'est-à-dire deux changements de plans de projection. Supposons qu'on veuille prendre le plan P pour plan horizontal de projection, il faut d'abord choisir un nouveau plan vertical perpendiculaire à ce plan P, la ligne de terre L'T' devra donc être perpendiculaire à H^p (n° 33, 4°), et pour obtenir V'^p nous nous servirons des horizontales déjà construites pour trouver les points a^v et b^v. Prenant maintenant le plan P pour plan horizontal de projection, son intersection avec le plan vertical, ou V'^p deviendra la nouvelle ligne de terre L''T'', et les nouvelles projections horizontales des points *a*

et b, ne seront autres que ces points eux-mêmes, nous les trouverons par les moyens connus (n° 45).

Ayant ainsi obtenu la droite ab, nous construirons le triangle équilatéral demandé. Pour passer ensuite aux projections de ce triangle sur les plans primitifs, nous remarquerons que l'on connaît déjà les projections des deux sommets a et b; il ne reste plus à trouver que celles du sommet c; on y parviendra par des changements de plans inverses des précédents, c'est-à-dire que l'on passera du système L″T″ au système L′T′ par un changement de plan horizontal, puis de celui-ci au système primitif LT par un changement de plan vertical.

Si nous avions voulu considérer le plan P comme un plan vertical, il eût été convenable de déterminer les points a^v et b^v par des verticales du plan P, lesquelles auraient ensuite servi à trouver H'^p sur le nouveau plan horizontal de projection perpendiculaire au plan P et par lequel il aurait fallu passer, avant de pouvoir considérer ce plan P comme un plan vertical de projection.

78. Problème 27. *Sur une base donnée de longueur* ab *comme homologue du côté* $\alpha\beta$, *construire un triangle* abc *équivalent à un triangle donné* $\alpha\beta\gamma$, *et dont le sommet* c *soit situé sur une droite donnée de position* (*fig.* 70). Soit P le plan (donné par ses traces) dans lequel doivent être effectuées toutes les constructions. Les droites ab et D situées sur le plan P ne peuvent être données que par une seule projection, nous en conclurons la seconde (n° 28); puis comme nous ne pourrons exécuter les constructions du problème qu'après avoir ramené le plan P à se confondre avec l'un des plans de projection, nous supposerons qu'on veuille le *rabattre* sur le plan horizontal, et nous emploierons à cet effet la seconde méthode (n° 76), c'est-à-dire un changement de plan de projection et un mouvement de rotation.

Pour *rabattre* le plan P sur le plan horizontal, il faut le faire tourner autour de H^p comme axe, et cet axe étant horizontal, nous devrons d'abord le rendre perpendiculaire au plan vertical (n° 73); nous changerons donc de plan vertical de projection, en prenant L′T′ perpendiculaire à H^p, et nous chercherons V'^p qui doit contenir à la fois $a^{v'}$, $b^{v'}$, $D^{v'}$ (n° 56, 2°). Rabattant ensuite le plan P sur le plan horizontal, nous remarquerons que le point a, par exemple, décrira un arc de cercle C parallèle au plan vertical défini de position dans l'espace par la ligne de terre L′T′, et comme il doit arriver sur le plan horizontal, sa projection verticale sera alors sur la ligne de terre en $a'^{v'}$, et par conséquent le point lui-même se trouvera en a'; on aura de même l'autre point b', et la droite D'. Nous construirons le triangle demandé $a'b'c'$ sur le plan P ainsi rabattu. Pour revenir ensuite aux projections de ce triangle sur les plans primitifs, remarquons que l'on connaît déjà les deux sommets a et b; le troisième étant situé sur la droite D, nous n'aurons qu'à abaisser du point c' une perpendiculaire à H^p, elle coupera D^h au point c^h, d'où

l'on conclura c^v, et joignant les projections de ce point c à celles des points a, b, on aura les projections du triangle cherché abc. Si l'on avait voulu rabattre le plan P sur le plan vertical, il aurait fallu d'abord changer de plan horizontal, en prenant la nouvelle ligne de terre perpendiculaire à V^p, puis faire tourner le plan P autour de cette trace verticale. Les constructions seraient d'ailleurs tout à fait semblables à celles que nous venons d'effectuer.

79. Problème 28. *Inscrire dans une circonférence donnée un pentagone régulier, dont un sommet coïncide avec un point déterminé* (*fig.* 71). Une circonférence de cercle est déterminée par son centre et un point de la circonférence, quand on connaît d'ailleurs le plan dans lequel elle est située. Soit donc P ce plan, donnons les projections horizontales o^h et a^h du centre o et du point a, nous en conclurons les projections verticales o^v et a^v (n° 29), en employant à cet effet des verticales O et A du plan P. Nous ne pourrons ensuite effectuer les constructions demandées qu'après que le plan P sera venu se confondre avec l'un des plans de projection. Pour l'amener dans cette position, nous adopterons la troisième méthode (n° 76), c'est-à-dire un mouvement de rotation et un changement de plan de projection. Si nous voulons prendre le plan P pour un nouveau plan vertical de projection, il faut d'abord le rendre perpendiculaire au plan horizontal en le faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical (n° 64), jusqu'à ce que V^p soit venu dans la position $V^{p'}$ perpendiculaire à LT. L'axe étant arbitraire, nous le faisons passer, pour plus de simplicité, par le point d'intersection n des deux traces. (Le choix de la position de l'axe doit nécessairement dépendre de la disposition particulière de la figure.) Pour avoir les projections des points o et a après la rotation, nous pourrions nous servir des verticales déjà construites; mais on peut aussi remplacer ces droites par des lignes de plus grande pente du plan P. Concevons, par exemple, dans le plan P et par le point o une ligne de plus grande pente K par rapport au plan vertical, sa projection verticale sera une perpendiculaire abaissée de o^v sur V^p (n° 37), et coupant V^p au point p qui est la trace verticale de cette ligne de plus grande pente K; ce point p vient en p'; la droite K^v demeure perpendiculaire à V^p et conserve la même longueur (n° 56, 3°); donc menant $p'o'^v = po^v$ et perpendiculairement à $V^{p'}$, le point o'^v sera la projection verticale du point o dans sa nouvelle position, sa projection horizontale restera à la même distance de LT, elle est donc en o^h sur la projection horizontale de la verticale O du plan P, qui nous a déjà servi à trouver le point o^v. On pourra trouver les projections a'^v et a'^h de la même manière.

Prenant maintenant le plan P′ pour plan vertical de projection, sa trace horizontale $H^{p'}$ deviendra la nouvelle ligne de terre L′T′; nous trouverons les projections verticales des points a' et o' (n° 44), qui ne seront autres que ces points eux-mêmes; effectuant ensuite la construction connue qui consiste à diviser le rayon o' en

moyenne et extrême raison au point i', $a'i'$ sera le côté du décagone; le portant deux fois de a' en b', $a'b'$ sera le côté du pentagone demandé. Ayant ainsi construit le pentagone $a'b'c'd'e'$, nous reviendrons à ses projections sur les plans primitifs par des opérations inverses des précédentes : ainsi nous passerons du système L″T″ au système L′T′ par un changement de plan vertical, puis nous ferons tourner le plan P′ autour de l'axe A en sens contraire de celui marqué par la flèche et d'un angle égal à φ dont il avait tourné dans la première opération.

Ainsi, par exemple, le point b' se projette horizontalement en b'^h sur L′T′; on a donc sa projection verticale b'^v en prenant $\beta b'^v = b'^h b'$ sur une perpendiculaire à LT abaissée du point b'^h. Si l'on ramène ensuite le plan P′ dans sa position primitive P, le point b' se mouvra parallèlement au plan vertical de projection, et viendra se placer sur une verticale B du plan P, dont la projection horizontale B^h doit passer par le point b'^h; on connaît donc aussi B^v; cela posé, la projection verticale b^v doit se trouver à la fois sur B^v et sur un arc de cercle décrit du centre n^v et du rayon $n^v b'^v$, elle est donc connue et fait connaître le point b^h qui doit être situé sur B^h. On trouvera de même les projections des autres sommets du pentagone, et en les unissant par des droites on aura les projections du pentagone lui-même.

Si l'on avait voulu prendre le plan de la figure pour plan horizontal, il aurait fallu d'abord le ramener dans une position P′ perpendiculaire au plan vertical par un mouvement de rotation autour d'un axe vertical; et l'on aurait pris ensuite ce plan P′ pour plan horizontal de projection, sa trace verticale $V^{p'}$ devenant la nouvelle ligne de terre.

80. Prolème 29. *Trouver le centre et le rayon du cercle circonscrit à un triangle donné* (*fig.* 72). Nous construisons d'abord les traces du plan P sur lequel est situé le triangle donné abc (n° 32), puis nous rabattrons le plan P sur le plan horizontal pour pouvoir effectuer les constructions nécessaires à la résolution du problème, en employant, par exemple, la quatrième méthode (n° 76), c'est-à-dire deux mouvements de rotation. Nous rendrons d'abord le plan P perpendiculaire au plan vertical par un premier mouvement de rotation autour d'un axe vertical A, la trace H^p décrit un angle φ, les points a, b, c doivent donc décrire le même angle φ, c'est pourquoi du point n (point en lequel la ligne de terre LT est coupée par le plan P) comme centre et avec le rayon na^h, nb^h, nc^h nous décrirons des cercles sur chacun desquels nous porterons à partir des points a^h, b^h, c^h des longueurs d'arcs mesurant un angle égal à l'angle φ, et nous aurons ainsi les projections a'^h, b'^h, c'^h; les projections verticales conservent les mêmes hauteurs au-dessus de LT et se trouvent toutes sur $V^{p'}$, ce qui sert à vérifier l'exactitude des constructions. Faisant ensuite tourner le plan P′ autour de $H^{p'}$ pour le rabattre sur le plan horizontal,

les projections verticales viendront se placer sur LT en a'''^v, b'''^v, c'''^v et les points a'', b'', c'' sur des parallèles à LT menées respectivement par les points a'^h, b'^h, c'^h. Cela fait, nous construirons le centre o'' et le rayon $o''a''$ du cercle circonscrit Δ au triangle $a''b''c''$; ensuite, pour avoir les projections, sur les plans primitifs, nous effectuerons des rotations égales aux précédentes, mais en sens inverse; le point o'' viendra d'abord en o' par sa rotation autour de $H^{p\prime}$, puis en o par sa rotation autour de l'axe A, et nous aurons les projections $o^h a^h$ et $o^v a^v$ du rayon du cercle Δ.

Si l'on avait voulu rabattre le plan P sur le plan vertical, en le faisant tourner autour de sa trace verticale, il aurait d'abord fallu rendre cette trace perpendiculaire au plan horizontal par un premier mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical.

CHAPITRE III.

PROBLÈMES SUR LE POINT, LA DROITE ET LE PLAN.

Droites et plans perpendiculaires entre eux.

81. Les projections d'une droite perpendiculaire à un plan sont respectivement perpendiculaires aux traces de ce plan. En effet, en prenant pour nouveau plan vertical de projection le plan projetant horizontalement la droite, la ligne de terre coïncidera avec D^h et la trace H^p devra lui être perpendiculaire (n° 33, 4°), on verra de même que D^v et V^p doivent être perpendiculaires entre elles. On peut aussi démontrer facilement ce théorème au moyen d'un mouvement de rotation, car si l'on fait tourner le système autour d'un axe vertical, jusqu'à ce que le plan P soit devenu perpendiculaire au plan vertical, alors la droite D sera parallèle à ce même plan, donc D^h sera parallèle et H^p perpendiculaire à LT, donc enfin D^h et H^p seront des droites perpendiculaires entre elles. En faisant tourner le système autour d'un

axe perpendiculaire au plan vertical, jusqu'à ce que le plan P soit devenu perpendiculaire au plan horizontal, on démontrera que D^v et V^r sont des droites perpendiculaires entre elles. Au reste cette démonstration revient à la précédente (n° 68). Il sera facile d'en exécuter l'épure ainsi que celle de la première.

82. Problème 1. *Par un point donné* p, *mener une ligne perpendiculaire à un plan donné*. Par les projections du point donné p, il suffira d'abaisser des perpendiculaires sur les traces du plan donné. Mais si le plan n'est pas donné par ses traces, ou que celles-ci se trouvent situées au delà des limites du dessin, on devra opérer comme il suit. Soit le plan (A, B), déterminé par deux droites A et B se coupant en un point (*fig.* 73); je mène dans ce plan une horizontale quelconque G, sa projection verticale G^v est parallèle à LT et coupe A^v et B^v aux points a^v et b^v, projections verticales des points a et b en lesquelles les droites A et B sont coupées par l'horizontale G, et l'on déduit immédiatement les projections horizontales a^h et b^h, et, par suite, G^h; et comme G^h est parallèle à la trace horizontale du plan (A, B), abaissant de p^h une perpendiculaire sur G^h, ce sera la projection N^h de la normale demandée. Menant de même une verticale K du plan (A, B) on en conclura N^v. Enfin, si aucune horizontale, ni aucune verticale du plan, n'a ses deux projections dans les limites du dessin, il faut changer de plans de projection, et l'on pourra, par exemple, prendre d'abord pour nouveau plan horizontal le plan projetant verticalement l'une des droites A, puis choisir un nouveau plan vertical passant par la droite B, de sorte que les droites A et B sont alors les traces du plan donné sur les nouveaux plans de projection; on leur abaissera donc des perpendiculaires par les nouvelles projections du point donné p, et l'on repassera des projections de cette normale sur les nouveaux plans à ses projections sur les plans primitifs.

83. Problème 2. *Par un point donné* m *mener un plan perpendiculaire à une droite donnée* D (*fig.* 74). Par le point m passe une horizontale K du plan cherché P, sa projection horizontale doit être parallèle à la trace horizontale de ce plan P, et par conséquent perpendiculaire à D^h. La trace verticale a de cette horizontale K sera un point de la trace verticale V^r du plan P, laquelle doit être perpendiculaire à D^v, et si, par le point p, où V^r rencontre LT, on abaisse une perpendiculaire sur D^h, on aura H^r. Si V^r ne rencontre pas LT dans les limites du dessin, on déterminera directement un point de H^r en faisant passer par le point m une verticale G du plan P. Il peut arriver que les traces de ces deux droites K et G soient hors des limites du dessin; dans ce cas on peut d'abord remarquer qu'elles déterminent suffisamment le plan cherché, sans qu'il soit nécessaire de construire ses traces; mais toutefois on peut avoir les parties de ces traces existant dans les limites du dessin; car on pourra, à l'aide de l'horizontale K et de la verticale G passant par le point m, déterminer une infinité d'autres droites situées dans le plan cher-

ché, en unissant deux points quelconques k et g pris respectivement sur chacune de ces deux droites K et G, l'un de ces points pouvant être à une distance infinie, ce qui veut dire que la droite qui unit les deux points k et g peut être parallèle à la droite K si c'est le point k qui est supposé situé à l'infini sur la droite K et *vise versâ* pour la droite G.

84. Problème 3. *Par une droite donnée, mener un plan perpendiculaire à un plan donné.* Soient D la droite donnée et P le plan donné, si par un point quelconque de D, on abaisse une perpendiculaire N sur le plan P, elle ne sortira pas du plan cherché, donc ce plan sera déterminé par les deux droites D et N (n° 31).

Si la droite D était elle-même perpendiculaire au plan P, on n'aurait plus qu'une seule droite, puisque les deux droites D et N se confondraient. On sait que tout plan P, mené par une droite D perpendiculaire à un plan Q, est perpendiculaire à ce plan Q; mais dans ce cas les projections D^v et D^h de la droite donnée D seraient respectivement perpendiculaires aux traces V^p et H^p du plan donné P. Il en serait de même si, au lieu de donner une droite D, on donnait un point.

85. Problème 4. *Par un point donné, mener une droite perpendiculaire à une droite donnée.* Si le point donné est hors de la droite, on sait que par un tel point on ne peut abaisser qu'une seule perpendiculaire sur la droite, et le problème peut se résoudre de plusieurs manières.

1° La droite donnée D (*fig.* 75) et le point donné m déterminent un plan (D, m) (n° 27), que l'on peut prendre pour l'un des plans de projection, ou que l'on peut rabattre sur un des plans de projection dont LT est la ligne de terre, en employant l'une des quatre méthodes (n° 76); nous choisirons la seconde en supposant que l'on rabatte le plan (D, m) sur le plan horizontal; pour cela il faut prendre d'abord un nouveau plan vertical perpendiculaire au plan (D, m), de telle sorte que L'T' soit perpendiculaire à la trace horizontale de ce plan (D, m); il n'est pourtant pas nécessaire de construire cette trace, il suffit de mener par le point m une horizontale K du plan (D, m), telle que K^v passe par m^v et soit parallèle à LT; la droite K^v rencontre D^v en un point b^v d'où l'on déduit b^h, qui doit se trouver sur D^h; puis joignant b^h avec m^h on aura la projection K^h, à laquelle L'T' doit être perpendiculaire; pour plus de simplicité nous choisirons le nouveau plan vertical passant par le point m; comme ce point m et la droite D sont sur un plan perpendiculaire au nouveau plan vertical de projection, leurs projections verticales m et $D^{v'}$ se trouvent sur une même droite qui est en même temps la trace verticale V'^p du plan P ou (D, m). Quant à H^p, elle doit être perpendiculaire à L'T', et peut toujours se trouver dans les limites du dessin en plaçant convenablement la nouvelle ligne de terre. Si l'on fait ensuite tourner le plan P autour de H^p, la droite D et le point m se rabattront sur le plan horizontal de projection en D' et m'; nous abaisserons de m' sur D' la perpendi-

culaire N′, coupant D′ au point p'. En ramenant ce point p' sur la position primitive de la droite D, nous en obtiendrons les projections p^h et p^v. Joignant les projections des points m et p par des droites, ce seront les projections de la perpendiculaire demandée. On aurait pu prendre V′ʳ pour nouvelle ligne de terre, et employer la première méthode (n° 76); on pouvait aussi opérer par l'une des deux dernières méthodes. Remarquons que la méthode que je viens de suivre est plus simple que celle que l'on trouve ordinairement dans les traités de géométrie descriptive, car dans la solution que l'on donne habituellement on est obligé de mener une droite par le point m, qui coupe D ou qui lui soit parallèle, et de plus on doit chercher les deux traces du plan déterminé par ces deux droites avant d'effectuer le rabattement.

2° La droite cherchée N coupe D en un point p par lequel on pourrait mener une seconde droite N′ perpendiculaire à D, alors le plan (N, N′) sera lui-même perpendiculaire à la droite D et la coupera en le point p. On est donc conduit à mener par le point m un plan perpendiculaire à D (n° 83), à chercher l'intersection p de ce plan et de la droite D, puis joignant ce point d'intersection p avec le point donné m, on aura la droite demandée. Mais cette méthode, que l'on trouve souvent exposée *seule* dans les traités, exige la résolution d'un problème appartenant à une série de questions qui seront résolues plus loin, tandis que le problème qui nous occupe trouve naturellement sa place au point où nous en sommes arrivés; la première solution est donc celle qui lui convient réellement, elle a, en outre, l'avantage de fournir une nouvelle application de nos principes fondamentaux, et de donner ainsi une nouvelle preuve de leur généralité.

86. Problème 5. *Étant donnée la projection horizontale d'une droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné sur cette droite, trouver sa projection verticale* (*fig.* 76).

Dans ce problème, le point donné étant sur la droite donnée, on pourra par ce point mener une infinité de perpendiculaires à la droite, mais parmi toutes ces perpendiculaires, on peut se proposer de construire celle qui a déjà une projection horizontale donnée. Soient donc D la droite donnée et N^h la projection horizontale de la perpendiculaire N à la droite D et menée par un point m de cette droite D; la droite N est dans un plan P mené perpendiculairement à la droite D au point m; ayant donc construit les traces de ce plan (n° 83), nous serons conduits à chercher la projection verticale d'une droite dont on connaît la projection horizontale (n° 28) située dans un plan dont on connaît les traces.

Intersection des droites et des plans.

87. Une surface est en général engendrée par une ligne qui se meut dans l'es-

pace suivant une loi donnée. Une surface a généralement deux faces, une face extérieure et une face intérieure; on les considère indistinctement en géométrie descriptive; dans les arts il faut les distinguer et les considérer séparément (*).

88. Deux surfaces S et S' se coupent suivant une ligne qu'on ne peut pas toujours obtenir immédiatement par la seule considération de la génération particulière à ces deux surfaces; on est dès lors obligé, dans presque tous les cas, de la déterminer par points. Pour cela on prend une série de surfaces auxiliaires; chacune d'elles coupe la surface S suivant une ligne C, et la surface S' suivant une ligne C'; ces deux lignes situées sur la même surface auxiliaire Σ se couperont en un point *m* appartenant à l'intersection cherchée des surfaces S et S'. Il faut, dans chaque cas, choisir la surface auxiliaire Σ, quant à sa nature et à sa position par rapport aux plans de projection et aux deux surfaces données S et S', de manière que les projections de ses intersections avec les surfaces données S et S' s'obtiennent plus facilement que celles de l'intersection de ces surfaces S et S' elles-mêmes (**). Lorsque les surfaces S et S' sont des plans, il est évident que les surfaces auxiliaires Σ doivent aussi être des plans.

On doit choisir ces plans auxiliaires :

1° De manière que leurs traces coupent, dans les limites du dessin, les traces des plans donnés; parce que l'on connaît *immédiatement* les projections C^h et C^v de la droite C, intersection de deux plans S et Σ dont les traces horizontales et verticales se coupent dans les limites du dessin.

2° De manière que les intersections du plan auxiliaire avec les plans donnés se coupent elles-mêmes dans les limites du dessin.

89. Problème 6. *Trouver l'intersection* I *de deux plans dont les traces se coupent dans les limites du dessin.* Il est évident que les points *a* et *b* intersection des traces des plans donnés (*fig.* 77) appartiennent à cette intersection I et en sont les traces (n° 28). Il sera donc facile, dans ce cas, de trouver les projections de la droite d'intersection I des deux plans donnés (n° 14).

(*) Tout *relief* est terminé par une surface S dont on ne voit qu'une des faces, la face externe, pour obtenir la face interne, il faut mouler le relief, alors le moule ou *creux* est terminé par la face interne de la surface S.

(**) Autant que possible il faut choisir la surface auxiliaire Σ telle que l'on puisse *immédiatement* tracer les projections de ses intersections respectives C et C' avec les surfaces données S et S'. Il faut donc que ces courbes C et C' soient des lignes dont on connaisse d'avance les projections C^v, C^h — C'^v, C'^h comme courbes géométriques et que l'on projette dès lors sur les deux plans de projection, en construisant *graphiquement* les courbes C^v, C^h — C'^v, C'^h, au moyen de certaines propriétés géométriques qui leur appartiennent et qui sont connues d'avance en vertu de la nature géométrique des surfaces données S et S' et de la surface auxiliaire Σ; on considérera donc ces courbes comme des courbes planes, sans s'occuper si elles sont ou non les projections de certaines courbes de l'espace.

90. Problème 7. *Trouver l'intersection* I *de deux plans* P *et* Q, *dont les traces horizontales sont parallèles.* Le point *b* où se coupent les traces verticales des plans P et Q (*fig.* 78) est évidemment la trace verticale de cette intersection I, I^h passe donc par b^h et doit rencontrer H^p et H^q à leur point d'intersection *a* qui est situé à l'infini, puisque ces traces H^p et H^q sont parallèles, donc elle leur est parallèle; I^v doit passer par le point *b* et couper LT à l'infini, *lieu* où se trouve situé le point a^v, donc I^v est parallèle à LT. D'ailleurs I^h étant parallèle à H^p, la droite est une horizontale du plan P sur lequel elle est située, donc I^v doit être parallèle à LT. Enfin on voit *à priori* que l'intersection I doit être horizontale, sans quoi elle percerait le plan horizontal en un point *a* commun à H^p et à H^q, et ces traces ne seraient plus dès lors parallèles entre elles. De même l'intersection de deux plans, dont les traces verticales sont parallèles, est parallèle au plan vertical.

91. Problème 8. *Trouver l'intersection* I *de deux plans dont les traces se confondent en une seule droite.* Les deux traces *a* et *b* (*fig.* 79) de cette intersection étant confondues en un seul point, il en résulte évidemment que l'intersection I est située dans un plan perpendiculaire à LT; ses projections sont donc toutes deux perpendiculaires à LT, et l'on connaît en même temps deux points, qui sont les points *a* et *b*. Remarquons que cette droite I fait des angles égaux avec les plans de projection, car elle forme avec ses deux projections un triangle isocèle.

92. Problème 9. *Trouver l'intersection* I *de deux plans* P *et* Q, *dont les traces horizontales ne se coupent qu'au delà des limites du dessin.* Deux plans parallèles sont coupés par un troisième plan suivant des droites parallèles, si donc on construit un plan X (*fig.* 80) parallèle au plan Q, son intersection K avec le plan P sera parallèle à l'intersection I des deux plans P et Q; or, on connaît un point *b* de cette intersection I, il faut donc mener par b^h une parallèle à K^h, et par le point *b* une parallèle à K^v (n° 24), et l'on aura les projections I^h et I^v de l'intersection I demandée.

93. Problème 10. *Trouver l'intersection* I *de deux plans* P *et* Q, *dont les quatre traces se croisent au même point* a *de la ligne de terre.* Le plan auxiliaire X (*fig.* 81) doit être choisi de manière que les intersections de H^x et V^x avec H^p et H^q et avec V^p et V^q se fassent à peu près à angle droit ou tout au moins sous un angle égal à 45°. Ce plan X coupe les plans P et Q, suivant deux droites A et B qui se rencontrent en un point *m* appartenant à l'intersection I cherchée; il est d'ailleurs évident que cette intersection I passe par le point *a*, donc elle est entièrement déterminée par ces deux points.

94. A l'occasion de ce problème, nous dirons que sous le point de vue géométrique, quelle que soit la position du plan auxiliaire, il en donnera toujours la solution, mais il n'en est pas de même sous le point de vue graphique. Les lignes de la figure

ne sont pas des lignes mathématiques, il faut donc les diriger de manière que leur intersection ne laisse pas d'incertitude, condition d'autant mieux remplie que les droites qui se coupent font entre elles un angle plus près de l'angle droit. (Dans les constructions graphiques, un point est considéré comme étant déterminé d'une manière suffisamment rigoureuse lorsque les deux droites, qui en se coupant donnent ce point, font entre elles un angle au moins égal à un demi-droit.)

95. PROBLÈME 11. *Trouver l'intersection* I *de deux plans* P *et* Q, *parallèles à la ligne de terre.* Nous prendrons le plan auxiliaire perpendiculaire à LT (*fig.* 82), ce sera par conséquent un nouveau plan vertical de projection sur lequel nous trouverons les traces V'^p et V'^q, et comme les deux plans P et Q sont perpendiculaires à ce nouveau plan vertical, leur intersection lui est elle-même perpendiculaire; elle se projette donc tout entière en un point $I^{v'}$, et sa projection horizontale I^h sera perpendiculaire à LT' ou parallèle à LT; d'ailleurs la droite I est parallèle à LT et située au-dessus du plan horizontal à une hauteur égale à $c^hI^{v'}$; prenant donc $oc^v = c^hI^{v'}$, nous aurons un point de la seconde projection I^v, laquelle doit aussi être parallèle à LT. On aurait pu de même considérer le plan auxiliaire comme un nouveau plan horizontal de projection, et chercher alors H'^p et H'^q.

96. PROBLÈME. 12. *Trouver l'intersection* I *de deux plans* P *et* Q, *dont aucunes traces ne se coupent dans les limites du dessin.* Nous allons donner de ce problème plusieurs solutions.

1° On peut le résoudre comme il suit: menons un plan Q' (*fig.* 83) parallèle au plan Q, et construisons son intersection I' avec le plan P; concevons les traces V^p et V^q prolongées jusqu'à ce qu'elles se coupent en b, et imaginons la verticale bb^h, les triangles pbq et $pb'q'$, pbb^h et $pb'b'^h$, pba^v et $pb'a'^v$ sont semblables et donnent $pb' : pb :: pq' : pq$ et $pb' : pb :: pb'^h : pb^h$ et $pb' : pb :: pa'^v : pa^v$, et éliminant pb entre ces proportions, il vient $pq' : pq :: pb'^h : pb^h$ et $pq' : pq :: pa'^v : pa^v$; donc on trouvera, par ces quatrièmes proportionnelles, un point b^h de I^h et un point a^v de I^v; d'ailleurs cette intersection I est parallèle à I', donc elle est connue. On peut aussi suppléer à la construction des quatrièmes proportionnelles par l'emploi de nouveaux plans auxiliaires, comme dans les méthodes suivantes.

2° Menons un plan auxiliaire quelconque X (*fig.* 84), il coupera le plan P suivant une droite A, et le plan Q suivant une droite B, ces deux droites A et B étant dans le plan X se coupent en un point m, qui appartient à l'intersection I des deux plans P et Q; à l'aide d'un second plan auxiliaire Y, coupant le plan P suivant une droite C, et le plan Q suivant une droite D, on trouvera un second point n de cette intersection I, qui par là sera complétement déterminée. Mais il est facile de reconnaître que l'emploi de plans auxiliaires quelconques ne donnera pas toujours des points de l'intersection I des plans P et Q.

3° Si l'on prend un plan auxiliaire X (*fig.* 85) parallèle au plan horizontal, il coupera les plans P et Q suivant des horizontales A et B de ces plans; ces deux horizontales se rencontreront en un point *m* qui appartient à l'intersection I cherchée. Si l'on prend ensuite un second plan auxiliaire Y parallèle au plan vertical de projection, il coupera les plans P et Q suivant des verticales D et E de ces plans; ces droites se rencontreront aussi en un point *n* de l'intersection I demandée; joignant les points *m* et *n*, on aura l'intersection I des plans P et Q.

Remarquons qu'en prenant les plans X et Y le plus loin possible de la ligne de terre, les intersections auxiliaires se couperont en des points qui se rapprocheront de la ligne de terre; si donc il arrivait que les points *m* et *n* de notre figure actuelle sortissent encore des limites du dessin, il faudrait avoir recours à un autre procédé que nous expliquerons prochainement (n° 97).

4° On peut encore choisir le plan auxiliaire parallèle à la ligne de terre, tel que X (*fig.* 86); il coupe les plans P et Q, suivant deux droites A et A′ dont les projections horizontales se croisent au point a^h appartenant à I^h; il est évident que les projections verticales ne se rencontreraient qu'au delà des limites du dessin, c'est pourquoi je ne les construis pas; un autre plan X′ donnera deux nouvelles intersections B et B′ fournissant un second point b^h de I^h, qui est ainsi déterminé. En choisissant maintenant deux nouveaux plans Y et Y′ dont les traces horizontales soient très-éloignées de LT, ils couperont respectivement les plans P et Q suivant des droites D et D′, et E et E′ dont les projections verticales se rencontrent dans les limites du dessin, et fournissent deux points, d^v et e^v de I^v, qui est ainsi déterminée; on a donc trouvé l'intersection I des plans P et Q.

97. Problème 13. *Trouver l'intersection de deux plans dont les traces font, avec la ligne de terre, des angles presque droits* (*fig.* 87). Soient les deux plans P et Q, il est facile de reconnaître que dans ce cas les plans auxiliaires précédents ne conduiraient plus à la solution du problème, car un plan parallèle au plan vertical couperait les plans P et Q, suivant des verticales qui ne se rencontreraient pas dans les limites du dessin, ce qui tient à ce que les plans P et Q ne se coupent qu'à une très-grande distance. Mais la partie de cette intersection qui avoisine sa trace horizontale se projette verticalement aux environs de la ligne de terre; si donc on choisit un plan auxiliaire passant par LT et très-peu incliné sur le plan horizontal, il coupera les plans P et Q suivant des droites, dont les projections verticales s'éloigneront très-lentement de la ligne de terre, et par conséquent se couperont dans les limites du dessin, ce qui fournira un point de la projection verticale de l'intersection demandée; en répétant une seconde fois cette construction, on obtiendra un second point de l'intersection, et la projection verticale sera déterminée. On aura de même la projection horizontale en conduisant par la ligne de

terre deux plans faisant un très-petit angle avec le plan vertical. Exécutons ces constructions.

Considérons d'abord un plan X déterminé par LT et par un point x situé très-près du plan horizontal, et aussi loin du plan vertical que les dimensions du dessin peuvent le permettre; il coupe les plans P et Q suivant des droites passant évidemment par les points p et q, en lesquels les plans P et Q coupent LT; pour avoir un second point de chacune d'elles, nous prendrons un autre plan auxiliaire R, parallèle au plan vertical et passant par le point x; il coupe évidemment le plan X, suivant une droite A parallèle à la ligne de terre, et les plans P et Q suivant des verticales B et C de ces plans. A^v et B^v se croisant en un point a^v qui appartient à la projection verticale D^v de l'intersection D des deux plans P et X, car le point a se trouve à la fois sur les deux droites A et B situées respectivement sur ces plans P et X; par une raison semblable les droites A^v et C^v se croisent en un point b^v, qui appartient à la projection verticale E^v de l'intersection E des deux plans Q et X. Les droites D et E étant dans le même plan X, se rencontrent en un point m dont on connaît la projection verticale m^v, et qui appartient à l'intersection I des plans P et Q, puisque les droites D et E appartiennent respectivement à chacun de ces deux plans P et Q. Il est évident que cette construction ne peut donner aucun point de I^h, c'est pourquoi je n'ai pas écrit sur la figure les projections horizontales D^h et E^h des intersections D et E des plans P et Q avec le plan X. Nous aurons un second point de I^v à l'aide du plan X' mené par LT et par le point x', que nous choisissons pour plus de simplicité, ayant même projection horizontale que le point x précédent; le plan R le coupe suivant la droite A', et l'on obtient les intersections D' et E' de ce plan avec les plans P et Q; enfin ces droites D' et E' déterminent la projection verticale m'^v d'un point m' de l'intersection I, intersection dont la projection verticale I^v est maintenant tout à fait déterminée. Pour avoir la projection horizontale I^h de l'intersection I des deux plans donnés P et Q, nous ferons passer un plan Y par LT et par un point y choisi très-près du plan vertical, et aussi loin du plan horizontal que les dimensions du dessin peuvent le permettre; il coupe les plans P et Q suivant des droites G et K, que l'on obtiendra comme précédemment par le secours d'un plan R' parallèle au plan horizontal; les projections horizontales G^h et K^h, les seules que je construise ici, parce que les projections verticales ne peuvent évidemment rien fournir, se croisent en un point n^h, qui est la projection horizontale d'un point n de l'intersection I; on trouvera un second point n'^h de I^h par l'emploi d'un plan Y' mené par LT et par un point y'. L'intersection I des plans P et Q est ainsi entièrement déterminée.

98. On pourrait se proposer encore beaucoup d'autres cas que l'on résoudrait

facilement à l'aide des méthodes employées dans les exemples précédents. Ainsi on peut chercher l'intersection de deux plans, l'un parallèle à la ligne de terre, l'autre dont les traces se confondent en une seule droite, etc., etc. (*).

99. Problème 14. *Trouver l'intersection de deux plans donnés par leur trace horizontale et un point* (*fig.* 88). Soient les plans P et Q donnés par les traces H^p et H^q et chacun par l'un des deux points *p* et *q*.

1° On pourrait construire les traces verticales V^p et V^q en menant par le point *p* une horizontale du plan P qui ferait connaître un point de V^p, et par le point *q* une horizontale du plan Q, qui donnerait un point de V^q. On pourrait mener par les points *p* et *q* des verticales des plans P et Q, alors V^p et V^q seraient respectivement parallèles aux projections verticales de ces droites. Enfin on pourrait employer des droites quelconques, menées des points *p* et *q* et respectivement à un point de H^p et de H^q. On rentrerait ainsi dans les cas précédents.

2° Mais on peut aussi résoudre directement le problème sur les données actuelles. Pour cela joignons les points *p* et *q* par une droite D, qui rencontre le plan horizontal en *d*, puis menons par cette droite un point quelconque X, et l'on peut choisir pour plan auxiliaire X le plan projetant horizontalement la droite D, ce plan X coupe le plan P suivant une droite B passant par le point *p*, et le plan Q suivant une droite C passant par le point *q*; ces droites B et C se coupent en un point *m* appartenant à l'intersection I cherchée, le point d'intersection *a* des traces H^p et H^q en est un second point, donc cette intersection I est connue.

3° La construction précédente est la plus simple, elle suffit pour trouver l'intersection demandée, mais nous pouvons choisir un plan X (*fig.* 89) quelconque. Le plan X devant, dans tous les cas, contenir la droite D, sa trace horizontale doit

---

(*) Lorsque deux plans P et Q sont tels qu'après le rabattement du plan vertical de projection sur le plan horizontal, les traces V^p et H^p se confondent en une seule ligne P_1, et que de même les traces V^q et H^q se confondent en une seule ligne Q_1; alors les plans P et Q sont tous deux perpendiculaires au plan B bisecteur des angles dièdres $\widehat{S.P}$ et $\widehat{I.A}$.

Les deux plans P et Q se coupent dans ce cas suivant une droite I perpendiculaire au plan B; dès lors I^h et I^v se confondent en une seule ligne I_1 perpendiculaire à la ligne de terre LT, et la droite I de l'espèce fait des angles égaux entre eux et à un demi-droit avec les plans de projection.

De même, si les deux plans donnés P et Q sont tels que leurs traces V^p et H^q fassent des angles égaux α avec la ligne de terre LT et avec la même portion de cette ligne, et que les traces V^q et H^p fassent aussi des angles égaux 6 avec la même portion de LT, l'un de ces angles étant en dessus et l'autre en dessous de LT, alors les deux plans P et Q sont perpendiculaires au plan B' bisecteur des angles dièdres $\widehat{A.S}$ et $\widehat{P.I}$.

Dans ce cas, la droite I intersection des deux plans P et Q est une perpendiculaire au plan bissecteur B' et ses projections I^h et I^v se confondent en une seule ligne I_1 perpendiculaire à LT, la droite I fait alors des angles égaux entre eux et à un demi-droit avec les plans de projection.

contenir la trace horizontale de cette droite; c'est d'ailleurs la seule condition à laquelle cette trace doive satisfaire; nous pourrons donc par le point d mener une droite quelconque, et la considérer comme la trace H^x d'un plan auxiliaire X. Par les mêmes opérations que dans le cas précédent, ce plan X donnera un point m de l'intersection I. Un autre plan X' donnera un second point m' de cette intersection I, qui sera ainsi déterminée.

4° Si le point d était hors des limites du dessin, on pourrait encore trouver l'intersection I par les constructions de la *fig.* 88. Si le point a était hors des limites du dessin, on pourrait encore employer les constructions de la *fig.* 89. Mais si les points a et d sortaient l'un et l'autre des limites du dessin, on ne pourrait plus trouver l'intersection I par les méthodes précédentes. Dans ce cas, concevons par les points p et q (*fig.* 90) deux plans X et X', parallèles au plan vertical, ils seront coupés par le plan P suivant deux droites A et A' parallèles entre elles; or l'une d'elles, l'intersection des plans X et P, doit passer par les points a et p, l'autre doit passer par le point a', donc ces droites A et A' sont connues; de même les plans X et X' sont coupés par le plan Q suivant deux droites B et B', parallèles entre elles, dont l'une, l'intersection des plans X' et Q, doit passer par les points b' et q; et l'autre par le point b, donc ces intersections B et B' sont connues; mais les droites A et B, étant situées dans le même plan X, se coupent en un point m qui appartient à l'intersection I cherchée, de même A' et B' se coupent en un second point m' de cette intersection I, qui est ainsi déterminée. Il est évident que les constructions resteraient exactement les mêmes si l'on conduisait par les points p et q deux plans verticaux quelconques, mais parallèles entre eux, car il n'est pas absolument nécessaire que les plans auxiliaires X et X' soient parallèles au plan vertical de projection, on serait même obligé de les prendre dans une autre direction si les points p et q étaient à la même distance du plan vertical de projection; mais on peut aussi ramener ce cas à l'un des précédents par un changement de plan vertical de projection. On ne pourrait pas employer un changement de plan horizontal de projection, parce qu'on n'aurait plus alors les données d'après lesquelles on désire résoudre le problème.

100. Problème 15. *Trouver l'intersection de deux plans donnés par leur ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal* (*fig.* 91). Soient P et Q les lignes de plus grande pente des deux plans P_1 et Q_1.

1° Prenons pour plan auxiliaire un plan horizontal X, qui coupera les droites P et Q aux points p et q (n° 56, 2°), et par suite les plans donnés P_1 et Q_1 suivant des horizontales A et B passant respectivement par ces points p et q; mais P^h est perpendiculaire à H^{p_1} (n° 37), et par conséquent à A^h (n° 36); de même Q^h est perpendiculaire à B^h; ces horizontales sont donc entièrement connues, et comme elles

sont dans le même plan X, elle se coupent en un point m de l'intersection I des deux plans P_1 et Q_1. Un second plan horizontal X' fera connaître un autre point m' de l'intersection demandée I; donc enfin cette intersection I est déterminée.

2° Si les droites P^h et Q^h sont parallèles (*fig.* 92), les droites A^h et B^h le sont aussi et ne donnent plus de point de l'intersection I demandée; mais alors cette droite cherchée I est horizontale (n° 90), et l'on en trouve un point comme il suit. Coupons les plans donnés, P_1 et Q_1, par deux plans horizontaux X et X', qui donnent les horizontales A et B, A' et B' des plans P_1 et Q_1; prenons deux points quelconques a et b sur A et B, et lions-les par la droite C, puis plaçons sur A' et B' une droite C' parallèle à C, nous pourrons considérer C et C' comme des horizontales d'un troisième plan coupant le plan P_1 suivant la droite D, et le plan Q_1 suivant la droite E; les deux droites D et E se coupent elles-mêmes en un point x appartenant à l'intersection I, nous aurons donc I^h en menant par x^h une perpendiculaire sur P^h et Q^h. Je n'ai pas construit les projections verticales des droites D et E et du point x; pour avoir I^v, je remarque que cette intersection rencontre nécessairement les droites P et Q en des points dont nous avons les projections y^h et z^h; on en conclut facilement y^v et z^v, qui déterminent I^v; il faut, de plus, que cette projection I^v soit parallèle à LT.

101. Problème 16. *Trouver l'intersection de deux plans donnés par leurs traces horizontales et les angles qu'ils font avec le plan horizontal* (*fig.* 93). Il est évident, par un théorème connu de géométrie élémentaire, que si un plan est perpendiculaire au plan vertical de projection, l'angle qu'il fait avec le plan horizontal est mesuré par l'angle que fait sa trace vertical avec la ligne de terre; prenant donc un plan vertical perpendiculaire au plan P, la trace V'^p de ce plan fera avec la ligne de terre L'T' l'angle donné α; prenant de même un plan vertical perpendiculaire au plan Q, la trace V''^q de ce plan fera, avec la ligne de terre L''T'', l'angle donné β. Comme les deux plans P et Q sont ainsi rapportés au même plan horizontal et à des plans verticaux différents, on pourrait changer, par rapport à chacun d'eux, de plan vertical, et trouver leur trace V^p et V^q (n° 47) sur un même plan vertical LT; mais cela n'est pas nécessaire, car si l'on conçoit un plan horizontal X, ses traces, sur les deux plans verticaux, seront parallèles à L'T' et à L''T'' et également distantes de ces deux lignes de terre; ce plan X coupe les plans P et Q suivant les deux horizontales A et B, et ces deux droites se coupent elles-mêmes en un point m, dont nous avons la projection horizontale m^h par l'intersection de A^h et de B^h; donc joignant am^h, on aura la projection horizontale I^h de l'intersection I des plans P et Q. On en a en même temps les deux projections verticales $I^{v'}$ et $I^{v''}$; cette intersection I est donc déterminée.

102. On peut encore varier les données des plans en ne les supposant pas donnés

tous les deux de la même manière. Il sera facile, par ce qui précède, de voir quelle modification on devra, dans chaque cas, faire subir aux solutions que nous avons successivement exposées.

103. La géométrie plane, et la géométrie de l'espace, se prêtent des secours mutuels, de sorte que souvent des propriétés connues de la géométrie plane conduisent à la découverte de quelques propriétés de la géométrie de l'espace ; souvent aussi des propriétés connues de la géométrie de l'espace conduisent à des propriétés nouvelles de la géométrie plane; en géométrie descriptive, on emploie souvent ces sortes de constructions, que l'on exprime en disant : *Il faut savoir passer de l'espace sur le plan, et remonter du plan dans l'espace.* Par exemple, dans le problème 14 (n° 99, 3°), chaque plan auxiliaire X (*fig.* 39), donne un point m de l'intersection I, tous les points m ainsi obtenus seront donc sur une ligne droite; de sorte que si l'on considère seulement la projection horizontale, on verra que toutes les droites telles que B^h et C^h se coupent en des points tels que m^h, qui sont sur une même droite I^h passant par le point a, d'où l'on déduit ce théorème (*) :

Si l'on a trois droites D,P,Q (*fig.* 94) *qui se coupent deux à deux, et trois points* d,p,q *sur l'une d'elles*, D; *si par l'un de ses points* d, *on mène des transversales* $T_1T_2T_3$..... *coupant les droites* P *et* Q; *que l'on joigne les points en lesquels* P *est coupée, avec le point* p *par des droites* $B_1B_2B_3$..... *et les points en lesquels* Q *est coupée par les mêmes transversales avec le point* q *par des droites* $C_1C_2C_3$..... *les droites* B_1 *et* C_1, B_2 *et* C_2, B_3 *et* C_3..... *se coupent en des points* $m_1m_2m_3$..... *qui sont avec l'intersection* a *des droites* P *et* Q *sur une même droite* I.

Il est évident qu'on peut prendre les droites D,P,I pour les données, le point p pour origine des transversales $B_1B_2B_3$,..... coupant P et I aux points $b_1b_2b_3$,..... et $m_1m_2m_3$,..... et l'on en conclura que les points d'intersection des droites C_1 et T_1, C_2 et T_2, C_3 et T_3,..... sont en ligne droite avec le point a. On pourrait aussi donner les droites D,Q,I, le point q pour origine des transversales $C_1C_2C_3$,..... qui coupent les droites Q et I aux points $c_1c_2c_3$,..... et $m_1m_2m_3$,..... et l'on en conclura que les points d'intersection des droites B_1 et T_1, B_2 et T_2, B_3 et T_3..... sont sur une droite P passant par le point a.

(*) La plupart des théorèmes sur les transversales, quand il s'agit de *points de concours* et non de *rapports* entre les longueurs des parties interceptées, peuvent être résolues comme nous le faisons ici pour quelques-uns, soit par les considérations des projections de certains systèmes situés dans l'espace, soit par la solution graphique (ou en d'autres termes par la méthode des projections) de certaines questions relatives à des points, droites, plans et surfaces réglées formant un système situé dans l'espace.

104. L'un des trois points d,p,q peut être situé à l'infini, soit :

1° Le point d situé à l'infini; les transversales $T_1T_2T_3$..... sont, dans ce cas, parallèles à D;

Soit 2° le point p situé à l'infini; les transversales $B_1B_2B_3$..... sont parallèles à D;

Soit 3° le point q situé à l'infini; les transversales $C_1C_2C_3$..... sont alors parallèles à D.

Dans les trois cas on en conclut ce théorème, que nous appliquerons, pour plus de clarté, au premier cas (*fig.* 95) : *Si l'on a trois droites* D,P,Q, *qui se coupent deux à deux, et deux points* p *et* q *sur l'une d'elles* D; *si l'on mène une série de parallèles à cette droite et coupant les deux autres droites* P *et* Q, *que l'on joigne les points de* P *au point* p, *et les points de* Q *avec le point* q, *les droites* B_1 *et* C_1, B_2 *et* C_2..... *se croisent en des points* $m_1m_2m_3$,..... *qui sont, avec l'intersection* a *des droites* P *et* Q, *sur une même droite* I. Ce cas se déduit des *fig.* 86 et 87, en ne considérant que la construction exécutée sur le plan horizontal.

105. Si l'on prend D,P,I pour les droites données, le point p pour origine des transversales $B_1B_2B_3$,..... on en conclura que les points d'intersection des droites C_1 et T_1, C_2 et T_2, C_3 et T_3 sont sur une même droite avec le point a. Si l'on prend les droites D,Q,I et le point q pour origine des transversales $C_1C_2C_3$..... on trouvera que les droites B_1 et T_1, B_2 et T_2, B_3 et T_3..... se coupent en des points situés sur une droite passant par le point a. On pourra donc énoncer le théorème suivant.

Si l'on a trois droites D,P,I *et deux points* p *et* q *sur l'une d'elles* D; *que, par l'un de ces points* p, *on mène tant de transversales* $B_1B_2B_3$..... *que l'on voudra; que l'on joigne les points d'intersection de ces transversales et de la droite* I *avec le second point* q *de* D *par les droites* $C_1C_2C_3$.....; *que par les points d'intersection de ces mêmes transversales et de la droite* P, *on mène des parallèles* T_1T_2... *à la droite* D, *ces parallèles* T_1T_2..... *et les droites* C_1C_2..... *se coupent respectivement en des points situés sur une droite passant par le point d'intersection* a *des droites* P *et* I.

106. De ces propositions on peut déduire les réciproques suivantes :

1° *Si l'on a quatre droites* D, P, Q, I (*fig.* 94), *dont trois concourent au même point* a, *et coupent chacune la quatrième; que l'on joigne tous les points de l'une des premières* I *avec deux points* p *et* q, *pris sur la quatrième, les droites menées au point* p *couperont* P; *les droites menées au point* q *couperont* Q; *enfin, toutes les droites menées par les points* b_1 *et* c_1, b_2 *et* c_2, b_3 *et* c_3....... *ainsi obtenus vont couper la droite* D *au même point* d, *ou lui sont parallèles* (fig. 95).

Si l'on joignait les points de Q avec les points q et d, on trouverait de même que toutes les droites B_1 B_2 B_3..... concourent au même point p de la droite D. Si l'on

joignait les points de la droite P avec les points p et d, on trouverait que toutes les droites C_1 C_2 C_3..... concourent au même point q de la droite D.

2° *Si l'on a trois droites* P,Q,I *issues d'un même point* a *et un point* d *hors de ces droites; que du point* d *on mène deux transversales quelconques* T_1 *et* T_2 *coupant les droites* P *et* Q *respectivement aux points* b_1 *et* b_2, c_1 *et* c_2; *si l'on prend deux points quelconques* m_1 *et* m_2 *sur la troisième droite* T, *et qu'on les joigne aux points d'intersection précédents, les droites* B_1 *et* B_2 *se couperont en un point* p, *et les droites* C_1 *et* C_2 *en un point* q, *et les trois points* d, p, q *sont en ligne droite.*

Si l'on eût donné le point p, et mené les transversales B_1 et B_2, on aurait trouvé les deux points d et q en ligne droite avec le point p; de même, donnant le point q et menant les transversales C_1 et C_2, on trouvera les deux points d et p en ligne droite avec le point q.

3° *Si l'on a trois droites* P, Q, I (fig. 95) *concourant au même point* a, *et deux droites parallèles* T_1 *et* T_2, *coupant* P *et* Q *respectivement en* b_1 *et* b_2, c_1 *et* c_2; *que l'on joigne ces points avec deux points pris arbitrairement sur* I, *les droites* B_1 *et* B_2 *se couperont en un point* p, C_1 *et* C_2 *en un point* q, *et les deux points* p *et* q *sont sur une droite* D *parallèle à* T_1 *et* T_2.

107. *Si l'on a deux droites* P *et* Q (fig. 96), *qu'on les coupe par une série de transversales parallèles* T_1 T_2 T_3,..... *que par les points* b_1 b_2 b_3,..... c_1 c_2 c_3,..... *où ces transversales rencontrent* P *et* Q, *on mène deux séries de droites parallèles* B_1 B_2 B_3,..... C_1 C_2 C_3,..... *les droites* B_1 *et* C_1, B_2 *et* C_2, B_3 *et* C_3,..... *se couperont en des points* m_1 m_2 m_3,..... *qui seront en ligne droite avec le point* a, *intersection de* P *et* Q.

En effet, si l'on considère les droites P et Q comme les traces horizontales de deux plans et les transversales T_1..... comme les traces horizontales de plans auxiliaires parallèles, coupant les plans donnés suivant les droites B_1 et C_1,..... les points $m_1 m_2$..... intersection des droites B_1 et C_1, B_2 et C_2..... appartiendront, ainsi que le point a, à la projection horizontale de l'intersection I des deux plans donnés; tous ces points m_1..... seront donc situés sur une même droite.

108. On conclut évidemment de là ce théorème réciproque : *Si l'on a trois droites* P, Q, I, *concourant au point* a, *que par tous les points* m_1, m_2, m_3,..... *de l'une d'elles* I *on mène deux séries de droites parallèles* B_1, B_2, B_3,..... *et* C_1, C_2, C_3, *les premières couperont* P *et les secondes couperont* Q *en des points tels que les droites qui joindront* b_1 et c_1, b_2 et c_2, b_3 et c_3..... *seront toutes parallèles entre elles.*

109. PROBLÈME 17. *Étant données deux droites* P *et* Q *concourant en un point situé hors des limites du dessin et un point* m, *faire passer par* m *une droite qui concoure au même point que les droites* P *et* Q. On sait résoudre ce problème par les deux constructions suivantes :

1° Menons une droite quelconque T (*fig.* 97) coupant P et Q aux points *b* et *c*, joignons *bm* et *cm*, ces droites coupent respectivement Q et P aux points c_1 et b_1; unissons ces points par une droite T_1 rencontrant T au point *d*, par ce point menons une troisième droite T_2 coupant P et Q aux points b_2 et c_2, joignons b_1c_2 et b_2c_1, ces droites se coupent en un point *m*, appartenant à la droite demandée. En effet, considérons P, Q, T, comme les traces horizontales de trois plans passant par un même point de l'espace dont *m* serait la projection horizontale; B et C seront les projections horizontales des intersections du plan T avec les plans P et Q; considérant alors le point *c*, comme la projection horizontale d'un point du plan P et b_1 comme celle d'un point du plan Q, enfin T, comme la trace horizontale d'un second plan auxiliaire, il coupera les plans P et Q suivant des droites dont B_1 et C_1 sont les projections horizontales, et par suite m_1 serait la projection horizontale d'un second point de l'intersection des plans P et Q.

On pourrait par le point *d* mener tant d'autres transversales que l'on voudrait, et continuant la même construction on obtiendrait une série de points m, m_1, m_2..... qui seraient en ligne droite, d'où l'on peut conclure facilement un nouveau théorème de transversales qu'il est inutile d'énoncer ici.

2° Du point *m* (*fig.* 98) abaissons sur les droites P et Q, des perpendiculaires qui les coupent aux points *b* et *c*, joignons *bc*, menons *b'c'* parallèle à *bc* et par les points *b'* et *c'* les parallèles P' et Q' à P et Q, ces droites P' et Q' se coupent en un point *m'* appartenant à la droite cherchée. En effet, considérant P et Q comme les traces horizontales de deux plans, *m* comme la projection horizontale d'un point de leur intersection, *mb* et *mc* comme deux lignes de terre, on rentrera dans la construction du problème XVI (n° 101), P' et Q' seront les projections de deux horizontales des plans P et Q situées à la même hauteur, et se coupant en un point *m'* de la projection horizontale de l'intersection des plans P et Q.

110. PROBLÈME 18. *Trouver l'intersection d'une droite* D *et d'un plan* P. 1° Si par la droite D (*fig.* 99), on fait passer un plan auxiliaire X, qu'on cherche son intersection I avec le plan P, le point *x* intersection des droites I et D sera le point demandé.

Parmi les plans que l'on peut faire passer par la droite D, nous en distinguerons sept, qu'il sera préférable de choisir quand la disposition de la figure le permettra, et parmi lesquels on devra choisir suivant la disposition de la figure sur chaque plan de projection par rapport à la ligne de terre ou mieux suivant les relations de position qui existeront dans l'espace entre les données de la question à résoudre; ce sont :

1° Le plan projetant horizontalement D;

2° Le plan projetant verticalement D;

3° Le plan dont D est la ligne de plus grande pente, par rapport au plan vertical;

4° Le plan dont D est la ligne de plus grande pente, par rapport au plan horizontal;

5° Le plan mené par D parallèlement à la ligne de terre;

6° Le plan dont la trace horizontale est parallèle à H^p;

7° Enfin le plan dont la trace verticale est parallèle à V^p;

Les intersections de ces plans avec le plan donné P couperont toutes la droite D au même point x, qui est le point cherché. Dans chaque cas particulier, on choisira, comme nous l'avons dit ci-dessus, celui des plans qui conviendra le mieux; il serait inutile de les représenter tous sur la figure; on peut facilement s'y exercer.

2° Par le choix du plan auxiliaire, les projections I^h et D^h, et I^v et D^v peuvent se couper sous des angles très-aigus, alors les points x^h et x^v et par suite le point x sont mal déterminés. Mais on peut toujours choisir *à priori* le plan auxiliaire X de manière que I^v et D^h, par exemple, se coupent sous un angle droit ou presque droit. Pour cela je mène dans le plan P une droite A telle que A^h soit à peu près perpendiculaire sur D^h, ce qui est toujours possible puisque je peux me donner A^h, à volonté, pour conclure A^v; si ensuite par un point m de D je mène une parallèle A' à A, si je fais passer un plan X par les droites D et A', si je cherche l'intersection I des plans P et X, le point x, où les droites I et D se coupent, est le point demandé. Remarquons que les droites I et A doivent être parallèles, ce qui servira à vérifier l'exactitude des constructions.

3° On peut encore résoudre le même problème par un changement de plan de projection ou un mouvement de rotation, ayant pour but de ramener le plan P à être perpendiculaire à l'un des plans de projection (n°s 55 et 67), car alors son intersection avec D se projette sur ce plan à l'intersection de la trace du plan et de la projection de la droite (n° 56, 2°). Prenons donc un nouveau plan vertical de projection perpendiculaire au plan P (*fig.* 100), la ligne de terre L'T' sera perpendiculaire à H^p. On trouvera les droites V'^p et D'^v se coupant en $x^{v'}$, d'où l'on conclut x^h puis x^v qui sont les projections du point cherché. On aurait pu prendre un nouveau plan horizontal L″T″ perpendiculaire au plan P, alors la projection $x^{h''}$ sera l'intersection de $D^{h''}$ et H^p.

Remarquons que si l'on prend L'T' plus *haut sur la feuille de dessin*, le point $x^{v'}$ se trouve plus vers le haut de la feuille de dessin, et *vice versâ;* en prenant donc L'T' plus bas, le point $x^{v'}$ descend en même temps, de sorte qu'en choisissant la nouvelle ligne de terre le plus bas possible sur la feuille de dessin, on obtiendra des points d'intersection très-éloignés du plan horizontal, et que ne fournirait aucune autre méthode.

Si l'on changeait de plan horizontal, on devrait alors, par une raison toute semblable, choisir la nouvelle ligne de terre perpendiculaire à V^{r} et le plus haut possible. Enfin on pourrait rendre le plan P perpendiculaire au plan vertical ou au plan horizontal de projection, en le faisant tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, ou perpendiculaire au plan horizontal, la droite D se mouvant dans les deux cas avec le plan P.

111. **Problème** 19. *Trouver l'intersection d'une droite avec un plan donné par une droite et un point.* 1° Soient (*fig.* 101) le plan (P,p) donné par la droite P et le point p, et la droite donnée D; il faut (n° 110, 1°) par la droite D faire passer un plan auxiliaire et chercher son intersection avec le plan (P,p); or on peut choisir le plan passant par la droite D et le point p, de sorte que l'on connaît déjà un point p de l'intersection I; pour en avoir un second point, je mène par le point p des droites P' et D' respectivement parallèles aux droites P et D; les plans sont alors donnés par des droites parallèles, et en menant un second plan auxiliaire X horizontal, il coupera les quatre droites respectivement aux points π et π', δ et δ' qui déterminent les intersections A et B de ce plan X avec les plans (P,P') et (D,D'), et enfin les droites A et B se rencontrent en un point m de l'intersection I, qui est ainsi entièrement connue. Enfin cette dernière droite I rencontre D en un point x qui est le point demandé.

2° On pourrait prendre le plan X parallèle au plan vertical, ou perpendiculaire à l'un des plans de projection. On résout très-simplement ce problème en prenant pour plan passant par D son plan projetant vertical, comme nous le montrerons dans le problème suivant (n° 113, 2°).

3° Si l'une des droites données, P par exemple, était parallèle au plan horizontal, P^{v} serait parallèle à LT et par conséquent à V^{x}, on ne connaîtrait plus alors le point π, mais dans ce cas il est évident que le plan X qui est horizontal coupe le plan (P,p) suivant une horizontale, ou en d'autres termes, suivant une parallèle à la droite P, qui sera déterminée, car on pourra encore avoir le point π' en prenant P', non plus parallèle à P, mais passant par le point p et un point quelconque de P.

4° Si la droite P était la trace H^{r} du plan, on prendrait pour P' une verticale, ou une horizontale de ce plan, et alors on choisira le plan X de manière à ce qu'il soit parallèle au plan vertical de projection.

Enfin si la droite P était une ligne de plus grande pente du plan, elle suffirait pour le déterminer (n° 38); dans ce cas on ne pourrait plus donner le point p, et l'on choisirait pour plan passant par la droite D, celui dont cette droite serait la ligne de plus grande pente par rapport au même plan; on rentrerait ainsi dans un problème déjà résolu (n° 100).

112. On pourrait encore chercher l'intersection d'une droite avec un plan donné dans d'autres cas particuliers, par exemple, lorsque les deux traces se confondent en une seule droite, et tout autre que l'on pourrait concevoir; tous ces cas se résoudraient par les mêmes principes.

113. PROBLÈME 20. *Par un point donné mener une droite qui s'appuie sur deux droites données :*

1° Par le point donné et par chacune des droites données on peut faire passer un plan, l'intersection de ces deux plans sera évidemment la droite demandée; on rentrera ainsi dans la construction du problème précédent (n° 111), où p (*fig.* 111) représentera le point donné, P et D les deux droites données, I la droite cherchée; comme vérification, les projections de cette droite I doivent couper celles de P et D en des points y^v et y^h, x^v et x^h situés respectivement sur une même perpendiculaire à la ligne de terre (n° 8).

2° Nous pouvons résoudre ce problème en faisant passer un plan par le point donné m (*fig.* 102) et par l'une des droites A, puis cherchant l'intersection de ce plan avec la seconde droite B, nous obtiendrons son intersection avec le plan (A,m), en menant deux droites K et G par m et deux points quelconques b et a de A, elles seront évidemment dans ce plan et couperont le plan vertical mené par B^h en des points k et g de l'intersection R de ces plans; puis la droite R rencontre la droite B au point x qui appartient à la droite D demandée, car cette droite, ayant deux points x et m dans le plan (A, m), y est contenue tout entière et par conséquent elle rencontre la droite A en un point y.

114. Il serait facile de trouver d'autres solutions de plusieurs des problèmes précédents, de varier les données de quelques-uns d'entre eux et d'en proposer de nouveaux; ce qui précède suffit pour pouvoir les résoudre tous. Au reste nous aurons l'occasion d'en rencontrer encore quelques-uns dans la suite de ce cours (*).

(*) Cependant il n'est pas sans intérêt de mentionner d'une manière particulière le problème dans lequel le plan P aurait ses traces V^p et H^p confondues en une seule ligne droite P_1, et dans lequel la droite D aurait ses projections D^h et D^v confondues en une seule ligne droite D_1.

Dans ce cas, le point m, intersection du plan P et de la droite D, aurait ses projections m^h et m^v confondues en un seul point m_1.

Le point m serait situé sur le plan B, bissecteur des angles dièdres $\widehat{S.P}$ et $\widehat{I.A}$.

Désignons par p le point en lequel le plan P coupe la ligne de terre LT, et par d le point en lequel la droite D coupe cette même ligne LT.

Si nous concevons une suite de droites D, D', D'', etc., perçant la ligne de terre au même point d, et dont les projections se trouvent confondues en les droites D_1, D'_1, D''_1, etc., toutes les droites D, D', D'', etc., seront situées dans le plan bissecteur B.

Dès lors, les points m, m', m'', etc., en lesquels les droites D, D', D'', etc., percent respectivement

114 (*bis*). **Remarque**, au sujet des problèmes relatifs 1° à l'intersection de deux plans, 2° à l'intersection d'une droite par un plan.

Dans cette première partie du cours de géométrie descriptive, nous nous sommes imposé la tâche de donner, au sujet des problèmes relatifs au point, à la droite et au plan, toutes les méthodes et toutes les solutions qui, fondées sur ces méthodes, se reproduiront dans la seconde partie, qui traite des courbes et des surfaces.

Ainsi lorsqu'il s'agit de l'intersection de deux surfaces, le problème le plus simple est celui par lequel on se propose de déterminer l'intersection de deux plans (le plan étant la surface la plus simple en géométrie). Mais 1° un plan peut être considéré comme engendré par une droite G qui se meut parallèlement à elle-même en s'appuyant sur une *droite* D; le plan est alors considéré comme un *cylindre*, car un cylindre est une surface réglée, engendrée par une droite G qui se meut parallèlement à elle-même en s'appuyant sur une *courbe* D. 2° Un plan peut être considéré comme engendré par une droite G passant en toutes ses positions par un point fixe *s* et s'appuyant sur une *droite* D; le plan est alors considéré comme une surface *conique*, car un cone est une surface réglée, engendrée par une droite G qui se meut en passant constamment par le sommet *s* (de la surface conique) et en s'appuyant sur une *courbe* D.

En géométrie descriptive un plan est employé comme *surface auxiliaire*, en considérant son mode de génération, tantôt *cylindrique*, tantôt *conique*. Lorsque l'on

---

le plan P, seront sur une droite K intersection des plans P et B : dès lors les points m_1, m'_1, m''_1, etc., seront sur une ligne droite J, passant par le point *p*.

Ce qui précède nous permet d'énoncer le théorème suivant, relatif aux transversales. *Fig.* 102 *bis.*

Étant données deux droites J *et* P, *se coupant en un point* p, *si d'un point* d *de* J *on mène une suite de droites* D_1, D'_1, D''_1, etc., *coupant respectivement la droite* P, *en les points* q, q', q'', etc.; *si des points* q, q', q'', etc., *on mène une suite de perpendiculaires à la droite* LT, *ou une suite de parallèles entre elles et faisant avec la droite* LT *un angle* α, *ces droites coupant* LT *aux points* r, r', r'', etc. *Si du point* d, *on mène une droite* Y *perpendiculaire à* LT, *ou faisant avec* LT *un angle* α, *cette droite étant dès lors parallèle aux droites* qr, qr', qr'', etc., *si par le point* s *en lequel* Y *coupe* P *on mène des droites* sr, sr', sr'', etc., *ces droites couperont les droites* D_1, D'_1, D''_1, etc., *respectivement aux points* m_1, m'_1, m''_1, etc., *lesquels seront en ligne droite avec le point* p.

Et comme toute droite dont les projections sont confondues, est située dans le plan bissecteur B, on pourra mener les droites D_1, D'_1, D''_1, etc., par des points différents, *d*, *d'*, *d''*, etc., situés sur LT, et non par le même point *d*; mais alors on devra mener par chacun des points *d*, *d'*, *d''*,.... des droites Y, Y', Y'', etc., qui donneront sur la droite P_1, des points *s*, *s'*, *s''*, etc., et alors il faudra joindre les points *s* et *r*—*s'* et *r'*—*s''* et *r''*—, etc., pour obtenir les points m_1, m'_1, m''_1, etc., lesquels seront avec le point *p* en ligne droite.

On trouverait des théorèmes de transversales analogues, si l'on considérait un plan P perpendiculaire au plan B', bissecteur des angles dièdres $\widehat{S.P}$ et $\widehat{P.I}$, et des droites D, D', D'', etc., situées dans ce plan bissecteur B'.

se donne un plan P par sa trace horizontale H^p et par un point p dont on se donne les projections p^v et p^h, il est évident que le plan P est donné par son mode conique de génération ; cela veut dire que, lorsque l'on aura un problème à résoudre par rapport au plan P, il faudra, dans les constructions graphiques, tenir compte de la manière dont le plan P est donné.

Lors donc que l'on a deux plans P et Q donnés l'un par sa trace H^p et un point p, et l'autre par sa trace H^q et un point q, et que l'on demandera la solution du problème : *construire les projections* I^h *et* I^v *de l'intersection* I *de ces deux plans* P *et* Q, il faudra employer un mode de solution tel que l'on tienne compte du mode particulier de génération des deux plans donnés P et Q, et ainsi de ce qu'ils sont donnés l'un et l'autre par le *mode conique*.

Dès lors on voit de suite que la solution donnée dans ce cas peut être employée pour le problème plus général, savoir : *déterminer les projections* I^h *et* I^v *de l'intersection* I *de deux cônes* P *et* Q *donnés* le PREMIER *par son sommet* p *et par sa trace horizontale* H^p (qui ne sera autre qu'une courbe C, base horizontale du cone), *et le* SECOND *par son sommet* q *et par sa trace* H^q *sur le plan horizontal* (trace qui ne sera autre qu'une courbe C′, base horizontale du cône).

Car il est évident que tous les plans auxiliaires X..... qui passeront par la droite D qui unit les deux sommets p et q, couperont respectivement les cônes (p, C) et (q, C′), suivant des génératrices droites qui se couperont en des points x..... appartenant à la courbe I, intersection des deux cônes donnés.

Ainsi dans l'épure relative à l'intersection de deux plans, remplaçons les droites H^p par une courbe C et H^q par une courbe C′, et au lieu de construire l'intersection de deux plans on construira l'intersection de deux cônes.

Si au contraire l'on se donnait 1° un plan P par sa trace H^p et par les projections K^h et K^v d'une droite K située dans ce plan P, et 2° un plan Q par sa trace H^q et par les projections q^v et q^h d'un point q situé dans ce plan Q et que l'on demandât de déterminer la droite I intersection de ces deux plans P et Q, c'est-à-dire les projections I^v et I^h de la droite I, on serait obligé, dans les constructions graphiques à employer pour la solution du problème ainsi posé, de tenir compte de ce que le plan P est donné par son mode de génération *cylindrique* et de ce que le plan Q est donné par son mode de génération *conique ;* dès lors, il faudrait mener par le point q une droite B parallèle à K, laquelle percerait le plan horizontal en un point b, et par ce point on mènerait une série de droites H^x..... coupant respectivement les droites H^p et H^q. Les droites H^x..... seraient les traces d'une série de plans auxiliaires X..... qui évidemment couperaient le plan P suivant des parallèles à K et le plan Q suivant des droites passant toutes par le point q.

Si donc on remplace la droite H^p par une courbe C et H^q par une courbe C′, l'on

aura au lieu du plan P, un *cylindre* Σ ayant une courbe C pour base horizontale, ses génératrices étant parallèles à la droite K, et l'on aura au lieu du plan Q, un *cone* Σ' ayant une courbe C' pour base horizontale et le point q pour sommet, et le mode de solution employé pour déterminer la droite I intersection des deux plans P et Q, devra être identiquement employé pour déterminer la courbe I intersection des deux surfaces (cylindrique et conique) Σ et Σ'. Si, enfin, l'on donnait les plans P et Q par leurs traces horizontales H^p et H^q et deux droites K et G, l'une K située dans le plan P et l'autre G située dans le plan Q; les deux plans P et Q seraient alors donnés chacun par son mode de génération *cylindrique*. Il faudrait donc par un point m de l'espace mener deux droites K' parallèles à K et G' parallèle à G; tout plan X parallèle au plan (K', G') couperait respectivement les plans P et Q suivant des parallèles à K et à G; les traces des plans X.... seront parallèles aux traces du plan (K', G'). Il suffit donc de déterminer la trace horizontale de ce dernier plan et de mener une suite de droites H^x..... parallèles entre elles et à cette trace, et coupant respectivement les droites H^p et H^q pour achever la construction graphique.

Si donc on remplace H^p et H^q par des courbes planes C et C', l'on aura au lieu des deux plans P et Q deux cylindres Σ et Σ', l'un Σ ayant C' pour base horizontale et ayant ses génératrices droites parallèles à K, l'autre Σ' ayant C' pour base horizontale et ayant ses génératrices droites parallèles à G et la *courbe* I intersection de ces deux surfaces cylindriques Σ et Σ' s'obtiendra par la méthode graphique employée pour déterminer la *droite* I intersection de deux plans P et Q donnés l'un et l'autre par le mode de génération cylindrique.

Ce qui précède nous montre bien comment l'on procède du connu à l'inconnu, comment l'on doit procéder pour passer de la solution d'un problème relatif à des surfaces simples, à la solution du même problème, proposé pour des surfaces plus générales du même mode de génération.

Au sujet de l'intersection d'une droite et d'un plan, nous avons des considérations d'un autre genre à présenter. Lorsque l'on se propose la solution d'un problème par la méthode des projections, il faut autant que possible choisir entre toutes les constructions graphiques celle qui emploie le moins de *lignes;* lors donc que l'on a à chercher le point de rencontre d'un plan et d'une *seule* droite, il est évident que l'emploi d'un plan auxiliaire passant par la droite sera préférable à l'emploi de la méthode du changement de l'un des plans de projection.

Mais si l'on a une série de droites D..... parallèles entre elles, ou divergeant d'un point s et que l'on demande de couper toutes ces droites par un plan P donné par ses traces, il est bien évident qu'il vaudra mieux changer de plan vertical de projection et prendre le nouveau plan perpendiculaire au plan P.

D'ailleurs, si les droites D..... sont les arêtes d'un prisme ou les arêtes d'une

pyramide, on a très-souvent et presque toujours besoin dans les applications de connaître en véritable grandeur la section faite au travers du prisme ou de la pyramide par le plan P; et pour avoir cette section en véritable grandeur, il faut pouvoir considérer le plan P comme un nouveau plan de projection, ou le faire tourner autour de sa trace H^P comme axe de rotation pour le rabattre sur le plan horizontal de projection. Or l'une ou l'autre de ces solutions exige au préalable que l'on effectue le changement du plan vertical de projection, il est donc évident qu'il vaut beaucoup mieux effectuer tout d'abord ce changement, pour déterminer la projection horizontale et la projection verticale de la section sur les plans primitifs, et ensuite en conclure la véritable grandeur de cette section.

Tous les problèmes se simplifient en leur solution par l'emploi de l'une ou l'autre des deux méthodes, savoir : 1° *changement des plans de projection;* 2° *rotation du système autour d'un axe;* mais suivant la nature du problème proposé, suivant les relations de position qui existent entre les diverses parties du système proposé dans l'espace et fixé de position par rapport aux deux plans primitifs de projection, en vertu des positions respectives qu'affectent par rapport à la ligne de terre LT les projections de ce système, on doit préférer l'une des méthodes à l'autre, et c'est ce choix, judicieusement fait, qui montre si le géomètre comprend bien *l'art* et la *science* des projections, s'il sait, en un mot, lire dans l'espace.

Angles des droites et des plans.

115. Problème 21. *Trouver l'angle de deux droites.* L'angle de deux droites est la quantité dont les directions de ces droites s'écartent l'une de l'autre; il en résulte que :

1° Deux droites peuvent faire un angle sans se couper;

2° Deux droites parallèles font entre elles un angle nul;

3° L'angle de deux droites qui ne se coupent pas, sans être parallèles, est égal à l'angle de deux parallèles à ces droites et menées par un même point.

On n'aura donc jamais à chercher que l'angle de deux droites qui se coupent; car, s'il en était autrement, par un point pris à volonté, on mènerait des parallèles aux deux droites données (n° 24), et l'on chercherait l'angle que font entre elles ces parallèles. Soient donc les deux droites A et B (*fig.* 102) qui se coupent au point m; ces deux droites déterminent un plan Q dont la trace horizontale est H^Q; rabattons ce plan Q sur le plan horizontal (n° 76), en choisissant, pour plus de simplicité, le nouveau plan vertical de projection passant par le point m, les droites A et B se rabattront en A' et B' et l'angle $\widehat{am'b}$ sera l'angle demandé.

On pourrait encore chercher les côtés A′ et B′ de cet angle, en rabattant les plans projetant horizontalement A et B; puis construire le triangle $am'b$ dont on connaîtrait les trois côtés, et il faudrait que les points m' et m^h se trouvassent sur une perpendiculaire à H^o. On pourrait aussi rendre le plan Q horizontal ou vertical par l'une des quatre méthodes connues (n° 76). Les figures de ces constructions sont faciles à exécuter, à l'aide de ce qui précède.

Remarquons que la droite $o'm = om$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont om^h est un côté de l'angle droit; de sorte que l'on a $om' > om^h$ et, par conséquent, l'angle $\widehat{am'b}$ des deux droites est plus petit que l'angle $\widehat{am^hb}$ de leurs projections.

Cependant, lorsque deux droites A et B font entre elles un angle droit et que l'une d'elles B est horizontale, l'angle que font entre elles les projections A^h et B^h est droit, et dès lors égal à l'angle de l'espace; de même, si l'une d'elles B est parallèle au plan vertical, l'angle que font entre elles A^v et B^v est droit, et dès lors égal à l'angle de l'espace. Dès lors, si, sur un plan oblique par rapport aux deux plans de projections, on mène par un point m de ce plan une horizontale H et une verticale V, puis deux lignes de plus grande pente, l'une K, par rapport au plan horizontal, et l'autre G par rapport au plan vertical, les angles (H^h, K^h) et (V^v, G^v) seront droits.

116. Problème 22. *Trouver la bissectrice de l'angle de deux droites.* On peut résoudre ce problème, en cherchant d'abord l'angle de ces droites (n° 15), puis divisant en deux parties égales l'angle rabattu formé par les droites A′ et B′ (*fig.* 103), la bissectrice rencontrera la trace H^o en un point qui sera évidemment la trace horizontale de la bissectrice demandée; et comme elle doit passer d'ailleurs par le point m, elle est entièrement déterminée. Mais on peut aussi trouver cette bissectrice, sans chercher préalablement l'angle des deux droites données; pour cela, remarquons que si l'on prend deux longueurs égales sur les droites A et B (*fig.* 104), à partir du point m, en lequel elles se coupent, on formera un triangle isocèle, et la droite, joignant le point m au milieu de la base de ce triangle, sera la bissectrice demandée.

Pour résoudre le problème présenté sous cette forme, nous ferons tourner séparément les droites données A et B autour d'un axe vertical passant par leur point d'intersection m, jusqu'à ce qu'elles soient arrivées dans les positions A′ et B′, où elles sont parallèles au plan vertical de projection (n° 61); décrivant ensuite, du centre m^v et avec un rayon quelconque, un arc de cercle coupant A'^v et B'^v en e'^v et d'^v, ramenant les points e' et d' en e et d sur A et B par des mouvements inverses autour du même axe, la droite E, menée du point e au point d, sera évidemment la base du triangle isocèle, son milieu n se projettera aux milieux n^h et n^v des pro-

jections E^h et E^v; enfin la droite D, qui unit les points m et n, est la bissectrice demandée.

Il est essentiel de ne pas perdre de vue que les mouvements des droites données A et B sont indépendants l'un de l'autre, sans quoi elles ne deviendraient pas toutes deux parallèles au plan vertical, position à laquelle on ne les amène que pour pouvoir prendre sur chacune d'elles des longueurs égales me et md.

Si les points a' et b' sortaient l'un ou l'autre, ou tous les deux, des limites du dessin, on prendrait un plan horizontal auxiliaire coupant les droites A et B en des points p et q tels que p' et q' se trouvassent dans les limites du dessin; ils serviraient d'ailleurs à trouver A′ et B′, et le reste de la construction s'achèverait comme ci-dessus (*).

Remarquons enfin que ces constructions donnent lieu à plusieurs vérifications qu'il est inutile de signaler, car elles sont évidentes si on a lu avec attention tout ce qui précède.

117. PROBLÈME 23. *Trouver les angles que fait une droite avec les plans de projection* (*fig.* 105). L'angle d'une droite et d'un plan est l'angle que fait cette droite avec sa projection sur le plan, donc les angles demandés seront ceux que la droite donnée D fait avec D^h et D^v; il faut donc amener les plans projetant la droite D à se confondre avec l'un des plans de projection, ou à lui être parallèles. Pour cela on peut prendre directement ces *plans-projetants* pour nouveaux plans de projection, et l'on trouve ainsi l'angle $\widehat{bab^h} = \alpha$ que fait la droite D avec le plan horizontal et l'angle $\widehat{aba^v} = \beta$, qu'elle fait avec le plan vertical. On peut aussi faire tourner les plans projetant la droite D respectivement autour de leurs traces b, b^h ou a, a^v pour les rabattre sur le plan horizontal ou sur le plan vertical de projection, et l'on

---

(*) Dans un trapèze, les milieux des côtés parallèles, le point de concours des diagonales et le milieu des côtés non parallèles sont en ligne droite. La proposition est évidente dans un trapèze isocèle $ab'c'd$ (*fig.* 103 *bis*); car (désignant par o' le point en lequel se croisent les deux diagonales et par s le point en lequel se coupent les droites qui, passant par les milieux des côtés opposés, sont rectangulaires entre elles) les triangles dsb' et asc' sont égaux; par suite les triangles aso' et $o'sb'$ sont aussi égaux : donc so' divise l'angle $\widehat{b'sa}$ en deux parties égales, et, par conséquent, so' passe par les milieux de ab' et de dc'. Mais un trapèze quelconque $abcd$ peut être considéré comme la projection orthogonale ou oblique d'un trapèze isocèle, rabattu en $ab'c'd$; les diagonales ac et bd seront les projections des diagonales ac' et $b'd$, la droite so sera la projection de so' et les point e et g seront les projections des points e' et g'; mais ces derniers sont les milieux des côtés ab' et dc', et, dans tout système de projection cylindrique, la projection du point milieu d'une droite est le point milieu de la projection de cette droite : donc les points e et g sont les milieux des droites ab et cd.

On déduit de là un moyen de diviser une droite, un angle ou un arc de cercle en deux parties égales, et aussi d'élever une perpendiculaire sur le milieu d'une droite.

trouvera de même les angles $\widehat{ba'b^h} = \alpha$ et $\widehat{ab''a^v} = \beta$. Si les traces de la droite D ne sont pas dans les limites du dessin, on prendra deux points quelconques m et n (*fig.* 106), et l'on trouvera par des changements de plans de projection les angles $\widehat{mnk} = \alpha$ et $\widehat{lnm} = \beta$. Ou bien, par les points m et n, on abaissera des perpendiculaires respectivement sur le plan horizontal et sur le plan vertical, autour desquelles on fera tourner les plans (D, D^h) et (D, D^v) jusqu'à ce qu'ils soient parallèles au plan vertical ou au plan horizontal, et l'on aura de nouveau les angles $\widehat{m^v n'^v k^v} = \alpha$, et $\widehat{n^h m''^h l^h} = \beta$.

118. Lorsqu'une droite fait des angles égaux avec les deux plans de projection, ses projections font des angles égaux avec la ligne de terre LT, et ses traces sont également éloignées de LT. En effet (*fig.* 105), 1° les triangles $a\underline{b}b^h$ et $b\underline{a}a^v$ sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale et un angle aigu égal; donc $ab^h = ab^v$ et $\underline{b}b^h = bb^h = aa^v = \underline{a}a^v$, donc les triangles aa^vb^h et bb^ha^v sont égaux, et par conséquent on a : $\widehat{ab^ha^v} = \widehat{ba^vb^h}$.

Si la droite D rencontrait la ligne de terre, la même démonstration subsisterait, et si les projections devaient se trouver du même côté de LT, elles se confondraient (n° 17, 8°).

2° Ce cas particulier est évident, car un point quelconque de la droite D est alors à égale distance des deux plans de projection, d'où l'on déduit l'égalité des triangles analogues aux précédents. Or, on peut toujours se ramener à ce cas; en effet, prenons, par exemple, un nouveau plan vertical parallèle à l'ancien et passant par la trace horizontale a de la droite D, laquelle rencontrera alors la ligne de terre et fera toujours des angles égaux avec les deux plans de projection, donc D^h et $D^{v'}$ font le même angle avec L'T'; mais D^v est parallèle à $D^{v'}$, et L'T' à LT, donc D^v et D^h font le même angle avec LT.

Remarquons que D^h et D^v sont parallèles, lorsque la droite D ne traverse pas l'angle $\widehat{P.S.}$ Dans le cas contraire, elles sont dans la position que l'on nomme *anti-parallèles* par rapport à la ligne de terre LT.

119. Problème 24. *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.*

1° Cet angle étant celui que fait la droite donnée avec sa projection sur le plan donné, il faudrait résoudre, par rapport à la droite donnée, le problème résolu (n° 48) par rapport à un point, et l'on serait conduit à chercher l'angle de deux droites (n° 115). Mais nous remarquerons que cela revient à rendre le plan P horizontal ou vertical, ce que l'on peut faire de quatre manières différentes (n° 76), en supposant la droite D invariablement liée au plan, de sorte que l'on doit en trouver les projections sur tout nouveau plan de projection que l'on choisit, et aussi sup-

poser qu'elle soit entraînée dans les mouvements de rotation effectués, en décrivant toujours le même angle que le plan. On est alors ramené à chercher l'angle d'une droite avec l'un des plans de projection (nº 117).

Il sera facile de suivre toutes les constructions sur la figure 107.

2º Ce problème peut aussi se résoudre d'une autre manière, car si d'un point quelconque m de la droite D, on abaisse une perpendiculaire N sur le plan P (nº 92), l'angle des droites D et N est le complément de l'angle que fait la droite D avec le plan P; on est ainsi ramené à chercher l'angle de ces deux droites D et N (nº 115), et l'on en prend le complément.

120. Problème 25. *Trouver les angles d'un plan avec les plans de projection* (*fig.* 108). L'angle de deux plans se mesure par deux perpendiculaires menées par un même point de l'intersection commune de ces deux plans et situées respectivement dans chacun des deux plans; il en résulte que si le plan donné était perpendiculaire au plan vertical, l'angle qu'il fait avec le plan horizontal serait mesuré par l'angle de sa trace verticale avec la ligne de terre; de même si le plan donné était perpendiculaire au plan horizontal, l'angle qu'il fait avec le plan vertical serait évidemment mesuré par l'angle que fait sa trace horizontale avec la ligne de terre. La solution du problème consistera donc à rendre le plan donné perpendiculaire successivement au plan horizontal et au plan vertical de projection, soit par un changement de plan (nº 52), soit par un mouvement de rotation (nº 64). On trouvera ainsi, par les deux méthodes, l'angle α que fait le plan P avec le plan horizontal et l'angle β qu'il fait avec le plan vertical. Il est inutile de développer les constructions, on les suivra facilement sur la figure.

121. Si du point A^h ou A'^v on abaisse une normale N' sur $V^{p'}$ et une normale N'' sur $H^{p'}$, en supposant le plan vertical de projection relevé, N' sera perpendiculaire à l'axe A_n et par conséquent aussi à une parallèle à cet axe ou à $H^{p'}$ menée par le point r', donc elle est perpendiculaire au plan P'; de même N'' est perpendiculaire à l'axe A'_i, et par conséquent aussi à une parallèle à cet axe ou à $V^{p''}$, menée par le point s^v, donc elle est perpendicuaire au plan P''. Si l'on ramène les plans P' et P'' dans leur position initiale P, les normales N' et N'' se réuniront en une même droite perpendiculaire au plan P, donc N'=N''. Donc enfin $V^{p'}$ et $V^{p''}$ sont deux tangentes au cercle décrit du point A^h ou A'^v comme centre, et avec N' ou N'' pour rayon.

122. Si le plan donné fait des angles égaux avec les deux plans de projection, ses traces sont également inclinées sur la ligne de terre. En effet, 1º d'un point quelconque o (*fig.* 109) de LT abaissons une perpendiculaire N sur le plan donné P, elle le rencontrera en un point b, duquel abaissant des perpendiculaires bi et bj sur les traces du plan P, nous formerons dans l'espace les deux triangles obi et obj égaux, comme ayant un côté commun et deux angles égaux chacun à chacun;

donc $oi = oj$ et $\widehat{boi} = \widehat{boj}$, par suite $\widehat{poi} = \widehat{poj}$ (n° 118), donc les triangles *poi* et *poj* sont égaux, et par conséquent $\widehat{opi} = \widehat{opj}$. Suivant que les perpendiculaires *oi* et *oj*, menées sur H^p et V^p tombent de côtés différents ou du même côté de LT, les traces font des angles égaux avec la même partie ou avec des parties différentes de LT, et dans le second cas elles coïncident. Si le plan donné était parallèle à la ligne de terre, ses traces seraient parallèles à LT, et situées à la même distance de cette ligne LT, de sorte qu'elles se confondraient si elles se trouvaient situées du même côté.

2° Dans le cas particulier d'un plan parallèle à la ligne de terre (*fig.* 110), il est évident que ses traces doivent être également distantes de LT, car, si dans le plan P′ on mène une droite *ac* perpendiculaire à LT, elle sera perpendiculaire à la fois à $H^{p\prime}$ et à $V^{p\prime}$, par conséquent le triangle *aoc* est isocèle, donc l'on a : $ao = oc$. Cela posé : faisant tourner le plan P′ autour de *ac*, jusqu'à ce qu'il vienne couper la ligne de terre en un point *p*, les triangles *aop* et *cop* seront égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux ; donc l'on a : $\widehat{apo} = \widehat{cop}$; le plan P fait donc des angles égaux avec les deux plans de projection.

123. Problème 26. *Par une droite donnée conduire un plan faisant un angle donné α avec le plan horizontal* (*fig.* 111).

Soit D la droite donnée, les traces du plan cherché devront respectivement passer par les traces horizontale et verticale *a* et *b* de D ; cela posé, menons par le point *b* un axe vertical A et concevons que le plan P ait tourné autour de cet axe jusqu'à ce qu'il soit arrivé en la position P′ perpendiculaire au plan vertical, sa trace verticale $V^{p\prime}$ ne cessera pas de passer par le point *b* et fera avec LT l'angle α ; ramenant ensuite ce plan P′ à la position P qu'il doit occuper dans l'espace, le point *p*′, intersection des deux traces du plan P′ (ou mieux : intersection du plan P′ avec la ligne de terre LT), décrira sur le plan horizontal un cercle C auquel la trace $H^{p\prime}$ reste toujours tangente pendant le mouvement de rotation ; donc menant par le point *a* une tangente au cercle C, cette tangente sera H^p, puis V^p doit passer par *b* et rencontrer LT au même point que H^p.

Si la trace H^p ne rencontrait pas LT dans les limites du dessin, on trouverait un second point de V^p en menant par un point quelconque de la droite D une horizontale du plan P.

Remarquons que ce problème ne peut pas être résolu par un changement de plan. Cependant si la droite donnée était la trace horizontale du plan cherché, on pourrait employer indifféremment l'une ou l'autre méthode ; car 1° prenant un axe A quelconque on amènerait le point *p* en *p*′, puis on tracerait la droite $V^{p\prime}$ faisant avec LT l'angle α, ce qui ferait connaître un point *b* de V^p ; 2° si l'on prenait un plan vertical perpendiculaire à H^p, la trace verticale $V^{\prime p}$ ferait avec L′T′ l'angle α, puis

changeant de plan vertical et prenant LT pour ligne de terre, on en déduirait V^p.

Si la droite donnée était la trace H^p du plan P à construire, sachant quel est l'angle β que ce plan fait avec le plan vertical de projection, le problème pourrait se résoudre par un mouvement de rotation, mais on ne pourrait le résoudre par la méthode du changement de plans de projection. Il est facile de faire l'épure dans ce cas en vertu de tout ce qui a été dit précédemment.

124. Supposons que la droite D ne rencontre pas les plans de projection dans les limites du dessin (*fig.* 112). Nous pouvons concevoir dans le plan cherché P une ligne de plus grande pente K menée par un point quelconque *m* de la droite D; si nous la faisons tourner autour d'un axe vertical A, passant par le point *m*, jusqu'à ce qu'elle soit en K′ parallèle au plan vertical, sa projection K'^v fera alors avec LT l'angle α, et l'on trouvera sa trace horizontale *a*′. En la ramenant dans sa première position, cette trace *a*′ décrira le cercle C; un autre point quelconque *n*′ de K′ décrira un cercle C′ situé dans un plan horizontal X, coupant la droite D en un point *b* par lequel passe une horizontale B du plan cherché P; cette droite est tangente au cercle C′, puisqu'elle doit passer par le point *n* extrémité d'un rayon, et être perpendiculaire à la ligne de plus grande pente K (n° 37); donc enfin H^p sera une droite tangente au cercle C et parallèle à B^h. Enfin, on aura deux points *x* et *y* de la trace verticale V^p, par deux horizontales M et R du plan P, lesquelles passeront par deux points quelconques *m* et *r* de la droite D.

125. Problème 27. *Par un point donné, conduire un plan faisant un angle α avec le plan horizontal et un angle β avec le plan vertical.* Prenons un axe A (*fig.* 108) sur le plan vertical et perpendiculaire au plan horizontal et par conséquent perpendiculaire à la ligne de terre LT; concevons que le plan cherché P ait tourné autour de cet axe jusqu'à devenir perpendiculaire au plan vertical, sa trace $V^{p'}$ fera alors avec la ligne de terre l'angle α; on la mènera par un point quelconque *p*′ de LT, elle fournira un point *a* de la trace V^p. Si l'on conçoit un second axe A′ dans le plan horizontal et perpendiculaire à LT et que l'on fasse tourner le plan P autour de A′ jusqu'à le rendre vertical, la trace $H^{p''}$ devra faire avec LT l'angle β. De plus, si du point A^h ou A'^v, on abaisse des perpendiculaires sur $V^{p'}$ et sur $H^{p''}$, elles sont égales (n° 121); donc $H^{p''}$ sera tangente au cercle décrit du centre A^h et du rayon N′, puis $H^{p''}$ rencontre A′ en un point *a*′, qui appartient à la trace horizontale H^p. Si, maintenant, on ramène le plan P′ dans sa position véritable, *p*′ intersection de ses deux traces, décrira un cercle autour du point A^h, et l'on devra du point *a*′ mener une tangente à ce cercle, ce sera la trace H^p demandée, et, par suite, on aura V^p qui doit passer par le point *a*; d'ailleurs, si l'on ramenait P″ dans la position P, le point *q*″ intersection de ses deux traces, décrirait un arc de cercle auquel V^p doit être tangente. On aura ainsi un plan faisant les angles α et β avec les

plans horizontal et vertical de projection; il n'y aura plus qu'à mener par le point donné un plan parallèle au plan P (n° 38), pour avoir résolu le problème proposé.

126. PROBLÈME 28. *Connaissant les traces horizontales de deux plans et les angles qu'ils font avec le plan horizontal, trouver leurs traces verticales* (*fig.* 93). Soient H^p et H^q les traces horizontales données, prenons un plan vertical de projection perpendiculaire au plan P, la trace verticale V'^p devra faire avec L'T' l'angle α; prenons de même un plan vertical de projection perpendiculaire au plan Q, la trace verticale V''^q devra faire avec L''T'' l'angle β, il reste à rapporter les deux plans P et Q au même plan vertical LT, les traces horizontales H^p et H^q ne changeront pas, et l'on trouvera les traces verticales V^p et V^q à l'aide d'une horizontale de chacun des deux plans P et Q (n° 47).

127. PROBLÈME 29. *Trouver l'angle de deux plans*. Ce problème peut être résolu de bien des manières différentes; nous allons en indiquer quelques-unes.

1° Nous avons appris à trouver l'angle d'un plan avec les plans de projection (n° 120). On pourra donc se ramener dans cette position particulière, soit en prenant l'un des plans donnés pour nouveau plan de projection, soit en le rabattant sur l'un des plans primitifs; nous pourrons obtenir ce résultat par l'une des quatre méthodes connues (n° 76). Je ne fais qu'indiquer cette solution, afin qu'on s'y exerce; nous avons déjà eu plusieurs constructions du même genre.

2° Si les deux plans donnés étaient perpendiculaires à l'un des plans de projection, leurs traces sur ce plan comprendraient évidemment entre elles un angle égal à l'angle des deux plans; or, dans ce cas, l'intersection des deux plans est perpendiculaire au plan de projection. Pour ramener la figure dans cette position particulière, il suffira donc de rendre l'intersection des deux plans perpendiculaire à l'un des plans de projection, ce qui nécessite deux changements de plans (n° 51), ou deux mouvements de rotation (n° 63), ou bien aussi un changement de plan et un mouvement de rotation, ou enfin un mouvement de rotation et un changement de plan. Dans tous les cas, il faut d'abord connaître l'intersection des deux plans, et nous avons appris à la trouver précédemment. Cela posé, si nous voulons d'abord employer deux changements de plans (*fig.* 113), soient P et Q les plans donnés par leurs traces H^p, V^p et H^q, V^q, et I leur intersection donnée par ses projections I^h et I^v; afin de rendre cette intersection I perpendiculaire au plan horizontal, nous prendrons d'abord pour nouveau plan vertical de projection un plan parallèle à I, et pour plus de simplicité le plan projetant horizontalement cette droite I, de sorte que L'T' ne sera autre que I^h; et si nous cherchons la projection de l'intersection I sur ce nouveau plan, elle ne sera autre que cette intersection I elle-même, elle représentera, en même temps, V'^p et V'^q. Nous prendrons ensuite un nouveau plan horizontal per-

pendiculaire à cette droite I, par conséquent, L″T″ sera perpendiculaire à I. La projection de la droite I sur ce nouveau plan sera un seul point $I^{h''}$ de la nouvelle ligne de terre, point qui sera commun aux deux nouvelles traces H''^{p} et H''^{q}; il faut trouver un second point de chacune de ces deux traces, pour cela nous emploierons une verticale M du plan P, dont la trace horizontale m sur l'ancien plan L′T′ est à une distance $mm^{v\prime}$ de cette ligne de terre, donc sa trace sur le nouveau plan horizontal L″T″ devra être à la même distance de la ligne de terre L″T″, et, par conséquent, en m', et ce point appartient à H''^{p} (n° 28). De même, une verticale K du plan Q fera connaître un point k' de H''^{q}. Puis l'angle α formé par H''^{p} et H''^{q} est l'angle demandé, et ainsi celui que font entre eux les plans P et Q.

3° On peut remplacer l'un des changements de plans de projection par un mouvement de rotation; par exemple, le second (*fig.* 114); dans ce cas, après avoir trouvé la droite I avec laquelle coïncident les traces V'^{p} et V'^{q}, il faut faire tourner le système autour d'un axe A perpendiculaire au plan vertical, jusqu'à ce que I soit devenue verticale; si l'on conçoit une verticale M du plan P et une verticale K du plan Q, pendant la rotation, ces verticales restent toujours à la même distance du plan vertical de projection et leurs projections verticales conservent aussi toujours la même distance à I (n° 56, 3°); nous prendrons dans notre figure, l'axe A passant par le pied m de M, ce point appartiendra donc toujours à la trace horizontale du plan P; abaissant la droite $\overline{A^{v\prime}y}$ perpendiculairement sur I, y viendra en y' et ce point y' sera, en même temps, I'^{h}; joignant les points I'^{h} et m, on aura $H^{p\prime}$. De même, la verticale K viendra en K′ et fera connaître un point K'^{h} ou x'^{h} de $H^{q\prime}$, qui doit aussi passer par le point I'^{h} ou y'.

Enfin l'angle des droites $H^{p\prime}$ et $H^{q\prime}$ est égal à l'angle cherché, qui est celui que font entre eux les deux plans P et Q.

4° On pourrait remplacer au contraire le premier changement du plan de projection par un mouvement de rotation, mais je ne trace pas l'*épure* de ce cas, car elle sera facile à exécuter d'après ce qui a été dit ci-dessus.

5° Enfin pour résoudre le problème par deux mouvements de rotation (*fig.* 115), nous exécuterons ce qui suit : par un premier mouvement autour d'un axe vertical A, que nous choisissons ici passant par la trace verticale b de l'intersection I des deux plans P et Q, nous rendrons cette intersection I parallèle au plan vertical. La droite I se transporte sur le plan vertical défini par la ligne de terre LT en faisant décrire à cette droite I, et autour de l'axe A un angle $\widehat{aA^{h}a'} = \varphi$; tous les points des plans P et Q devront décrire des angles égaux à φ; les traces $V^{p\prime}$ et $V^{q\prime}$ se confondent avec I′ déterminée par les points a' et b; $H^{p\prime}$ et $H^{q\prime}$ doivent passer par le point a'; pour en avoir un second point, nous pouvons abaisser les perpendicu-

laires $\overline{A^h p}$ et $\overline{A^h q}$ sur H^p, puis chercher les nouvelles positions des points p et q; nous trouverons ainsi le point q', en prenant l'arc qq' égal à l'arc oo' sur le cercle D décrit du point A^h comme centre et avec $\overline{A^h q}$ pour rayon, cet arc : oo' = arc : qq' mesurant sur le cercle C un angle égal à φ, et l'on aura $H^{q'}$. Le point p étant sur notre figure très-voisin du point a', les rayons $\overline{A^h a}$ et $\overline{A^h p}$ sont presque égaux, d'où il résulte qu'il serait difficile de fixer la position du point p', mais alors du centre A^h et avec un rayon quelconque plus grand que $\overline{A^h p}$, nous décrirons un arc de cercle C coupant H^p en c et I^h en γ, nous aurons la position du point c après la rotation en prenant $cc' = \gamma\gamma'$, et la trace $H^{p'}$ devra passer par les points a' et c'.

Faisons maintenant tourner le système autour d'un axe B perpendiculaire au plan vertical jusqu'à ce que l'intersection I' soit devenue verticale, nous simplifierons la figure en faisant passer cet axe par le point a', la droite I' viendra en I'' après avoir décrit autour de l'axe B un angle ψ que devront décrire aussi tous les points des plans P' et Q'; les traces verticales $V^{p''}$ et $V^{q''}$ coïncident encore avec I''. Pour avoir $H^{p''}$ et $H^{q''}$ nous emploierons une verticale de chacun de ces deux plans; soient M' une verticale du plan P' et K' une verticale du plan Q', du centre B^v et d'un rayon quelconque décrivons un cercle C', qui coupe M'^v en m'^v et K'^v en k'^v; cela fait, nous prendrons les projections horizontales m'^h et k'^h des points m' et k', celui-ci étant par hypothèse la trace horizontale de la droite K', puis prenons les arcs $m'^v m'' = k'^v k''^v = \lambda'\lambda''$ et nous aurons en m''^v et k''^v les nouvelles projections verticales des points m' et k'; nous en conclurons leurs projections horizontales m''^h et k''^h, qui sont en même temps les projections M''^h et K''^h des verticales des plans; nous n'avons pas écrit cette dernière notation sur la figure pour ne pas la compliquer sans nécessité. Les deux plans P'' et Q'' étant actuellement verticaux, leurs traces horizontales $H^{p''}$ et $H^{q''}$ devront passer respectivement par les points m''^h et k''^h, elles doivent aussi passer par le point a'; elles sont donc déterminées. Enfin les traces $H^{p''}$ et $H^{q''}$ comprennent entre elles un angle α qui mesure l'angle cherché, c'est-à-dire celui que font entre eux les plans P et Q.

6° L'angle de deux plans est donné par deux perpendiculaires menées à ces plans par un même point de leur intersection I, ces deux normales sont dans un plan X (*fig.* 116) perpendiculaire à I. Ce plan X étant arbitraire, nous mènerons H^x perpendiculaire en un point quelconque de I^h, cette trace H^x coupe H^p et H^q en des points x et y qui sont les traces des droites dont l'angle mesure celui des plans P et Q; pour appliquer ici la méthode ordinaire (n° 115) nous prendrons I^h pour ligne de terre L'T' et nous chercherons la droite I sur ce plan vertical de projection, puis remarquant que V'^x doit être perpendiculaire à I, nous obtiendrons ainsi le sommet s de l'angle α demandé; nous rabattons ce sommet s sur le plan

horizontal en s' et l'angle cherché sera $xs'y$. Au lieu de trouver le sommet s par un changement de plan, on l'obtient aussi par un mouvement de rotation, en rabattant le plan vertical L'T' autour de sa trace verticale bb^h, alors le point a vient en a', le point o en o', l'intersection I en I' et la perpendiculaire os en $o's'$, on fait ensuite $o'\sigma = o's''$ puis $b^hs' = b^h\sigma$, on retrouve le point s', et l'on construit l'angle $\widehat{xs'y}$ qui est l'angle demandé.

Si l'on compare cette dernière solution avec celle donnée par les auteurs des divers traités de géométrie descriptive publiés jusqu'à ce jour, on verra qu'elle est identiquement la même, mais aussi on reconnaîtra que l'emploi de nos méthodes en simplifie considérablement l'explication, et la rend par conséquent beaucoup plus facile à saisir.

Il est bon de remarquer que la droite $os = os' = os's''$ est un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle osa ou $o's''a'$ dont la droite $oa = o'a'$ est l'hypoténuse, le point s est toujours entre les points o et a et par suite on a toujours $\widehat{xsy} < \widehat{xay}$.

7° Par la méthode précédente nous voyons que l'angle cherché est donné par le triangle xsy dont on connaît un côté xy, on pourrait chercher les deux autres côtés en rabattant les plans P et Q sur le plan horizontal; et rapportant sur les rabattements, 1° l'intersection I, et 2° les perpendiculaires menées sur cette intersection I par les points x et y; on aurait alors à construire un triangle dont on connaîtrait les trois côtés, et l'on devrait remarquer que les arcs de cercle décrits des points x et y comme centres et avec les deux côtés trouvés pour rayons doivent se couper en un point situé sur I^h. Nous aurons l'occasion de donner complétement cette construction en résolvant un autre problème.

8° Lorsque deux plans se coupent, ils forment quatre angles deux à deux opposés par le sommet et dont deux aigus sont égaux entre eux, et deux obtus sont aussi égaux entre eux; l'angle aigu est celui qu'on nomme l'angle des deux plans à moins que l'on ne fixe le sens vers lequel cet angle doit être compté. Cela posé, si d'un point quelconque on abaisse des perpendiculaires sur les deux plans, ces perpendiculaires forment aussi entre elles deux angles aigus et deux angles obtus, respectivement opposés par le sommet et qui sont respectivement égaux aux angles de même espèce compris entre les plans. On pourra donc trouver l'angle de deux plans en abaissant d'un même point de l'espace des perpendiculaires sur les deux plans proposés (n° 82), puis chercher l'angle de ces deux normales (n° 115). En général si d'un point pris dans l'intérieur d'un angle dièdre, on abaisse des perpendiculaires sur les faces de cet angle, ces droites comprennent entre elles un angle supplémentaire de l'angle dièdre.

Cette dernière méthode n'exige pas que l'on connaisse l'intersection des deux

plans; ce qui est quelquefois très-avantageux, car il peut arriver que la détermination des projections de cette droite d'intersection exige des constructions très-compliquées comme nous l'avons vu dans quelques cas.

128. Problème 30. *Diviser l'angle de deux plans P et Q en deux parties égales* (*fig.* 116). Si l'on suppose que le plan bissecteur S existe, il sera coupé par le plan X perpendiculaire à la droite I intersection des deux plans donnés P et Q suivant une droite sz perpendiculaire à I et au point s, ayant sa trace horizontale située sur H^x, et divisant l'angle α ou $\widehat{xsy}$ en deux parties égales. Il résulte de là qu'après avoir trouvé l'angle rabattu $\widehat{xs'y}$ (n° 127, 6°), il faut le diviser en deux parties égales par une droite coupant H^x en un point z, par lequel et par le point a doit passer la trace horizontale H^s du plan bissecteur cherché S, puis sa trace verticale V^s doit passer par le point b.

2° Si nous rabattons les plans P et Q (*fig.* 171) sur le plan horizontal par la seconde méthode connue (n° 76), en les faisant respectivement tourner autour de leur trace horizontale, leur intersection I viendra se placer respectivement en I′ et en I″; si dans chacun des deux plans P et Q on conçoit une droite A sur P et B sur Q également distantes de I, après le rabattement du plan P, la droite A (située dans ce plan) sera en A′ parallèle à I′; de même, après le rabattement du plan Q, la droite B (située dans ce plan) sera en B″ parallèle à I″; les droites A′ et B″ coupent respectivement les traces H^p et H^q en x et en y, de sorte que xy sera la trace horizontale du plan (A, B); si l'on divise xy en deux parties égales au point z, ce point z et le point a appartiendront à la trace horizontale H^s du plan bissecteur S, qui contient en outre une parallèle à I menée par le point z. Cette solution a, comme on voit, beaucoup d'analogie avec celle que nous avons donnée (n° 116), pour trouver la bissectrice de l'angle de deux droites sans chercher cet angle; les points e et d, situés sur les deux droites, à égale distance de leur point d'intersection m (n° 116), sont remplacés ici par les droites A et B situées sur les deux plans et à égale distance de leur intersection I; et le point n, milieu de la droite ed, est ici remplacé par une droite située sur le plan (A, B), et située à égale distance des deux droites A et B.

On pourrait encore remplacer les droites A et B parallèles à I par deux droites également inclinées sur I et la rencontrant en un même point; la bissectrice de l'angle de ces droites et l'intersection I, détermineraient le plan bissecteur. Le cas de deux plans parallèles n'est évidemment qu'un cas particulier de celui-ci.

3° Les normales aux deux plans donnés P et Q (n° 127, 2°) peuvent partir d'un point i de l'intersection I de ces deux plans; et si l'on conçoit le plan bissecteur, et que par ce même point i on lui élève aussi une normale, elle divisera en deux par-

ties égales l'angle des normales menées aux deux premiers plans P et Q par le point i; donc si nous cherchons la bissectrice de l'angle de ces deux normales (n° 115), cette bissectrice et l'intersection I des plans donnés détermineront le plan bissecteur demandé. Remarquons que le problème actuel ne peut se résoudre qu'autant que l'on connaît l'intersection I des deux plans donnés P et Q.

129. Nous terminerons cette série de questions par deux problèmes dont la solution se déduit immédiatement de celle donnée pour trouver l'angle de deux plans (n° 127, 6°).

PROBLÈME 31. *Étant données les traces horizontales* H^p *et* H^q *de deux plans* P *et* Q, *faisant entre eux un angle donné* α, *et la projection horizontale de leur intersection* I, *trouver leurs traces verticales* V^p et V^q (*fig.* 116). Menant H^x perpendiculaire à I^h, elle coupe H^p et H^q aux points x et y; pour avoir s', il faut sur xy décrire un segment capable de l'angle α, il coupera I^h au point s', décrivant un cercle C du centre o et du rayon os', menant du point a une tangente I à ce cercle, élevant $b^h\underline{b}$ perpendiculaire sur I^h, et prenant $b^hb = b^h\underline{b}$, nous obtiendrons le point b où se croisent les traces V^p et V^q. Il est évident que l'angle α ne doit pas être moindre que l'angle $\widehat{xay}$; s'il lui était égal, les deux plans seraient verticaux. On voit aussi qu'il y a deux solutions, puisque, du point a on peut mener deux tangentes au cercle C.

130. PROBLÈME 32. *Par une droite* I, *située sur un plan donné* P, *conduire un plan* Q *faisant avec le plan* P *un angle* α (*fig.* 116). Menons encore H^x perpendiculaire à I^h, déterminons I sur le plan vertical L'T', abaissons os perpendiculaire sur I, prenons $os' = os$, menons xs' puis ys' faisant avec xs' l'angle α, le point y appartiendra à H^q qui doit aussi passer par a, puis V^q sera conduit de q à b. On aura encore deux solutions, car on peut mener ys' de part et d'autre de xs'.

Des plus courtes distances.

131. PROBLÈME 33. *Trouver la plus courte distance d'un point à un autre point.* Elle est mesurée par la droite qui unit ces deux points, on est donc conduit à trouver la véritable longueur d'une portion de droite comprise entre deux points déterminés; or, 1° la projection verticale serait égale à la droite de l'espace, si celle-ci était parallèle au plan vertical (n° 56, 1°), c'est pourquoi nous prendrons un nouveau plan vertical parallèle à la droite, et, pour plus de simplicité, nous choisirons le plan qui projette horizontalement cette droite; alors la ligne de terre L'T' (*fig.* 106) ne sera autre que la projection horizontale D^h de la droite D; élevant donc sur cette ligne des perpendiculaires $m^hm = om^v$ et $n^hn = pn^v$, et joignant mn, nous aurons la droite D demandée. Si par le point n on mène nk parallèle à la projection horizon-

tale D^h on forme un triangle restangle mnk, dont les côtés sont respectivement égaux, savoir : nk à la projection horizontale $m^h n^h$, mk à la différence de hauteur des points m et n, au-dessus du plan horizontal ou à $(om^v - pn^v)$ (n° 5, 1°), et dont l'hypoténuse est la longueur de la droite cherchée. De là on conclut une opération graphique très-simple pour construire la droite demandée.

2° La droite D serait donnée en véritable grandeur par sa projection horizontale si elle était parallèle au plan horizontal, nous pouvons donc aussi changer de plan horizontal de projection pour le prendre parallèle à D, et pour plus de simplicité nous prendrons encore pour nouveau plan horizontal de projection le plan projetant verticalement cette droite D; la ligne de terre L″T″ est alors confondue avec D^v, et nous devons prendre, sur des perpendiculaires à cette ligne, $m^v\underline{m} = om^h$ et $n^v\underline{n} = pn^h$. En menant $\underline{ml}$ parallèle à D^v nous formons un triangle rectangle $\underline{mnl}$, dont l'hypoténuse est encore la longueur de la droite D, et dont les côtés de l'angle droit sont respectivement égaux, savoir : $\underline{ml}$ à la projection verticale $m^v n^v$, et $\underline{nl}$ à la différence des distances des points m et n au plan vertical ou à $(pn^h - om^h)$ (n° 5, 2°).

3° Au lieu de rendre la droite D parallèle au plan vertical en changeant de plan vertical de projection, on peut faire tourner cette droite D autour d'un axe vertical A jusqu'à ce qu'elle ait atteint cette position (n° 61). Pour plus de simplicité nous choisirons l'axe A passant par l'un des points donnés, par le point m, par exemple, la droite viendra alors en D′, et sa véritable grandeur sera donnée par sa projection D'^v.

4° Enfin, on pourra ramener la droite D à être parallèle au plan horizontal, en la faisant tourner autour d'un axe A′, perpendiculaire au plan vertical, et que nous choisirons, pour plus de simplicité, passant par le point n; la droite D viendra prendre la position D″, et sera donnée en vraie grandeur par sa projection horizontale D''^h.

Si l'on emploie sur la même figure les quatre méthodes précédentes, on doit évidemment avoir :

$$mn = \underline{mn} = m^v n'^v = n^h m''^h.$$

132. Problème 34. *Trouver la distance des traces d'une droite.* Ce problème ne diffère en rien du précédent ; il suffit de prendre les traces a et b de la droite, au lieu de deux points quelconques m et n de cette droite. On le résoudra donc par les mêmes méthodes.

1° Prenant D^h (*fig.* 105) pour nouvelle ligne de terre L′T′, nous trouverons la

droite $\underline{D}$ située sur le nouveau plan vertical défini par cette ligne de terre L'T' ; le point *a* appartient par conséquent à cette droite.

2° Changeant de plan horizontal et prenant D^v pour nouvelle ligne de terre L''T'', nous trouverons $\underline{\underline{D}}$.

3° Si l'on fait tourner la droite D autour de l'axe A, elle viendra prendre la position D'.

4° Enfin, si on la fait tourner autour de l'axe A', elle viendra prendre la position D''.

Il est évident que l'on doit avoir :

$$a\underline{b} = \underline{a}\underline{b} = a'b = ab'',$$

ces quatre lignes représentant également la longueur de la droite D située dans l'espace.

133. Problème 35. *D'un point* m *situé sur un plan donné* P, *mener à la trace horizontale de ce plan une droite de longueur donnée.* On donne (*fig.* 118) la projection horizontale m^h du point *m*, on en conclut sa projection verticale m^v (n° 29), en faisant passer par ce point une horizontale K du plan P. Cela fait : 1° Concevons la droite D placée sur le plan P, et faisons-la tourner autour d'un axe vertical A, jusqu'à ce qu'elle soit parallèle au plan vertical de projection, elle se projettera sur ce plan dans sa véritable longueur *l* (n° 56, 1°), et, dans le retour, sa projection horizontale conservant toujours la même longueur, et devant se terminer sur H^r, le point *o* où le cercle C rencontre H^r est un point de la droite dont la position se trouve ainsi déterminée. Il y a une seconde solution en *b*. Il n'y aurait qu'une solution, si le cercle C était tangent à H^r. Le problème serait impossible, si la droite A^h était plus courte que la perpendiculaire abaissée du point A^h sur H^r.

2° Il pourrait arriver (*fig.* 119) que la droite *l*, menée de m^v, ne pût rencontrer LT qu'au delà des limites du dessin ; dans ce cas nous remarquerons qu'on peut diviser la droite D en parties égales, et, si des points de division, on conçoit des plans horizontaux (qui seront équidistants), ces plans couperont la partie de l'axe A comprise entre le point *m* et le plan horizontal de projection en un même nombre de parties égales, et le plan P suivant des horizontales équidistantes. Divisons, par exemple, la hauteur du point *m* au-dessus du plan horizontal de projection en deux parties égales, menons un plan horizontal X, qui coupe le plan P suivant l'horizontale R, et achevons par rapport à cette horizontale la construction effectuée ci-dessus par rapport à la ligne de terre, en portant seulement $\frac{1}{2}\,l$ du point m^v à la projection verticale R^v de l'horizontale, nous obtiendrons les deux droites D et B, qui satisfont toutes deux à la question.

3° Enfin, on peut résoudre la même question, en rabattant le plan P (*fig.* 120) sur le plan horizontal, ou en le prenant pour l'un des plans de projection, et cela par l'une des quatre méthodes connues (n° 76); nous n'exécuterons ici que la seconde; il sera facile de tracer les *épures* des trois autres. Le point m vient se rabattre en m', décrivant de ce point comme centre et avec un rayon égal à l un arc de cercle qui coupe H^r en x et y, joignant ces points x et y avec m^h, on aura les projections horizontales B^h et D^h des droites B et D qui satisfont à la question, on en conclut facilement leurs projections verticales (n° 28).

134. On résoudrait ainsi la question suivante, savoir: *Mener du point* m *à une droite donnée de position une droite de longueur donnée;* car il suffirait de faire passer un plan par la droite donnée et par le point m, de rabattre ce plan, d'y rapporter le point m et la droite donnée, de construire la droite demandée sur ce plan rabattu et de revenir ensuite aux projections de cette droite.

Enfin, on résoudrait de la même manière le problème: *Mener par un point donné* m *une droite qui fasse un angle donné avec la trace horizontale ou toute autre droite du plan* P.

135. Problème 36. *Trouver la plus courte distance d'un point à une droite.* C'est construire la perpendiculaire abaissée du point sur la droite.

1° On pourra donc résoudre ce problème, en faisant passer un plan P par la droite donnée D et le point donné m, rabattant le plan P sur le plan horizontal (n° 76), puis abaissant de m' une perpendiculaire N' sur D', on aura la distance demandée; si l'on veut avoir les projections de N' sur les plans primitifs, on reportera le point x', intersection de N' et D', en x sur D et par un mouvement en sens contraire du rabattement.

2° Au lieu de rabattre le plan (D,m) (*fig.* 121) sur le plan horizontal, on peut le faire tourner autour de l'une de ses horizontales A jusqu'à ce qu'il soit devenu horizontal; nous ferons passer l'horizontale par le point m, donc A^v passera par m^v et sera parallèle à LT, elle rencontrera D^v en un point b^v, d'où l'on conclut b^h et par suite A^h. Pour faire tourner le plan (D,m) autour de A comme axe, il faut d'abord prendre un nouveau plan vertical de projection L'T' perpendiculaire à cet axe (n° 73), nous trouverons sur ce plan les projections $m^{v'}$ et $D^{v'}$; il est visible que les points $m^{v'}$ et $b^{v'}$ coïncideront avec le point $A^{v'}$, projection verticale de l'axe; on voit aussi que la droite $aa^{v'}$ sera la trace horizontale H^r du plan P. Faisant ensuite tourner la droite D jusqu'à ce qu'elle soit devenue horizontale, le point b restera invariable, la projection verticale devra être parallèle à L'T' et passer par $b^{v'}$. Pour avoir la projection horizontale, nous prendrons sur D un point quelconque n, qui, pendant la rotation, décrira un cercle C et viendra se placer après la rotation en n'; joignant n'^h avec b^h nous aurons D'^h. Si, maintenant, on abaisse de m^h une

perpendiculaire N′ sur D'^h, elle donnera en vraie longueur la distance du point m à la droite D ; si l'on veut avoir les projections sur les plans primitifs de la plus courte distance, nous remarquerons que la perpendiculaire N′ rencontre D'^h en un point x'^h, d'où l'on conclut x^h par une parallèle à L′T′, puis on aura x^v ; et joignant les projections du point x à celles du point m, nous aurons en $m^h x^h$ et en $m^v x^v$ les projections de la plus courte distance N, dont on a la véritable grandeur en $N' = \overline{m^h x'^h}$.

Remarquons que, si l'on prend sur le plan vertical L′T′ les projections $x'^{v'}$ et $x^{v'}$ des points x' et x, on doit avoir, comme vérifications de l'exactitude de la figure :

$$m^{v'}x'^{v'} = m^{v'}x^{v'} \quad \text{et} \quad ix^{v'} = ix^v.$$

3° On peut résoudre aussi ce problème par deux changements de plans, ou deux mouvements de rotation ; pour cela remarquons que si la droite D (*fig.* 122) était perpendiculaire au plan horizontal, la normale N serait horizontale, et par conséquent égale à sa projection horizontale (n° 56, 1°) ; il faut donc la ramener dans cette position particulière. On y parviendra en prenant d'abord un plan vertical parallèle à D ou passant par cette droite, puis un plan horizontal perpendiculaire à D ; $N^{h''}$ sera la distance demandée. Pour revenir ensuite aux projections de la droite N sur les plans primitifs, on remarquera que $N^{v'}$ doit être parallèle à L″T″, elle rencontre D en un point x, dont on trouve de suite la projection horizontale x^h, on en conclut x^v d'où résultent N^h et N^v. On exécutera facilement la figure ou *épure* en employant 1° deux mouvements de rotation ou 2° un mouvement de rotation et un changement de plan de projection.

4° Après avoir changé de plan vertical de projection, pour rendre la droite D parallèle à ce nouveau plan, nous pouvons remarquer que la normale N et la droite D étant perpendiculaires entre elles dans l'espace, et l'une d'elles D étant parallèle au plan vertical L′T′, leurs projections verticales $N^{v'}$ et $D^{v'}$ doivent être perpendiculaires entre elles ; nous mènerons donc par le point $m^{v'}$ une perpendiculaire sur D, ce sera $N^{v'}$, elle rencontre D en un point x dont nous construisons la projection horizontale x^h sur D^h, puis la projection verticale x^v sur D^v, et joignant x^h avec m^h, x^v avec m^v, nous aurons les projections N^h et N^v de la plus courte distance demandée. Il reste à en trouver la vraie longueur, ce qui est facile en vertu de ce qui a été dit (n° 131).

5° La perpendiculaire abaissée du point m sur la droite D (*fig.* 123) est située sur un plan P perpendiculaire à D, et passant par le point m ; nous construirons donc ce plan (n° 83). Cherchant ensuite l'intersection x de la droite D et du plan P au moyen d'un plan auxiliaire X (n° 110), et joignant xm, nous aurons la droite demandée, dont nous trouverons la véritable grandeur en N'^v (n° 131, 3°).

On pourrait faire passer le plan auxiliaire X par le point m, son intersection N avec le plan P ne serait autre que la droite demandée, dont la portion xm est la distance du point m à la droite D. On construirait ensuite la véritable grandeur de cette distance en N^h. Si les traces du plan auxiliaire X ne sont pas dans les limites du dessin, on le considérera comme donné par les droites D et D′, et l'on cherchera son intersection avec le plan P (n° 111).

136. Problème 37. *Trouver la plus courte distance d'un point à un plan.* 1° Cette distance est mesurée par une perpendiculaire N, abaissée du point donné m sur le plan donné P; or, les projections N^h et N^v sont respectivement perpendiculaires à H^p et à V^p (n° 81); elles sont donc connues. Cherchant l'intersection x de la normale N et du plan P (n° 119), la portion mx de cette droite exprimera la distance demandée. On exécutera facilement la figure.

2° Si le plan P était perpendiculaire au plan vertical, le point x aurait sa projection verticale x^v sur V^p (n° 56, 2°), de plus la normale N serait parallèle au plan vertical, et par conséquent égale à sa projection verticale N^v, c'est pourquoi nous nous ramènerons à ce cas particulier par un changement de plan vertical de projection comme on peut le lire facilement sur la *fig.* (124).

3° On pourrait aussi employer à cet effet un mouvement de rotation comme le représente la *fig.* 125, dans laquelle pour simplifier les constructions nous avons fait passer l'axe A par le point donné m. En revenant aux projections primitives, on trouve séparément x^h et x^v, ces deux points doivent donc être sur une même perpendiculaire à LT (n° 8); ce qui sert à vérifier l'exactitude des constructions.

137. Problème 38. *Trouver la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan.* Si l'une des droites A (*fig.* 126) était perpendiculaire au plan horizontal, la plus courte distance N serait horizontale et par conséquent égale à N^h. De plus N^h sera dans ce cas perpendiculaire à B^h projection horizontale de la seconde droite donnée B, puisque N est perpendiculaire au plan vertical Y passant par la droite B dont la projection B^h est en même temps la trace horizontale H^Y; on obtiendra donc facilement cette plus courte distance.

On peut se ramener à ce cas particulier par plusieurs opérations : 1° par deux changements de plan de projection;

2° Par un changement de plan et un mouvement de rotation;

3° Par un mouvement de rotation et un changement de plan de projection;

4° Par deux mouvements de rotation;

Nous allons les exposer successivement.

1° Soient A et B (*fig.* 127) les deux droites dont on cherche la plus courte dis-

tance; pour ramener la droite A dans la position précédente, il faut choisir un nouveau plan horizontal perpendiculaire à A; mais ce plan ne serait pas perpendiculaire au plan vertical (*primitif*) de projection, c'est pourquoi il faut prendre d'abord un nouveau plan vertical de projection parallèle à cette même droite A; pour plus de simplicité, nous choisirons son plan projetant, alors L'T' coïncidera avec A^h; nous en déduirons les projections verticales $\underline{A}$ et B^v (n° 46). Nous prendrons ensuite un nouveau plan horizontal de projection perpendiculaire à $\underline{A}$, en menant L''T'' perpendiculaire à $\underline{A}$, nous trouverons $A^{h''}$ et $B^{h''}$; puis abaissant de $A^{h''}$ la perpendiculaire $N^{h''}$ et $B^{h''}$, ce sera la plus courte distance demandée; elle se termine sur A et B aux points y et x, dont on trouvera successivement les projections $y^{h''}$ et $x^{h''}$, $y^{h'}$ et $x^{v'}$, y^h et x^h, enfin y^v et x^v. Par suite on aura N^h et N^v.

2° Après avoir changé comme ci-dessus de plan vertical de projection on peut faire tourner le système autour d'un axe perpendiculaire à ce nouveau plan vertical, jusqu'à ce que la droite A soit devenue perpendiculaire au plan horizontal qui ne change pas. Pour cela il conviendra de mener l'axe de rotation par un point de la droite A; cette droite étant venue dans sa nouvelle position A' après avoir décrit l'angle α, il faut faire tourner la droite B du même angle α (n° 61) pour l'amener en B'; la perpendiculaire N'^h abaissée du point A'^h sur la droite B'^h sera la plus courte distance demandée; remarquons que $N'^{v'}$ est parallèle à L'T'; ayant obtenu les points x' et y' en lesquels la plus courte distance N' coupe B' et A', on ramènera ces points sur les droites B et A, en x et y, ce qui donnera les projections N^h et N^v de la plus courte distance N.

3° Si nous faisons tourner les droites A et B autour d'un axe vertical coupant A, jusqu'à ce que cette droite A soit venue dans une position A' parallèle au plan vertical de projection, elle aura décrit un angle α; faisant donc décrire à la droite B le même angle, elle viendra prendre une position B' (n° 59). Si ensuite nous choisissons un nouveau plan horizontal de projection perpendiculaire à A, la nouvelle ligne de terre L'T' devra être perpendiculaire à A'^v, la projection horizontale de la droite A' sera en un seul point $A'^{h'}$; nous trouverons aussi $B'^{h'}$ (n° 46). La plus courte distance demandée sera donc la perpendiculaire $N'^{h'}$, abaissée du point $A'^{h'}$ sur la droite $B'^{h'}$. Nous reviendrons comme précédemment aux projections N^h et N^v de la plus courte distance N.

4° Pour résoudre le problème par deux mouvements de rotation, nous ferons d'abord tourner le système des droites A et B autour d'un axe vertical, comme dans le cas précédent pour les amener en les positions A' et B'; puis nous ferons tourner le système des droites A' et B' autour d'un axe perpendiculaire au plan vertical, comme dans le quatrième cas.

Il est évident qu'on pourrait également ramener la droite A à être perpendicu-

laire au plan vertical, en la rendant d'abord parallèle au plan horizontal. Il sera facile d'exécuter les figures de tous ces cas.

5° On peut encore résoudre directement le problème de la plus courte distance entre deux droites, sans changer la position où elles ont été données et en conservant les plans primitifs de projection. Pour cela, rappelons d'abord que l'on démontre, en géométrie élémentaire, qu'on peut toujours mener une perpendiculaire commune à deux droites A et B (*fig.* 128) non situées dans un même plan, qu'on n'en peut mener qu'une, et que cette perpendiculaire est la droite la plus courte qui joigne un point de A à un point de B. On a vu que la construction consiste à mener par un point *m* de B une droite A' parallèle à A; à faire passer par A' et B un plan qui est parallèle à A; à abaisser par un point quelconque *n* de A une perpendiculaire K sur ce plan (B, A'); à faire passer un second plan par les droites A et K; à chercher l'intersection I des plans (B, A') et (A, K); enfin à mener par le point *x*, intersection de I et B, une droite N parallèle à K et rencontrant A en un point *y*; cette droite N mesure la plus courte distance demandée. Ce sont toutes ces constructions qu'il faut exécuter par le secours des projections.

Soient A et B (*fig.* 129) les droites données, prenons un point quelconque *m* sur B et par ce point menons une droite A' parallèle à A; A'^h sera parallèle à A^h, et A'^v sera parallèle à A^v; faisons passer un plan P par A' et B, H^p passera par les traces horizontales *a'* et *b* de ces droites, et V^p passera par leurs traces verticales α et β; prenons ensuite un point quelconque *n* sur A et de ce point abaissons une perpendiculaire K sur le plan P; K^h sera perpendiculaire à H^p et K^v sera perpendiculaire à V^p; faisons passer un plan Q par les droites K et A, H^q passera par leurs traces horizontales *k* et *a*, et V^q par la trace verticale α et par le point où H^q rencontre LT; les traces de l'intersection I de ces plans P et Q sont en *p* et *q*; cette droite I est donc connue, et comme elle est parallèle à A, il faut, si les opérations graphiques sont exactes que I^h soit parallèle à A^h et I^v à A^v; enfin cette intersection I coupe B en un point *x*, d'où l'on mènera la droite N parallèle à K jusqu'à sa rencontre *y* avec A; et l'on aura en N la plus courte distance demandée. Nous aurons la véritable longueur de cette plus courte distance N en la faisant tourner autour d'un axe vertical passant par le point *y*, jusqu'à ce qu'elle soit venue dans la position N' parallèle au plan vertical de projection, de sorte que sa vraie longueur sera donnée par N'^v.

La construction générale précédente n'est pas toujours possible, car il peut arriver que les traces du plan P n'aient aucun point dans les limites du dessin, mais comme on n'en a besoin que pour mener la normale K au plan P, on peut substituer à H^p une horizontale quelconque que l'on obtient en coupant le système des droites A et B par un plan horizontal, et pareillement on peut substituer à V^p une verticale du plan P que l'on obtient de même en coupant le système de ces

droites par un plan parallèle au plan vertical. On peut aussi considérer le plan Q comme suffisamment donné par les droites A et K.

Mais il pourrait arriver que la normale commune sortît des limites du dessin, on ne pourrait alors la trouver qu'en se ramenant au cas particulier considéré dans les premières solutions données ci-avant; de plus, par les quatre méthodes que nous avons exposées tout d'abord, on pourra trouver la plus courte distance des deux droites, tant que les projections de cette plus courte distance ne sortiront pas des limites du dessin, car on peut choisir les nouveaux plans de projection ou les axes de rotation de manière que les projections des droites A et B soient reportées aux extrémités de la feuille de dessin.

Ces méthodes sont encore préférables sous le point de vue graphique, en ce que, dans les changements de plans, on n'a que des ouvertures de compas à porter et des perpendiculaires aux lignes de terre à tracer; et dans les mouvements de rotation, les lignes que l'on doit construire se coupent toujours sous des angles droits.

138. Problème 39. *Étant données une droite* A, *la projection horizontale* B^h *d'une seconde droite* B, *et celle* N^h *de la plus courte distance* N *entre* A *et* B, *trouver les projections verticales* B^v *et* N^v *des droites* B *et* N, *et la vraie grandeur de la droite* N. La plus courte distance devant être perpendiculaire à la droite A, qu'elle rencontre en un point x connu, nous déterminerons N^v par la méthode exposée précédemment (n° 86), puis cette même droite N devant aussi être perpendiculaire à la droite B, qu'elle rencontre au point y actuellement déterminé, la même méthode nous fera trouver B^v. Enfin, connaissant les extrémités x et y de la plus courte distance N entre les droites A et B, nous en conclurons sa véritable grandeur (n° 131).

139. Problème 40. *Étant données, une droite* A, *la projection horizontale* B^h *d'une seconde droite* B, *la vraie longueur de la plus courte distance* N *entre les deux droites* A *et* B, *ainsi que le point* x *où elle rencontre la droite donnée* A, *trouver la projection verticale* B^v *de la droite* B, *et les deux projections de la plus courte distance* N (*fig.* 130). La droite N devant être perpendiculaire à A sera située dans un plan P, mené par le point x perpendiculairement à cette droite A (n° 85); si nous rabattons ce plan P sur le plan horizontal, le point x viendra en x', et la droite N sera l'un des rayons d'une circonférence de cercle C' décrite du point x' comme centre et avec un rayon égal à la longueur donnée de la droite N. Si, en supposant la droite N entraînée dans le mouvement du plan P, on connaissait la position qu'elle occupe actuellement, sa nouvelle trace horizontale devrait se trouver sur le cercle C', et ferait connaître la position de la droite N'; on aurait donc le point y', d'où l'on conclurait le point y; mais puisque ce point y doit se trouver à la fois sur la droite B et sur la circonférence rabattue en C', cherchons la projection C^h de cette circonférence, elle coupe B^h en deux points y^h et z^h, qui sont les projections horizontales de deux

points, satisfaisant à la question proposée; nous aurons donc les deux projections horizontales N^h et K^h, d'où nous conclurons N^v et K^v, et, par suite, nous connaîtrons y^v et z^v; il n'y aura plus qu'à déterminer B^v de manière à ce que la droite B, passant par le point x, soit perpendiculaire à N; ou bien nous déterminerons D^v de manière à ce que la droite D passant par le point z soit perpendiculaire à K (nº 86), et les droites B et D satisferont à la condition d'avoir pour projections horizontales la même droite B^h, et d'être à la distance donnée de la droite A.

140. La construction de la courbe C^h ne peut ici se faire que par points, nous verrons plus loin que cette courbe est une ellipse, et que, par conséquent, elle ne peut couper B^h qu'en deux points.

Si le point x n'était pas donné, on pourrait le prendre partout où l'on voudrait sur la droite A, et répétant pour chacun de ces points x..... la construction précédente, on obtiendra une série de plans P..... parallèles entre eux, les cercles C..... égaux entre eux formeront donc une surface cylindrique de révolution ayant pour axe la droite A. Tous les points de B^h, compris dans la projection horizontale de cette surface cylindrique, pourront représenter le point y^h. Nous reviendrons dans un autre endroit de ce cours sur ce problème, pour la résolution complète duquel nous n'avons pas encore acquis les connaissances nécessaires. Mais si nous l'avons présenté ici, c'est pour faire comprendre la nécessité d'étudier ce qui est relatif aux courbes et aux surfaces avec tous les développements nécessaires, ainsi que nous l'avons fait pour le point, la droite et le plan.

140 (*bis*). Remarque, au sujet des problèmes relatifs : 1° aux angles que font entre eux les droites et les plans, et 2° aux plus courtes distances entre les points, les droites et les plans.

La méthode du changement des plans de projections n'est pas une innovation, les anciens *appareilleurs* et *charpentiers* en faisaient un fréquent usage. On ne peut ignorer que dans les applications on a sans cesse besoin de faire des *coupes;* or, qu'est-ce qu'une *coupe*, si ce n'est un changement de plan de projection.

En *fortification* et en *coupe* des pierres, on est sans cesse obligé de recourir à ce que l'on appelle le *plan de profil*, or le plan de profil n'est autre chose qu'un nouveau plan vertical de projection auquel on est obligé de rapporter la position du système donné dans l'espace, pour pouvoir résoudre avec plus de facilité certains problèmes proposés sur ce système.

Quand il s'agit : 1° de l'angle de deux plans, ou 2° de l'angle d'une droite et d'un plan, il est souvent préférable de chercher dans le *premier problème* l'angle de deux normales aux plans donnés, et dans le *second problème* l'angle de la droite donnée et d'une perpendiculaire au plan donné; mais ne donner que ce seul mode de solution ne me paraît pas être une bonne chose dans l'enseignement. Il faut

connaître toutes les méthodes qu'il est possible d'employer pour la solution d'un problème posé en toute sa généralité, et il faut ensuite savoir chercher entre toutes les méthodes celle qui doit être préférée dans le cas particulier que l'on a à résoudre; les données du problème doivent déterminer ce choix.

Quant au problème de la plus courte distance entre deux droites, je dirais : La méthode donnée par Monge, dans son traité de géométrie descriptive, n'a été employée par lui que pour montrer comment la géométrie descriptive pouvait *calquer* les constructions *graphiques* successives sur la marche *analytique* suivie en algèbre pour résoudre un problème de géométrie.

Il n'a *opéré* ainsi que pour faire voir l'accord parfait qui existe entre la langue *algébrique* et la langue *graphique*.

Mais on aurait très-grand tort de conclure de là que la géométrie descriptive ne peut que construire *graphiquement* les résultats géométriques fournis par l'*analyse*. C'est une grave erreur qui a eu *cours* assez longtemps, et trop longtemps pour l'intérêt des *services publics*, et dont ont gémi les véritables ingénieurs, les seuls qui comprenent bien toute la puissance et toute l'utilité de la *géométrie descriptive*, géométrie nouvelle qui, depuis Monge et grâce à lui, doit être reconnue comme étant *une véritable science*. Ne l'oublions pas, il y a l'*art* des projections; c'est ce que savaient et pratiquaient admirablement les anciens constructeurs de nos églises gothiques; mais depuis Monge, il y a *la science* des projections, que tout ingénieur doit savoir et pratiquer.

CHAPITRE IV.

DES ANGLES TRIÈDRES ET DES PYRAMIDES.

---

141. Problème général. *Étant donné un angle trièdre, trouver par une construction plane les plans et les angles dièdres qui la composent.*

Prenons une des faces de l'angle trièdre pour plan horizontal (en supposant cette face prolongée indéfiniment), puis coupons cet angle par un plan vertical

quelconque, de sorte que les plans des deux autres faces soient P et Q (*fig.* 131) et leur intersection I; l'un des angles plans sera donné en A (angle que font entre elles les droites H^P et H^Q), nous aurons les deux autres angles, celui que font entre elles les droites I et H^P et celui que font entre elles les droites I et H^Q en rabattant les deux faces P et Q sur le plan horizontal (nº 76) en les faisant tourner respectivement autour de leur trace horizontale, savoir : H^P et H^Q. Nous prendrons les nouveaux plans verticaux de projections passant par la trace verticale b de l'intersection I, de sorte que les lignes de terre L'T' et L''T'' passeront l'une et l'autre par $\underline{b}^h$ projection horizontale de la trace verticale $\underline{b}$ de l'intersection I; cette intersection I se rapporte sur les plans rabattus en I' et en I''. Il est évident que $ab' = ab''$, puisque ces deux longueurs représentent également la portion ab de l'intersection I. Si l'on tire des droites pb' et qb'', elles représentent les traces verticales pb et qb déjà données en véritable grandeur : on doit donc avoir $pb' = pb$ et $qb'' = qb$. Il est évident qu'on a les trois angles plans $A = \widehat{paq}$, $B = \widehat{pab'}$, $C = \widehat{qab''}$. Le plan P étant perpendiculaire au plan vertical L'T' et Q au plan L''T'', les angles de ces plans avec le plan horizontal ou les angles dièdres γ et β sont donnés respectivement en $\widehat{\underline{b}p'b^h}$ et $\widehat{\underline{b}q''b^h}$. Il reste à trouver l'angle α, que font entre elles les faces B et C; mais cet angle est mesuré par l'angle de deux perpendiculaires passant par un même point de la droite I et tracées dans chacun des deux plans P et Q; ces perpendiculaires rapportées sur ces plans rabattus seront perpendiculaires à I' et I'' et en des points m' et m'' également distants du point a trace horizontale de la droite I; elles vont rencontrer H^P et H^Q aux points x et y; si on joint ces deux points, il est clair que la droite xy représentera la trace d'un plan perpendiculaire à I; elle doit donc être perpendiculaire à I^h; et si l'on rabat ce plan autour de sa trace xy, le sommet de l'angle cherché ne sortira pas du plan vertical dont I^h serait la trace, ses côtés se rabattront en véritable grandeur : donc si des points x et y, avec les rayons $\overline{xm'}$ et $\overline{ym''}$, on décrit des arcs de cercle, ils devront se croiser en un point s situé sur I^h que l'on joindra aux points x et y, et $\widehat{ysx}$ sera l'angle α demandé.

142. Ce problème général établi, il est facile de résoudre les divers problèmes particuliers sur l'angle trièdre : ils sont au nombre de six. Nommant toujours A, B, C les trois angles plans, et α, β, γ les angles dièdres qui leur sont respectivement opposés, on peut avoir les six combinaisons suivantes :

données.	inconnues.	données.	inconnues.
A, B, C	α, β, γ	α, β, γ	A, B, C
A, B, γ	α, β, C	α, β, C	A, B, γ
A, B, β	α, γ, C	α, γ, C	A, B, β

Les trois derniers cas se ramènent aux trois premiers, au moyen de l'angle trièdre supplémentaire. On sait en effet que, si d'un point pris dans l'intérieur d'un angle trièdre on abaisse des perpendiculaires sur les faces de cet angle et que l'on fasse passer des plans par ces droites, on forme un second angle trièdre dont les angles plans sont les suppléments des angles dièdres opposés du *trièdre* proposé, et dont les angles dièdres sont les suppléments des angles plans opposés de ce même trièdre proposé. C'est cette relation qui a fait donner à ces deux angles trièdres le nom d'*angles trièdres supplémentaires.*

D'après cela, nommant A', B', C' les angles plans, et α', β', γ' les angles dièdres du second angle trièdre, on aura :

$$A' = 180° - \alpha, \; B' = 180° - \beta, \; C' = 180° - \gamma;$$
$$\alpha' = 180° - A, \; \beta' = 180° - B, \; \gamma' = 180° - C.$$

Donc si l'on donne, par exemple, α, β, γ, on en conclura les angles plans A', B', C', à l'aide desquels on déterminera α', β', γ', comme nous allons l'indiquer, puis on en conclura A, B, C. Il en serait de même des deux autres cas. Avec ce que nous savons, l'on peut directement et sans employer l'angle trièdre supplémentaire, résoudre cinq des six problèmes proposés, mais celui où l'on donne les trois angles dièdres est le seul qui échappe aux méthodes enseignées précédemment ; nous le résoudrons ailleurs.

143. Problème 1. *Étant donnés les trois angles plans, qui composent un angle trièdre, trouver les trois angles dièdres.*

1° Nous prendrons toujours le plan de l'une des faces pour le plan horizontal, les côtés de l'angle A (*fig.* 132) situé sur cette face (supposée prolongée pour former le plan horizontal de projection) représenteront les traces horizontales H^{r} et H^{e} des plans des deux autres faces, que nous supposerons rabattues sur le plan horizontal et en les angles B et C, placés de part et d'autre de l'angle A (n° 141). Leur intersection sera donnée en I' et I'' et un point quelconque b de cette intersection se sera porté sur I' et I'' à la même distance du point a ; si donc on prend $ab' = ab''$ et que par b' et b'' on mène des perpendiculaires à H^{r} et H^{e}, ce seront les lignes de terre L'T' et L''T'' du problème général (n° 141) ; elles se croisent en un point b^{h}, qui appartient à I^{h} ; le point b est donné sur les deux plans verticaux de projection en $\underline{b}$ et $\underline{\underline{b}}$, car il doit se trouver sur une perpendiculaire élevée du point b^{h} à L'T' ou L''T'', et sur le cercle décrit du centre b^{h} avec $b^{h}b'$ ou $b^{h}b''$ pour rayon. Il faut évidemment que $b^{h}\underline{b} = b^{h}\underline{\underline{b}}$. On est ainsi ramené au problème général, car on pourrait trouver V^{r} et V^{e} sur un plan vertical quelconque LT.

2° Si deux des trois angles plans sont égaux, les deux angles dièdres opposés

sont aussi égaux; en effet, prenons pour plan horizontal celui du troisième angle A, et construisons les deux angles égaux B et C à gauche et à droite de A, comme précédemment; il est évident que, dans l'hypothèse actuelle, les triangles $ap'b'$ et $aq''b''$ sont égaux, puisqu'ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, donc $b'p'=b''q''$; puis les triangles rectangles $p'\underline{b}b^h$ et $q''\underline{\underline{b}}b^h$ sont égaux, car $p'\underline{b}=q''\underline{\underline{b}}$ et $\underline{b}b^h=\underline{\underline{b}}b^h$, dond $\hat{\gamma}=\hat{\beta}$.

3° Si, de plus, les angles égaux B et C sont droits, les angles dièdres opposés β et γ sont aussi droits. En effet, dans ce cas il est facile de voir que L'T' et L''T'' se confondent respectivement avec I' et I''; par suite, les points a, p', q'', b^h coïncident, les droites $b^h\underline{b}$ et $b^h\underline{\underline{b}}$ se portent respectivement sur H' et H'', les points $\underline{b}$ et $\underline{\underline{b}}$ se trouvent sur ces mêmes droites, et, par conséquent, les angles $\widehat{\underline{b}p'b^h}=\hat{\alpha}$ et $\widehat{\underline{\underline{b}}q''b^h}=\hat{\beta}$ sont droits.

4° Si les trois angles A,B,C, sont égaux, les trois angles dièdres $\alpha,\beta.\gamma$, sont aussi égaux; car, à cause de $\hat{A}=\hat{B}$ on aura $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$, puis $\hat{B}=\hat{C}$ donne $\hat{\beta}=\hat{\gamma}$, donc $\hat{\alpha}=\hat{\beta}=\hat{\gamma}$.

5° Si les angles A, B et C sont droits, les angles α, β, γ, seront aussi droits, on le prouverait de la même manière que ci-dessus.

6° Mais il est facile de reconnaître que l'un des angles A, B ou C étant droit ne détermine rien de particulier pour l'angle dièdre opposé.

144. On sait par la Géométrie élémentaire que les angles A, B, C ne peuvent être les trois angles plans d'un angle trièdre qu'autant que leur somme est moindre que quatre angles droits, et que chacun d'eux est plus petit que la somme des deux autres. La construction précédente conduit aux mêmes conditions. En effet:

1° Dans le problème général, L'T' et L''T'' (*fig.* 131) ne pouvant se couper qu'au point b^h, I' et I'' laissent toujours un angle $\widehat{b'ab''}$ qui n'entre pas dans la somme (A + B + C), donc cette somme est moindre que quatre angles droits;

2° Si l'un des angles A était plus grand que la somme des deux autres, le point b^h serait en dehors des deux circonférences et par conséquent les perpendiculaires élevées par ce point sur les lignes de terre L'T' et L''T'' ne les rencontreraient jamais.

145. Problème 2. *Connaissant deux angles plans d'un angle trièdre et l'angle dièdre compris, trouver le troisième angle plan et les deux autres angles dièdres.* Prenons toujours le plan de l'une des faces connues, celle de l'angle plan A par exemple, pour plan horizontal, et supposons (*fig.* 132) l'autre face donnée B rabattue autour de H'; ayant pris L'T' perpendiculaire sur H', la trace V'' sera connue, car elle doit

faire avec L'T' l'angle dièdre γ donné, donc le point b' dans le retour de ce plan P se porterait en $\underline{b}$, dont la projection horizontale est b^h ; on aura donc I^h, et par conséquent on rentre de nouveau dans le problème général (n° 141), car on connaît H^q et prenant une ligne de terre quelconque passant par b^h, on trouvera le point b par lequel doit passer V^q.

146. Problème. 3. *Connaissant une face d'un angle trièdre et les angles dièdres adjacents, trouver les deux autres angles plans et le troisième angle dièdre.* Prenant pour plan horizontal celui de la face connue A (*fig.* 133), les côtés de cet angle seront les traces H^p et H^q des plans des deux autres faces, que nous rapporterons à deux plans verticaux L'T' et L''T'' qui leur soient respectivement perpendiculaires, de sorte que V'^p et V''^q feront chacune avec la ligne de terre correspondante les angles dièdres connus β et γ. Tout consiste à trouver la projection I^h de l'intersection de ces deux plans, ce que nous avons appris à faire (n° 101). On est ainsi ramené au problème général (n° 141).

147. Problème 4. *Connaissant deux faces d'un angle trièdre et l'angle dièdre opposé à l'une d'elles, trouver l'autre face et les deux autres angles dièdres* (*fig.* 134). Prenons pour plan horizontal celui de la face connue A adjacente à l'angle β, menons L''T'' perpendiculaire à H^q, l'on connaîtra V''^q; et prenons aussi L'T' perpendiculaire à H^p. Si l'on conçoit que le plan P tourne autour de H^p pour prendre la position qu'il doit occuper dans l'espace, un point quelconque b' de I' se mouvra dans le plan vertical L'T' en décrivant un arc de cercle C', et viendra au point où cet arc est coupé par le plan Q, point que nous obtiendrons en cherchant V'^q (n° 47); on trouve généralement deux points d'intersection b et c dont les projections horizontales sont en b^h et c^h et déterminent deux projections horizontales I^h et J^h de l'intersection des plans P et Q; il y a donc deux angles trièdres possibles avec les mêmes données; il n'y en aurait qu'un si V'^q était tangente au cercle C' et il n'en existerait pas si V'^q ne rencontrait pas le cercle C'.

148. Problème 5. *Connaissant un angle plan, l'angle dièdre opposé et un angle dièdre adjacent, trouver le troisième angle dièdre et les deux autres angles plans.* Prenons pour plan horizontal celui d'une face inconnue A (*fig.* 135) et menons L'T' perpendiculaire sur H^p, dès lors V'^p fera avec L'T' l'angle donné γ adjacent à B: si l'on suppose que le plan P revienne dans la position qu'il doit occuper dans l'espace, le point b se portera en $\underline{b}$, ayant pour projection horizontale b^h ; on connaîtra donc I^h ; pour construire H^q, supposons que le plan Q tourne autour d'un axe vertical (passant par $\underline{b}$) jusqu'à ce qu'il soit devenu perpendiculaire au plan vertical L'T', à cet instant sa trace verticale $V'^{q'}$ fera avec L'T' l'angle β connu et opposé à B, et $H^{q'}$ sera perpendiculaire à L'T'; si l'on suppose que ce plan revienne ensuite à sa position, le point p' décrira, autour de b^h comme centre, un arc de cercle auquel la

trace horizontale H^o sera tangente; elle doit d'ailleurs passer par le point a, donc elle est déterminée, et l'on rentre encore dans le problème général (n° 141).

149. PROBLÈME 6. *Réduire un angle à l'horizon* (*fig.* 136). C'est la construction d'un angle trièdre dont on connaît les trois angles plans, mais on peut donner à la figure une disposition particulière. On connaît l'angle que font entre elles deux droites, et les angles qu'elles font l'une et l'autre avec la verticale. Soient a le sommet de l'angle, N la verticale passant par ce sommet, D l'une des droites faisant avec N l'angle connu B. Prenons pour plan vertical de projection le plan des droites N et D, et soit E' l'autre droite rabattue sur ce plan vertical et faisant avec N l'angle connu C, formons l'angle $\widehat{dae''} = \widehat{A}$ angle que font entre elles les deux droites, prenons $ae'' = ae'$, puis décrivons deux arcs de cercle l'un du centre a^h avec a^he' pour rayon et l'autre du centre d avec le rayon de'', ils se coupent en e; joignant a^he, on aura le second côté E^h de l'angle cherché α. Les motifs de toutes ces constructions seront faciles à concevoir, sans qu'il soit nécessaire de les développer ici.

150. PROBLÈME 7. *Inscrire une sphère dans une pyramide triangulaire.* On divisera en deux parties égales (n° 128) trois angles dièdres dont les arêtes ne concourent pas au même sommet, et le centre de la sphère sera au point d'intersection des plans bissecteurs, puis son rayon sera la distance de ce centre à une face quelconque (n° 136) de la pyramide.

151. PROBLÈME 8. *Circonscrire une sphère à une pyramide triangulaire.* On élèvera des plans perpendiculaires sur les milieux des trois arêtes (n° 83) non situées sur une même face de la pyramide et le point où ils se couperont sera le centre de la sphère demandée, on aura le rayon de la sphère en unissant ce centre à l'un des sommets de la pyramide.

152. PROBLÈME 9. *Sur un triangle acutangle donné, construire une pyramide trirectangle et en trouver la hauteur.* Prenons pour plan horizontal celui du triangle donné (*fig.* 137), et pour plan vertical un plan perpendiculaire à l'un des côtés, par exemple au côté ab. Concevons la pyramide construite et désignons son sommet par s; rabattons sur le plan horizontal la face sab, dont le plan est perpendiculaire au plan vertical de projection, elle sera inscrite dans un demi-cercle ayant ab pour diamètre, et comme l'arête sc est perpendiculaire à cette face et par conséquent parallèle au plan vertical de projection, sa projection horizontale s^hc doit être perpendiculaire à ab, donc le point s se rabat en s', et la face sab en $s'ab$. Si maintenant on suppose que cette face revienne en sa position dans l'espace, le point s' décrira un arc de cercle C dont le centre est en o sur ab, et auquel l'arête sc est nécessairement tangente. La projection verticale s'^v décrira un cercle identique au cercle C et auquel la droite s^vc^v doit être tangente; or cette tangente est toujours

possible, car le rayon os' est toujours moindre que oc, donc c^v est toujours extérieur à la circonférence C ; on obtient ainsi la projection s^v du sommet s de la pyramide, d'où l'on déduit s^h, et par suite la pyramide est connue, son sommet s étant connu puisque l'on connaît ses deux projections. Si l'on joint as^h, on aura la projection horizontale de l'arête as perpendiculaire à la face bsd, donc as^h est perpendiculaire à bc; de même bs^h est perpendiculaire à ac.

La hauteur de la pyramide est donnée en s^vp. Si l'on rabat les trois faces, elles seront inscrites dans des demi-cercles, dont les cordes adjacentes à un même sommet du triangle sont égales.

153. Le problème précédent conduit aux conséquences suivantes :

1° *Sur un triangle acutangle quelconque pris pour base, on peut toujours construire une pyramide trirectangle.*

2° *Les perpendiculaires abaissées des sommets d'un triangle quelconque sur les côtés opposés, concourent en un même point;* car on vient de le démontrer pour un triangle acutangle. Mais s'il s'agit d'un triangle obtusangle abc (*fig.* 138), abaissant des sommets b et c des angles aigus des perpendiculaires sur les côtés opposés, elles se croiseront nécessairement en un point d extérieur au triangle abc et formeront un autre triangle bcd évidemment acutangle, et dans lequel les droites bc' et cb' sont perpendiculaires aux côtés cd et bd, donc aussi la droite da sera perpendiculaire sur bc, donc enfin les droites aa', bb', cc', abaissées des trois sommets du triangle abc perpendiculairement sur les côtés opposés concourent en un même point d, intérieur ou extérieur, selon que le triangle est acutangle ou obtusangle.

154. Problème 10. *Couper une pyramide trirectangle, de manière que la section soit un triangle acutangle donné.* Ayant rabattu comme ci-dessus les trois faces de la pyramide donnée (*fig.* 139), soit (*fig.* 140) $\alpha\beta\gamma$ le triangle auquel la section doit être égale ; ce triangle pourra être considéré comme la base d'une pyramide trirectangle; nous développerons cette pyramide, et nous obtiendrons ainsi ses faces $\sigma'\alpha\beta$, $\sigma''\alpha\gamma$, $\sigma'''\beta\gamma$ que nous reporterons respectivement sur les triangles $s'ab$ (*fig.* 139), $s''ac$, $s'''bc$, puis rapportant les points a'' et a''', b'' et b''', c'' et c''' en a'^h, b'^h, c'^h sur les projections des trois arêtes, nous aurons la projection horizontale du triangle de section, on en aura facilement la projection verticale, et par conséquent son plan sera parfaitement déterminé; on peut d'ailleurs trouver facilement les traces de ce plan si on le désire.

155. Problème 11. *Couper une pyramide quadrangulaire ayant pour base un trapèze par un plan de manière que la section soit un parallélogramme* (*fig.* 141). Prenons pour plan horizontal celui de la base $abcd$ de la pyramide et désignons par s le sommet de cette pyramide dont s^h sera la projection horizontale, et donnons-nous

la hauteur du sommet *s* au-dessus de la base; on n'a pas besoin de plan vertical de projection.

Prolongeons les côtés non parallèles *ad* et *bc* de la base jusqu'à leur intersection en *o*, les plans des faces *sad* et *sbc* se coupent suivant la droite D, qui passe par les points *s* et *o*, et les plans des faces *sab* et *scd* dont les traces horizontales sont parallèles se coupent suivant une horizontale de ces plans menée par le point *s*. Cela posé, nommant P le plan de section, nous dirons : puisque ce plan P coupe les faces *sab* et *scd* suivant des droites parallèles entre elles, ces droites seront aussi parallèles à l'intersection des plans de ces faces, donc à *ab*, *cd* et H^p, donc H^p doit être parallèle à *ab* (on peut d'ailleurs prendre cette trace H^p partout où l'on voudra sur le dessin, pourvu qu'on la mène parallèle à *ab*). Puis le plan P coupe les faces *sad* et *sbc* suivant deux droites parallèles entre elles et par conséquent à D, et passant par les points x et y; si l'on mène par ces points des parallèles à D coupant s^ha, s^hb, s^hc, s^hd aux points a'^h, b'^h, c'^h, d'^h et si l'on joint $a'^hb'^h$, $c'^hd'^h$ la figure $a'^hb'^hc'^hd'^h$ sera la projection horizontale de la section et devra par conséquent être un parallèlogramme.

On déduit facilement de ce qui précède : 1° Les côtés $a'^hb'^h$ et $a'^hd'^h$ étant respectivement parallèles à *ab* et à D^h, pour que le parallèlogramme $a'^hb'^hc'^hd'^h$ soit rectangle, il faut et il suffit que D^h soit perpendiculaire sur *ab*. 2° Pour que la projection $a'^hb'^hc'^hd'^h$ soit un losange, remarquons que tout plan parallèle à P couperait aussi dans ce cas la pyramide suivant un parallèlogramme ayant pour projection horizontale un losange; nous pouvons donc prendre *ab* (*fig.* 142) pour la trace du plan sécant et alors *ab* sera un côté du losange. L'autre côté devant être égal à *ab*, du point *a* comme centre et avec un rayon égal à *ab*, nous décrirons une circonférence de cercle sur laquelle doit être pris arbitrairement le point d'^h, puis menant du point *o* une parallèle à ad'^h, elle vient couper dd^h au point s^h ; on aurait pu de même décrire la circonférence du centre *b*. 3° Enfin la projection $a'^hb'^hc'^hd'^h$ sera un quarré si l'on a en même temps d'^h sur la circonférence précédente et D^h perpendiculaire sur *ab*.

156. Problème 12. *Couper une pyramide quadrangulaire à base quelconque par un plan de manière que la section soit un parallélogramme* (*fig.* 143). Prenons pour plan horizontal le plan de la base *abcd*, nous ne construisons par la projection verticale, il serait facile d'en avoir une si on le désirait. Prolongeons les côtés opposés *ab* et *cd* jusqu'à leur rencontre en *o* et joignons os^h, ce sera la projection horizontale I^h de l'intersection des plans des deux faces *sab*, *scd*. Prolongeons de même les côtés opposés *ad*, *bc* jusqu'à leur rencontre en ω et joignons ωs^h, ce sera la projection horizontale J^h de l'intersection des plans des deux faces *sab*, *sbc*. Enfin la droite $o\omega$ sera la trace horizontale du plan (I, J) ou X. Cela posé, le plan sécant R

devant couper les faces opposées suivant des droites parallèles entre elles et par conséquent parallèles à leur intersection, doit être lui-même parallèle à la fois aux deux droites I et J et par conséquent à leur plan, donc H^p doit être parallèle à H^x; on peut d'ailleurs prendre pour H^p une droite quelconque remplissant cette condition. Puis menant par les points x et y, en lesquels H^p coupe ab et cd, des parallèles à I^h, et par les points u et z, en lesquels H^p coupe ad et bc, des parallèles à J^h, ces droites se croiseront en des points situés sur les projections des arêtes et donneront la projection horizontale $a'^hb'^hc'^hd'^h$ de la section, qui doit par conséquent être un parallélogramme.

La projection horizontale $a'^hb'^hc'^hd'^h$ serait un rectangle, si les projections I^h et J^h des intersections étaient perpendiculaires entre elles, c'est-à-dire si le point s^h (*fig.* 144) appartenait à la circonférence de cercle décrite sur $o\omega$ comme diamètre.

Comme cas particuliers, on peut indiquer les deux suivants :

1° La projection $a'^hb'^hc'^hd'^h$ sera un losange, si le triangle $os^h\omega$ (*fig.* 145) est isocèle, et si en menant par le point a une parallèle R à la droite $o\omega$, le point m est le milieu de la longueur de la droite rr' interceptée sur R par les droites oc et ωc. Dans ce cas, le trapèze $abcd$ est tel, que les côtés cd et cb, ad et ab sont égaux entre eux, et, dans ce cas encore, la droite cs^h passe par le sommet a du trapèze.

2° Les conditions indiquées ci-dessus étant remplies, si le triangle isocèle est rectangle, ou, en d'autres termes, si le point s^h est sur la circonférence d'un cercle dont $o\omega$ serait le diamètre, alors la projection $a'^hb'^hc'^hd'^h$ sera un carré.

Désignons par D la droite qui unit les points de concours o et ω des côtés opposés du trapèze B, base de la pyramide; désignons par s le sommet de la pyramide, et par H^p une droite qui, tracée sur le plan du trapèze (plan que nous prendrons pour plan horizontal de projection) sera parallèle à D.

Si, par le point s^h, on mène une verticale Y, et si l'on prend sur cette droite une suite de points s, s', s'', etc., et qu'on les regarde comme les sommets d'une suite de pyramides Z, Z', Z'', etc., ayant toutes pour base commune le trapèze B; si par H^p on mène une suite de plans P, P', P'', respectivement parallèles aux plans (s, D), (s', D), (s'',D), etc., ces plans couperont les pyramides suivant des parallélogrammes qui se projetteront tous sur le plan horizontal, suivant un seul et même parallélogramme E^h.

Ainsi : le plan P coupera la pyramide Z suivant un parallélogramme E

P'	—	Z'	—	E'
P''	—	Z''	—	E''
etc.	—	etc.	—	etc.

et tous ces parallélogrammes E, E′, E″, etc., seront situés sur un prisme droit ayant le parallélogramme E^h pour base. Et comme la position du sommet *s* peut varier arbitrairement sur Y, et qu'ainsi on peut faire croître ou décroître à volonté la hauteur du sommet *s* au-dessus du plan horizontal, on voit que l'on peut supposer cette hauteur nulle; alors le plan sécant P et la pyramide Z se confondent avec le plan horizontal, et l'on n'a plus qu'un système de lignes toutes tracées sur un plan, et non plus un système de lignes dont une partie est sur le plan, et dont l'autre partie est la projection de certaines lignes situées dans l'espace.

Nous pouvons donc énoncer ce qui suit :

Un système situé sur un plan, ou, comme on le dit, un *système plan*, peut être regardé comme la projection sur son plan de divers systèmes situés dans l'espace, étant tous du même genre comme étant tous soumis à une certaine et même *loi* de formation.

Et comme, dans un *système plan*, on pourra regarder certaines lignes comme étant dans le plan, et certaines autres comme étant la projection sur ce plan de lignes situées dans l'espace, et que le choix des lignes regardées comme étant sur le plan pourra être souvent arbitraire, pourvu que *ce choix* conduise à un système pouvant exister dans l'espace, on peut dire qu'un *système plan* peut être regardé comme la projection de divers systèmes de l'espace et de genres différents.

Ainsi dans la *fig.* 145, qui empêche de regarder les points *a* et s^h de la figure plane comme étant sur le plan de cette figure, et de considérer les points *b*,*c*,*d* du trapèze comme étant les projections de points de l'espace? alors on aurait une pyramide dont l'arête *sa* serait seule dans le plan de la figure, et ce système serait bien différent de celui où l'on regarderait le trapèze *abcd* comme étant dans le plan de la figure, et le point s^h comme étant la projection d'un point *s* de l'espace, puisque, dans ce cas, on aurait une pyramide ayant sa base sur le plan de la figure.

Et de plus dans le premier système, celui où l'on considère les quatre points *a*,*b*,*c*,*d* comme étant les projections de quatre points de l'espace, on pourra établir que ces quatre points de l'espace sont les sommets d'un quadrilatère plan ou les sommets d'un quadrilatère gauche.

Dans le premier cas, les points *o* et *ω* seront les projections de deux points de l'espace; dans le deuxième cas, ces points *o* et *ω* devront être considérés comme les projections de deux droites verticales, perpendiculaires au plan de la figure, sur chacune desquelles s'appuient les côtés opposés (et supposés prolongés) du quadrilatère gauche.

D'après ce qui précède, on voit que lorsqu'on a sur un plan un système de

lignes, et que l'on veut découvrir les propriétés géométriques dont ce système plan peut jouir, on doit chercher à construire dans l'espace un système de lignes ayant le système plan pour projection, et chercher parmi tous les systèmes de l'espace constructibles celui qui permettra de découvrir facilement, et le plus facilement, les propriétés du système plan donné; et réciproquement, lorsqu'on a un système de lignes dans l'espace, on doit projeter ce système sur un plan, et rechercher les propriétés du système de l'espace, en vertu des propriétés dont jouit le *système-plan-projection;* on doit donc, parmi tous les plans de projection, chercher celui qui sera tellement situé par rapport au système de l'espace, que la projection, sur ce plan, du système de l'espace nous permettra de découvrir facilement, et le plus facilement possible, les propriétés du système-plan-projection, pour en conclure les propriétés du système de l'espace.

Ce mode de recherches, qui consiste à passer *du plan dans l'espace*, et réciproquement *de l'espace sur le plan*, est fécond en géométrie descriptive, et il est tout à fait dans l'esprit de cette science, puisqu'il n'est évidemment qu'une *conséquence* de la méthode générale des projections, méthode qui est la base de la géométrie descriptive.

Soit donné le quadrilatère *abcd* sur le plan horizontal (*fig.* 145 *bis*), dont les côtés opposés étant prolongés se coupent aux points o et ω, soit s^h la projection du sommet s de la pyramide ayant le quadrilatère *abcd* pour base.

Menons par le point a une droite H^p parallèle à la droite (o,ω) et regardons cette droite comme la trace horizontale d'un plan P, lequel sera parallèle au plan (s,o,ω); ce plan P, coupera la pyramide suivant un parallélogramme qui se projettera suivant un autre parallélogramme $a'^h b'^h c'^h d'^h$.

Cela posé :

Par le point r en lequel H^p coupe la droite co menons une droite quelconque rc''^h, coupant la droite $pb'^h c'^h$ en un point c''^h. Joignons les points c et c''^h par une droite coupant la ligne ωs^h en un point s'^h, la pyramide qui aura pour base le quadrilatère *abcd*, et pour sommet un point ayant s'^h pour projection horizontale, sera coupée par un plan P′ ayant H^p pour trace horizontale (ce plan P′ étant parallèle au plan $s'o\omega$), suivant un parallélogramme $ab''c''d''$ qui se projettera suivant un autre parallélogramme $ab''^h c''^h d''^h$, ces deux parallélogrammes étant tels que les cinq points $p, b'^h, c'^h, b''^h, c''^h$ seront en ligne droite. Il est évident que les deux parallélogrammes de section $ab'c'd'$ et $ab''c''d''$ sont situés sur un prisme oblique dont les arêtes sont parallèles à la droite $s's\omega$. Nous aurons donc, dans ce cas, une suite de pyramides ayant même base et coupées par des plans P, P′ P″, etc., ayant même trace horizontale H^p, suivant des parallélogrammes se projetant (sur le plan de base) en des parallélogrammes différents, distincts, et non plus suivant le même parallélogramme,

comme dans le cas où les divers sommets s, s', s'', etc., des pyramides étaient situés sur une perpendiculaire au plan de base.

Dès lors on pourra demander de trouver la position que doit occuper le sommet s' pour que la projection du parallélogramme de section jouisse de certaines propriétés; on pourra demander, par exemple, que cette projection soit un losange, ou que les côtés adjacents soient dans un rapport donné, etc. En désignant le trapèze de base par B, on peut dire que le système formé par la pyramide (s, B) et le plan P a été transformé en le système formé par la pyramide (s' B) et le plan P'.

Le mode de recherche qui consiste à transformer une figure plane en une autre figure plane, un système de l'espace en un autre système de l'espace (et il existe bien des modes différents de transformation) est très-fréquemment employé en géométrie descriptive; on s'en sert pour transformer un système Σ en un autre système Σ', tel que l'on puisse facilement reconnaître ses propriétés géométriques, et l'on passe alors des propriétés reconnues sur le système Σ' à celles qui doivent exister sur le système primitif Σ', en faisant subir aux propriétés du système transformé Σ', les modifications que le mode de transformation employé pour repasser du système Σ' au système Σ doit leur faire éprouver.

Ce mode de recherche n'est encore qu'une conséquence de la méthode des projections, mais une conséquence plus générale que ne l'est le mode précédemment exposé. Dans la seconde partie de ce cours, nous aurons plus d'une fois l'occasion d'employer l'un et l'autre de ces deux *modes de recherche*.

Maintenant, proposons-nous de chercher quelle doit être la position du point s''^h sur la droite ωs^h, pour que, *fig.* 145 *bis*, le parallélogramme $ab''^hc''^hd''^h$ soit un losange. Pour que ce parallélogramme soit un losange, il faut que l'on ait $ad''^h = ab''^h$.

Or, en supposant que la droite ad''^h a été menée arbitrairement, il faudra que la droite rb''^h soit parallèle à la droite ad''^h, ce qui ne pourra avoir lieu évidemment que pour certaine direction particulière donnée à la droite ad''^h. En examinant de près le problème proposé, on voit qu'il se réduit au suivant:

Étant donnés** (fig. 145 ter) **deux droites parallèles** A **et** B, **un point** a **sur** A **et un point** r **hors des deux droites, mener par le point** r **une droite** D **telle que, coupant les droites** A **et** B **aux points** b''^h **et** c''^h, **on ait: $ab''^h = b''^hc''^h$.

Or ce problème se résout facilement de la manière suivante:

Concevons par le point r une suite de droites R, R', R'', etc., dont l'une, R, passe par le point a et coupe la droite A aux points a, b'^h, b''^h, b'''^h, etc., et la droite B aux points p, c'^h, c''^h, c'''^h, etc.

Portons sur ces droites R, R', R'', etc., et à partir des points a, b'^h, b''^h, etc., et du côté de B les distances du point a à chacune de ces droites R, R', R'', etc., ces

distances étant comptées sur la droite A, on aura les points a, y', y'', y''', etc., qui détermineront une courbe δ, laquelle sera évidemment composée d'une branche infinie passant par le point a et coupant la droite B en deux points c_1 et c_2; les droites rc_1 et rc_2 résoudront le problème, qui aura toujours deux solutions. On donne à cette courbe δ le nom de *courbe d'erreur*. Or, il est évident que la *courbe d'erreur* est un *lieu géométrique*, et qu'ainsi, en employant en géométrie descriptive une *courbe d'erreur*, nous faisons identiquement ce que l'on fait lorsque l'on applique l'analyse à la géométrie, et que l'on cherche un point situé à la fois sur deux lieux géométriques.

Dans le problème précédent, les lieux géométriques sont la droite B et la courbe δ.

L'emploi des *courbes d'erreur* est très-fréquent en géométrie descriptive.

Donnons un second exemple de l'emploi des courbes d'erreur.

Étant donné (*fig.* 145 *bis*), un quadrilatère *abcd* comme base d'une pyramide, cherchons la position que doit occuper le sommet s de cette pyramide pour qu'un plan P, parallèle au plan (s, o, ω), la coupe suivant un parallélogramme qui se projette sur le plan horizontal, ou, en d'autres termes, sur le plan de base suivant un carré. Les droites os^h et ωs^h devront être rectangulaires, le point s^h devra donc être situé sur un cercle C décrit sur $o\omega$ comme diamètre.

Par suite, faisant passer le plan P par le point a, H^p sera parallèle à $o\omega$, le point c'^h devra donc être situé sur un cercle 6 décrit sur rp comme diamètre; et il faudra évidemment que ce point c'^h soit tel que menant la droite rc'^h, et abaissant du point a une perpendiculaire ab'^h sur cette droite, on ait: $ab'^h = b'^h c'^h$. Il faudra donc (*fig.* 145, *quater*), construire une courbe d'erreur γ de la manière suivante:

Du point r nous mènerons une suite de droites R, R', R'', R''', etc., coupant le cercle C aux points c^h, c'^h, c''^h, c'''^h, etc.; du point a nous abaisserons des perpendiculaires L, L', L'', L''', etc., sur les droites R, R', R'', etc., et les coupant respectivement aux points b^h, b'^h, b''^h, b'''^h, etc.

Puis nous porterons sur R, et à partir du point b^h, une longueur $\overline{b^h y} = \overline{b^h a}$; sur R', et à partir du point b'^h, une longueur $\overline{b'^h y'} = \overline{b'^h a}$, et ainsi de suite.

Les points y, y', etc., détermineront une courbe γ qui passera par le point a et qui coupera le cercle C en deux points c_1 et c_2 qui seront évidemment situés sur une perpendiculaire à la droite rp.

Unissant le point c avec c_1 par une droite J et ce même point c avec c_2 par une droite J', ces deux droites J et J' couperont le cercle C en deux points s^h et s'^h situés sur une perpendiculaire à la droite $\overline{o\omega}$, et ces points s^h et s'^h seront les

projections des divers sommets s et des divers sommets s' des diverses pyramides qui, ayant le quadrilatère *abcd* pour base, seront coupés par un plan parallèle au plan (s, o, ω) ou au plan $(s' o, \omega)$ suivant un parallélogramme se projetant, sur le plan de base, suivant un *carré*.

CHAPITRE V.

DES DIFFÉRENTS SYSTÈMES DE PROJECTIONS.

157. Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des projections orthogonales sur deux plans perpendiculaires entre eux; en généralisant la même idée on peut nommer projection d'un point sur un plan, le point où une droite quelconque passant par le point donné rencontre ce plan, mais le système de projection étudié ci-dessus est le plus usité, non-seulement parce qu'il est le plus commode à employer pour les constructions graphiques à exécuter pour la solution des problèmes géométriques proposés, mais aussi parce qu'il conduit à des *épures* à l'aide desquelles il est plus facile de construire le *relief*. Cependant on emploie quelquefois d'autres systèmes pour lesquels on ne fait plus usage que d'un seul plan de projection, et, parmi ceux-là, le plus simple est celui qui constitue les *plans cotés et nivelés*. Un point est déterminé dans ce système par sa projection orthogonale sur un plan, qu'on nomme *plan de comparaison*, et que l'on choisit ordinairement au-dessus de tous les points du système projeté, et par un *nombre* écrit à côté de la projection du point et qui en fait connaître la distance au plan de comparaison. Ce nombre prend le nom de *cote du point*. Les *cotes* des points situées au-dessus du plan de comparaison seraient négatives, et si l'on prend le plan de comparaison tel qu'il passe au-dessus de tous les points du système, ou en d'autres termes tel que tous les points du système soient situés au-dessous de lui, c'est afin de n'avoir aucunes cotes négatives, ce qui serait gênant dans les diverses opérations

à effectuer pour la solution des problèmes proposés. On voit que ce système rentre dans le système général, car, à l'aide des *cotes* de chaque point du système projeté, on pourrait en obtenir la projection sur un plan quelconque, mais perpendiculaire au plan de comparaison, en choisissant une ligne de terre arbitraire et en abaissant de la projection connue de chaque point une perpendiculaire sur cette ligne, et en portant ensuite du côté convenable (par rapport à la ligne de terre) des distances égales aux *cotes* de ces points (n° 5).

Dans ce système une droite est déterminée par les projections et les *cotes* de deux de ses points (n° 18), et un plan par sa ligne de plus grande pente par rapport au plan de comparaison (n° 38), ligne qui porte le nom d'*échelle de pente du plan*.

Ce système de projection est fréquemment usité, surtout dans les dessins relatifs aux fortifications et aux travaux de déblai et remblai, tels que routes, canaux, etc.

Comme l'on ne peut pas ordinairement avoir une feuille de dessin assez grande pour représenter les corps dans leurs grandeurs naturelles, on réduit les *dessins* ou *épures* que l'on désigne aussi sous le nom de *plans* à une échelle déterminée qui doit être annexée au dessin et sur laquelle on compte les longueurs horizontales, les *cotes* sont toujours indiquées dans leurs grandeurs naturelles; il faudrait les réduire à la même échelle, si l'on voulait faire la projection verticale du corps sur un plan vertical de projection. Nous verrons cependant que, pour des motifs qu'il n'est pas temps encore d'expliquer, on ne réduit pas ordinairement les deux projections à la même échelle.

158. On nomme *projections obliques*, celles qui sont déterminées par des droites inclinées par rapport au plan de projection, mais toutes parallèles entre elles. Pour pouvoir obtenir la projection oblique d'un point, il faut connaître la direction et l'inclinaison de la droite projetante par rapport au plan de projection; on la donne ordinairement par sa pente, c'est-à-dire par le *rapport* de la hauteur à la base du triangle rectangle formé par les droites projetant orthogonalement et obliquement le point et par celle qui unit ces deux projections. Le point est alors déterminé par sa projection orthogonale et une projection oblique sur le même plan, car la projection orthogonale fait connaître une droite sur laquelle le point est situé, et la distance des deux projections conjointement avec le *rapport* connu de la hauteur à la base du triangle rectangle, ci-dessus désigné, fait connaître la distance du point au plan de projection. Lorsque les lignes projetantes sont inclinées à 45° sur le plan de projection, le triangle rectangle est isocèle, sa base est égale à sa hauteur, et par conséquent la distance du point au plan de projection est égale à celle de ses deux projections, l'une orthogonale et l'autre oblique sur le plan horizontal.

Dans la théorie des ombres, cette seconde projection est ce qu'on nomme l'*ombre portée* du point sur le plan de projection, qui est ordinairement le plan horizontal pour la partie du dessin (ou de l'*épure*) que l'on nomme le plan *géométral* et le plan vertical pour les *coupes* et les *élévations*.

Une droite est de la même manière définie par sa projection orthogonale et une projection oblique sur le même plan, et un plan par les deux mêmes projections de sa ligne de plus grande pente. Ce que l'on nomme *perspective militaire* n'est autre chose qu'une projection oblique; on s'en sert aussi dans les travaux d'arts des ponts et chaussées, pour mieux faire voir les détails d'assemblages des parties intérieures des constructions.

159. Les projections orthogonales et obliques que nous venons d'indiquer portent le nom commun de *projections cylindriques*. Il existe encore un système de projections que nous nommerons *projections coniques*, et auxquelles on donne aussi le nom de projections *centrales* ou *polaires*. Dans ce système, les droites projetantes passent toutes par un même point fixe, qu'on nomme *centre* ou *pôle* des projections.

Dans ce système, on emploie deux plans rectangulaires, l'un nommé *géométral*, sur lequel on projette orthogonalement le système proposé; l'autre nommé *tableau*, sur lequel on effectue la projection conique ou la *perspective* de ce même système. La ligne de terre prend, dans ce cas-ci, le nom de *base du tableau*.

Un point est déterminé dans l'espace, quand on connaît sa projection orthogonale sur le géométral, sa perspective, la base du tableau et le centre des projections ou *point de vue*. Mais on peut aussi définir la position d'un point dans l'espace par sa perspective, sa *cote* de hauteur au-dessus du géométral; la projection du point de vue fait connaître la base du tableau.

160. Mais lorsqu'on ne cherche que des relations de position sur un plan, on peut donner une seule projection du système de points et de droites composant un système de l'espace, la position du système dans l'espace reste arbitraire; alors on en choisit un entre tous, et l'on choisit le plus simple pour arriver à la démonstration des théorèmes de relations de position énoncés; c'est ce que nous avons déjà fait dans quelques questions du chapitre III.

Des plans cotés et nivelés.

161. Dans tout cet article nous mesurerons les distances horizontales sur une échelle au centième ou de $0^{m}.01$ pour $1^{m}.00$, représentée (*fig.* 146); les décimètres y sont exprimés par des millimètres. Si l'on voulait avoir des distances moindres

que les décimètres, par exemple les centimètres, on disposerait l'échelle comme il suit. A l'une des extrémités a (*fig.* 147) de la droite ab, on élève une perpendiculaire, sur laquelle on porte 10 fois une longueur arbitraire; par tous les points 1, 2, 3,...... 10, on mène des parallèles à ab, puis divisant la dernière parallèle en millimètres, nous joindrons les points 1 et 10′, 2 et 1′, 3 et 2′,... 10 et 9′ des deux parallèles extrêmes, et il est évident que toutes ces nouvelles droites sont parallèles, et qu'elles interceptent sur les parallèles à ab des parties égales à $0^m,0001$, $0^m,0002$, $0^m,0003$,..... $0^m,0009$, $0^m,001$; en effet, considérons la partie $\alpha\beta$ comptée sur la parallèle menée du point 7, les triangles semblables 10—α—β et 10—9′—10′ donnent 10—10′ : 10—β :: 9′—10′ : $\alpha\beta$. Or 10—10′ contient 10 des parties dont (10—β) en contient 7, et 9′—10′ $= 0^m,001$; donc cette proportion peut se changer en celle-ci : 10 : 7 :: $0^m,001$: $\alpha\beta = 0^m,0007$; on trouverait de même la valeur des parties comprises sur les autres parallèles. Cela posé, supposons qu'on veuille mesurer sur cette échelle une longueur de $7^m,64$, on prendra sur la parallèle à ab, menée du point 4, la longueur $\gamma\delta$, qui sera la droite demandée, réduite à l'échelle. En effet, cette droite $\gamma\delta$ se compose de $\gamma\varepsilon = 0^m,07$, de $\delta\zeta = 0^m,006$, et de la partie $\varepsilon\zeta = 0^m,0004$: donc en tout $\gamma\delta = 0^m,0764$, ce qui représente, à l'échelle convenue, la longueur donnée de $7^m.64$.

162. **Problème 1.** *Sur une droite donnée trouver la cote d'un point quelconque dont on se donne la projection* (*fig.* 143). Concevons le plan projetant la droite donnée D sur le plan de comparaison que nous considérerons comme horizontal, et prenons-le pour plan vertical de projection, de sorte que D^h deviendra LT, on aura D en portant sur des perpendiculaires à LT des longueurs $m^h m$ et $m'^h m'$, respectivement égales aux *cotes* données y et y' (*), des points m et m' appartenant à la droite D de l'espace; élevant la perpendiculaire $m''^h m''$, sa longueur exprimera précisément la *cote* cherchée y'' du point m''. Pour en avoir l'expression numérique en fonction des *cotes* connues y et y', menons la droite ml parallèle à LT, nous aurons : $m'^h l = m''^h k = m^h m = y$, et les triangles semblables mlm', mkm'', donneront :

$$ml : mk :: lm' : km''$$

ou

$$m^h m'^h : m^h m''^h :: m'^h m' - m^h m : m''^h m'' - m^h m$$

ou enfin

$$x' : x'' :: y' - y : y'' - y$$

(*) Nous avons désigné les longueurs horizontales, dont on connaît la grandeur au moyen de l'échelle par x, x', etc., et les distances des points au plan de comparaison (distances données par les *cotes*) par y, y', etc., pour conserver la notation dont on a l'habitude, lorsque l'on applique l'algèbre à la géométrie.

d'où

$$y''-y=\frac{x''(y'-y)}{x'}$$

et

$$y''=y+\frac{x''(y'-y)}{x'}=\frac{y(x'-x'')+y'x''}{x'}$$

Soit, par exemple, la droite D (*fig.* 149), et demandons la cote du point m''. Portons sur l'échelle (*fig.* 146), les distances horizontales n^hm^h et $m^hm''^h$, je suppose qu'on les trouve respectivement de $0^m,02$ et $0^m,015$, ce qui donne pour ces distances ramenées à leur grandeur naturelle $x'=2^m$ et $x''=1^m,5$ (n° 161); nous avons d'ailleurs $y=5^m,20$ et $y'=9^m,00$; substituant ces valeurs dans la formule précédente, nous trouverons :

$$y''=\frac{5,2\times(2-1,5)+9,6\times1,5}{2}=\frac{5,2\times0,5+9,6\times1,5}{2}=\frac{2,60+14,40}{2}=\frac{17}{2}$$

ou enfin

$$y''=8^m,5$$

163. Problème 2. *Sur une droite donnée trouver la projection d'un point dont on connaît la cote* (*fig.* 148). Ayant tracé comme ci-dessus la droite D, je prends sur m''^hm' une longueur m''^hl'', égale à la *cote* donnée y'' et menant $l''m''$ parallèle à LT, le point m'' sera le point cherché, dont nous aurons en m''^h la projection horizontale; mais il faut avoir la distance au point m^h; pour cela ayant obtenu comme ci-dessus la proportion :

$$x':x''::y'-y:y''-y.$$

nous en tirerons :

$$x''=\frac{x'(y''-y)}{y'-y}$$

Soit, par exemple, la droite D (*fig.* 150), sur laquelle on demande de trouver le point ayant pour *cote* 8^m. Ayant porté la distance $m^hm'^h$ sur l'échelle (*fig.* 146), supposons qu'on la trouve de $0^m,005$, ce qui donne $x'=0^m,5$ (n° 161), on a en outre : $y=16^m,30$, $y'=13^m,70$, $y''=8^m,00$.

D'où $y''-y=8^m-16^m,30=8^m,30$ et $y'-y=13^m,70-16^m,30=2^m,60$; ces valeurs étant substituées dans la formule précédente, leur signe (—) disparaîtra, mais on peut l'éviter *à priori*, car si dans la *fig.* 148 la *cote* y eût été supposée plus grande que la *cote* y' et que la *cote* y'', il est facile de reconnaître que les mêmes

constructions auraient conduit à la formule $x''=\frac{x'(y-y'')}{y-y'}$ dans laquelle il faut substituer à $(y-y'')$ et à $(y-y')$ les valeurs positives $8^m,30$ et $2^m,60$; on a alors :

$$x''=\frac{0,5\times 8,30}{2,60}=\frac{415}{2,60}=\frac{83}{52}=1,599$$

ou à très-peu près, $x''=1^m,60$; réduite à l'échelle, cette valeur devient $0^m,16$. Nous la prendrons sur l'échelle, et, la portant de m^h en m''^h du côté des *cotes* décroissantes, le point m^h sera le point demandé.

Si l'on demandait la trace de la droite sur le plan de comparaison ou le point ayant pour *cote* zéro, il suffirait de faire $y''=0$, d'où $x''=\frac{yx'}{y'-y}$. Il faut avoir soin de porter les distances négatives d'un côté opposé à celui sur lequel on porte les distances positives.

164. Problème 3. *Trouver l'inclinaison d'une droite sur le plan de comparaison.* On sait que cette inclinaison est mesurée par l'angle de la droite avec sa projection sur le plan, elle sera donc donnée par la *fig.* (148) de laquelle on tire :

$$\text{tang}\,\widehat{lmm'}=\frac{lm'}{lm}=\frac{y'-y}{x'}$$

Si nous supposons qu'il s'agisse de la droite D (*fig.* 149), nous aurons :

$$y'-y=4^m,40, \qquad \text{et} \qquad x'=2^m,00$$

donc posant :

$$\widehat{lmm'}=\hat{\alpha},\ \text{on a : tang}\,\alpha=\frac{4^m,40}{2}=2^m,20$$

d'où

$$\log\text{tang}\,\alpha=\log 2,20=0,3424227=\log\text{tang}\,(65°,33',22'')$$

donc : $\alpha=65°, 33', 22''$.

165. Problème 4. *Trouver sur une droite donnée la distance de deux points.* Le triangle rectangle *mlm'* (*fig.* 148) donne :

$$mm'=\sqrt{\overline{ml}^2+\overline{lm'}^2} \qquad \text{ou} \qquad \Delta=\sqrt{x'^2+(y-y')^2}$$

Soit demandée, par exemple, la distance des points *m* et *m'* (*fig.* 149), nous avons

(n° 162) $x'=2^m, y'-y=4^m,4$; ces valeurs, substituées dans la formule, donneront mm' ou

$$\Delta=\sqrt{2^2+(4,4)^2}=\sqrt{4+19,36}=\sqrt{23,36}$$

ou enfin $\Delta=4^m,8382$.

166. Problème 5. *Trouver sur une droite donnée un point distant d'un point donné, d'une quantité déterminée.* Supposons que m'' soit le point demandée, il faut connaître $m^h m''^h$ ou x'' et $m''^h m''$ ou y'' ; pour cela nous avons déjà trouvé (n° 162)

$$y''-y=\frac{x''(y'-y)}{x'}$$

puis le triangle rectangle $mm''k$ donne :

$$\Delta^2=x''^2+(y''-y)^2=x''^2+\frac{x''^2(y'-y)^2}{x'^2}=\frac{x''^2[x'^2+(y'-y)^2]}{x'^2}$$

d'où

$$x''^2=\frac{\Delta^2 x'^2}{x'^2+(y'-y)^2} \qquad \text{et} \qquad x''=\mp\frac{\Delta x'}{\sqrt{x'^2+(y'-y)^2}}$$

puis (n° 162) :

$$y''=y\pm\frac{\Delta(y'-y)}{\sqrt{x'^2+(y'-y)^2}}$$

Soit demandé de porter sur la droite D (*fig.* 151) et à partir du point m une longueur égale à 6^m. Ayant porté la distance horizontale $m^h m'^h$ sur l'échelle (*fig.* 146), supposons qu'on l'ait trouvée de $0^m,027$, d'où $x'=2^m,70$; on a d'ailleurs $y=18^m,00$ et $y'=25^m,00$. en substituant ces valeurs dans les formules précédentes, elles donneront

$$x''=\pm\frac{6\times 2,7}{\sqrt{(2,7)^2+(7)^2}}=\frac{16,2}{\sqrt{56,29}}=\pm\frac{16,2\sqrt{56,29}}{56,29}=\pm\frac{\sqrt{14778,3766}}{56,29}=\pm\frac{12156,63}{5629}=\pm 2,15\ldots$$

Portant donc de part et d'autre de m^h une longueur $0^m,0215$, mesurée sur l'échelle (*fig.* 147), on aura deux points m''^h et m'''^h qui seront les projections horizontales des points satisfaisant à la question; pour en avoir les *cotes*, puisque nous connaissons x'', nous emploierons la formule

$$y''=y\pm\frac{x''(y'-y)}{x'}$$

qui donne

$$y'' = 18^m \pm \frac{2,15 \times 7}{2,7} = 18^m \pm \frac{150,5}{27} = 18 \pm 5,57$$

donc la *cote* du point m'' sera $y'' = 23^m,57$, et celle du point m''' sera $y''' = 12^m,43$, à très-peu près.

Il y a deux valeurs égales et de signes contraires de x'', parce que l'on peut prendre le point m''^h de part et d'autre de m^h, et les deux valeurs de y'' répondent respectivement à ces deux points qui, évidemment, doivent avoir des *cotes* différentes.

167. Pour que deux droites soient parallèles, il est évident que leurs projections horizontales doivent être parallèles, les *cotes* de leurs points doivent croître dans le même sens, et les distances horizontales de deux points de chaque droite doivent être proportionnelles aux différences de leurs *cotes* (n° 22).

Réciproquement, si ces conditions sont remplies, les droites sont évidemment parallèles. Il est donc facile de mener par un point donné une droite parallèle à une droite donnée.

168. Problème 6. *Trouver l'angle de deux droites.* Si les droites proposées ne se coupent pas, on leur mènera, par un point quelconque, des parallèles (n° 167), dont l'angle sera celui demandé. Pour avoir cet angle, on peut employer plusieurs procédés; ainsi, par exemple, on peut :

1° Prendre sur les deux droites A et B (*fig.* 152), deux points ayant mêmes *cotes*; pour cela on cherche sur la droite B le point p, dont la *cote* est égale à la *cote* connue du point m de la droite A, la droite mp est alors horizontale et par conséquent égale à sa projection $m^h p^h$ (n° 56, 1°). Si l'on cherche les longueurs P et M (n° 163) des portions dm et dp des droites A et B, on connaîtra les trois côtés du triangle dmp, on pourra donc conclure l'angle cherché mdp. Soient 1° la droite A donnée par le point d ayant la *cote* ($3^m,5$) et par le point m ayant la *cote* ($2^m,8$), et supposons que $d^h m^h = 0^m,02$, et 2° la droite B donnée par le point d ayant la *cote* ($3^m,5$), et par le point n ayant la *cote* ($1^m,24$), et supposons que $d^h n^h = 0^m,045$. Nous aurons d'abord le point p^h par la formule (n° 163) :

$$d_h p_h = \frac{0,045\,(3,5 - 2,8)}{3,5 - 1,24} = \frac{3,15}{226} = 0^m,014 \text{ (à très-peu près)}$$

Puis nous aurons (n° 165) :

$$P = \sqrt{4 + 0,49} = 2^m,12, \quad M = \sqrt{1,96 + 0,49} = 1^m,56, \quad D = 1^m,40$$

La trigonométrie donne ensuite les formules :

$$\cos \tfrac{1}{2} d = \frac{\sqrt{S(S-D)}}{MP} \quad \text{et} \quad \tang \tfrac{1}{2} d = \frac{\sqrt{(S-M)(S-P)}}{S(S-D)}$$

en désignant par d l'angle des deux droites et en faisant $S = \frac{M+N+D}{2}$.

En substituant les valeurs précédentes $M = 1^m,56$, $P = 2^m,12$, $D = 1^m,40$, nous aurons :

$$S = \frac{1,56 + 2,12 + 1,40}{2} = 2^m,54, \; S - M = 0^m,98, \; S - N = 0^m,42, \; S - D = 1^m,14$$

d'où

$$\tang \tfrac{1}{2} d = \frac{\sqrt{0,98 \times 0,42}}{2,54 \times 1,14}$$

donc

$$\log \tang \tfrac{1}{2} d = \tfrac{1}{2} \log 0,98 + \tfrac{1}{2} \log 0,42 + \tfrac{1}{2} \text{comp}^t \log 2,54 + \tfrac{1}{2} \text{comp}^t \log 1,14 = \bar{1},99561304 + \bar{1},81162464 + 4,79758314 + 4,97154757 = 9,5763684 = \log \tang (20°39'27'')$$

donc

$$d = 41°18'54''$$

2° On pourrait, sur les deux côtés A et B de l'angle cherché, prendre des longueurs égales ; pour cela on prendra sur A^h un point m^h, on cherchera la vraie longueur de la droite dm (n° 165), puis on déterminera sur B^h un point n^h tel que $dn = dm$ (n° 166), et joignant $m^h n^h$, on cherchera encore la vraie longueur de mn, on connaîtra les trois côtés du triangle dmn, on calculera donc l'angle d par les formules que fournit la trigonométrie ; je n'appliquerai pas cette méthode à un exemple, on pourra facilement s'y exercer.

169. Problème 7. *Étant donné un plan par son échelle de pente et la projection d'un point de ce plan, trouver sa cote* (*fig.* 153). L'échelle de pente étant déterminée par sa projection E^h, et les *cotes* de deux points m et n étant pour le premier ($3^m,54$), et pour le second ($8^m,12$), et l'intervalle $m^h n^h$ étant égal à $0^m,05$, on cherchera d'abord deux points p et q dont les *cotes* soient respectivement les nombres entiers 3 et 8 (n° 162), on mesurera l'intervalle $p^h q^h$, et, divisant cet intervalle en cinq parties égales, on cotera les points de divisions 4, 5, 6, 7, il sera dès lors facile de prolonger ces divisions et de trouver tel point que l'on voudra ; mais on peut se dispenser, si l'on veut, de faire cette opération préalable ; il suffira de

remarquer que le point a est situé sur une horizontale du plan dont la projection K^h est perpendiculaire à E^h, elle coupe E en un point r dont nous chercherons la *cote* (nº 163), elle sera en même temps celle du point a.

Supposons, par exemple, que r^h tombe entre les points m^h, n^h, et que l'on ait $m^h r^h = 0^m,036$; dans la formule (nº 162) $y'' = y + \frac{x'(y'-y)}{x'}$, nous connaissons :

$$y = 3^m,54, \; y' = 8^m,12, \; x' = 5^m, \; y' = 3^m,6, \text{ d'où } y' - y = 8^m,12 - 3^m,54 = 4^m,58$$

donc en substituant nous aurons :

$$y' = 3^m,54 + \frac{4^m,58 \times 3,6}{5} = 3^m,54 + 4^m,58 \times 0,72 = 3^m,54 + 3^m,2976$$

donc enfin la *cote* cherchée du point a est $y'' = 6^m,8376$.

On écrit l'échelle de pente d'un plan par deux *traits* parallèles très-rapprochés, et on la divise toujours en parties égales de manière que les *cotes* des points de division forment la série des nombres entiers, parce qu'il est alors plus facile de trouver les *cotes* des divers points du plan.

170. Problème 8. *Trouver l'intersection de deux plans.* Ce problème a été résolu (nº 100) à l'aide de deux projections, nous suivrons donc les mêmes constructions en remplaçant les projections verticales par des *cotes*.

1º Si les projections E^h et E'^h (*fig.* 154) des échelles de pente ne sont pas parallèles, nous prendrons deux points m et n sur E dont les *cotes* soient les nombres entiers 8^m et 3^m (nº 163), et nous mesurerons la distance horizontale $m^h n^h$ que je suppose de $0^m,072$; nous chercherons sur E' deux points m' et n' ayant les mêmes *cotes* 8^m et 3^m et nous mesurerons la distance horizontale $m'^h n'^h$ que je suppose de $0^m,043$; puis des points m et m' nous conduirons deux horizontales K et K' se coupant en un point k ayant la *cote* 8^m, et ce point k appartiendra à l'intersection I cherchée; des points n et n' nous conduirons deux autres horizontales G et G' se coupant en un second point g ayant la *cote* 3^m et qui appartiendra encore à l'intersection I, des deux plans; l'intersection I est ainsi déterminée.

2º Si les projections E^h et E'^h (*fig.* 155) sont parallèles, alors K^h et K'^h, G^h et G'^h ne se coupent plus, mais dans ce cas I^h doit être parallèle à K^h et K'^h puisqu'elle doit passer par leur point de concours situé à l'infini; pour en avoir un point, nous prendrons sur K et K' deux points arbitraires k et k' que nous unirons par une droite A, puis sur G et G' nous appliquerons une droite B parallèle à A, ces

droites A et B seront deux horizontales d'un troisième plan coupant les plans proposés suivant les droites $\overline{gk}$ et $\overline{g'k'}$ lesquelles se coupent en un point x de l'intersection I demandée. Menant par le point x^h une parallèle aux projections des horizontales des deux plans donnés (ou, une perpendiculaire à leurs échelles de pente qui sont parallèles), on aura I^h; pour avoir la *côte* du point x, on peut la calculer sur l'une des droites $\overline{gk}$ et $\overline{g'k'}$; on peut aussi remarquer que I étant horizontale rencontre E et E' en des points qui doivent avoir la même *coté*, laquelle sera celle du point x.

3° Il est évident qu'en menant d'autres droites quelconques telles que A et B', on peut trouver autant de points que l'on veut de I, de sorte que cette solution conviendra encore au cas où les projections E^h et E'^h, sans être parallèles, font un angle très-petit, auquel cas les droites K^h et K'^h, G^h et G'^h ne se croisent qu'au delà des limites du dessin; on trouvera deux points comme dans le second cas, on les unit et l'on a I^h; pour avoir les *cotes* des points x et x' on peut par ces points mener des horizontales de l'un des plans, et chercher les *cotes* des points où elles rencontrent l'échelle de pente du plan considéré.

171. Problème 9. *Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan* (*fig.* 56). Par un point de la droite donnée D, menons une droite quelconque K, que nous considérerons comme une horizontale d'un plan passant par la droite D, puis dans le plan donné, menons une horizontale G ayant la même *cote* que la droite K, les droites K et G seront dans un plan horizontal, et se couperont en un point a de l'intersection I du plan donné et du plan (D,K). Menant deux autres horizontales K' et G' ayant aussi même *cote*, elles se couperont en un second point a' de cette intersection I, qui sera ainsi déterminée; la droite I ira couper la droite D, en un point z, qui sera le point demandé.

172. Problème 10. *Par un point donné abaisser une perpendiculaire sur un plan donné.* La projection de la perpendiculaire N devant être perpendiculaire à celle d'une horizontale du plan P, sera parallèle à E^h (en désignant par E l'échelle de pente du plan donné P). De plus, les *cotes* des droites N et E croîtront en sens inverse, et les inclinaisons de ces mêmes droites seront complémentaires. En effet, par le point où la normale N perce le plan, concevons une ligne de plus grande pente A, le plan (A,N) sera vertical; prenons-le pour plan vertical de projection (*fig.* 157) A^h et N^h seront situés sur LT, les droites A et N se coupent en un point a et sont perpendiculaires entre elles : donc les angles qu'elles font avec LT sont complémentaires. On aura donc $\text{tang}\,6 = \cot\alpha$, mais ayant abaissé sur LT la perpendiculaire aa^h et mené les horizontales pl, nq, on a :

$$\cot\alpha = \frac{pl}{al}, \quad \text{tang}\,6 = \frac{xq}{nq}$$

donc l'on a : $pl : al :: xq : nq$; de sorte que si on prend $nq = al$, on aura $aq = pl$. Si donc on a sur E^h (*fig.* 158) la distance $m^h m'^h = 2^m,65$ (en la prenant sur l'échelle) et la différence des *cotes* $y' - y = 5^m$, prenant à la même échelle sur N^h la distance $p^h p'^h = 5^m$, on aura $y_1 - y_1' = 2^m,65$ et par conséquent : $y_1' = y_1 - 2^m,65 = 7^m,18 - 2^m,65 = 4^m,53$.

173. **Problème 11.** *Par un point donné mener une perpendiculaire à une droite donnée.* Par le point p je mènerai d'abord un plan perpendiculaire à la droite donnée D; son échelle de pente aura sa projection E^h parallèle à D^h. Cherchant ensuite l'intersection a de la droite D et du plan, ce sera le pied de la perpendiculaire demandée : donc cette perpendiculaire sera la droite qui unira le point trouvé a au point donné p.

174. **Problème 12.** *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.* Par un point de la droite, on abaissera une perpendiculaire sur le plan (n° 172), puis, cherchant l'angle de cette normale et de la droite donnée (n° 168), il sera le complément de l'angle cherché (n° 119, 2°).

175. **Problème 13.** *Trouver l'angle de deux plans.* Par un point arbitraire m, nous abaisserons des perpendiculaires N et P (n° 172) sur chacun des deux plans donnés, et l'angle de ces perpendiculaires (n° 168) mesurera l'angle des deux plans (n° 127, 8°).

176. **Problème 14.** *Par une droite donnée mener un plan qui fasse avec le plan de comparaison un angle donné.* L'inclinaison d'un plan sur le plan de comparaison est égale à celle de son échelle de pente sur le même plan de comparaison. Soit donc $\frac{5}{4}$ l'inclinaison donnée du plan cherché sur le plan de comparaison, si par le point m (*fig.* 159) on mène une ligne de plus grande pente du plan cherché, et si l'on suppose que l'on connaisse la trace horizontale a de cette ligne de plus grande pente, on aura un triangle amm^h dans lequel $mm^h : am^h :: 5 : 4$; or, $mm^h = 13^m$, donc $am^h = 10,4$. Cette distance réduite à l'échelle convenue (n° 161) sera de $0^m,104$; il faudrait donc du point m^h comme centre et avec un rayon égal à $0^m,104$ décrire une circonférence de cercle; puis sachant que la trace horizontale du plan doit passer par les traces horizontales de la droite donnée et de la ligne de plus grande pente, et que de plus elle doit être perpendiculaire à la projection horizontale de la ligne de plus grande pente, elle ne pourra être autre qu'une droite tangente au cercle ci-dessus tracé, et passant par la trace horizontale de la droite D. Or, il peut arriver que cette trace horizontale soit hors des limites du dessin, et aussi que le rayon du cercle soit trop grand; mais on peut rapporter la figure à un plan parallèle au plan de comparaison, et choisir, par exemple, celui qui passe par le point n, dont la *cote* est $7^m,60$; alors la *cote* du point m rapporté à ce nouveau plan ne sera

que : $13^m - 7^m = 6^m$, ce sera la hauteur h du triangle rectangle, on aura donc la base b de ce triangle ou le rayon du cercle par la proportion :

$$b : h :: 4 : 5 \qquad \text{d'où } b = \frac{4h}{5} = 4^m,80 .$$

puis le plan mené par le point n coupant le plan cherché, suivant une horizontale dont la projectien horizontale doit être perpendiculaire à celle de la ligne de plus grande pente, si du point m^h comme centre et avec un rayon égal à $0^m,048$ on décrit une circonférence de cercle C^h, que du point n^h on lui mène une tangente qui la touche en p^h, la droite m^hp^h sera la projection de l'échelle de pente du plan cherché. Du point n^h on peut mener une seconde tangente au cercle C^h, et si l'on joint le point de contact p'^h au point m^h on aura la projection de l'échelle de pente d'un second plan qui résout pareillement le problème proposé.

Si le point n^h était sur le cercle, c'est-à-dire si m^hn^h était égal à $0^m,48$, il n'y aurait qu'une solution : la droite D serait elle-même l'échelle de pente du plan. En effet, dans ce cas, la *pente* de la droite D serait exprimée par le rapport $\frac{13-7}{4,8} = \frac{60}{48} = \frac{5}{4}$.

Il n'y aurait pas de solution si n^h était dans le cercle, ou si m^hn^h était moindre que $0^m,048$; en effet alors la *pente* de la droite D serait plus grande que $\frac{5}{4}$ et par conséquent elle ne pourrait se trouver sur un plan dont la ligne de plus grande *pente* n'aurait sur le plan de comparaison qu'une inclinaison égale à $\frac{5}{4}$.

Des projections obliques et des ombres portées.

177. Si l'on projette un point de l'espace orthogonalement et obliquement sur un plan, la droite qui unit les deux projections est évidemment la projection orthogonale de la droite qui projette obliquement le point. Si donc on a dans l'espace un système de points, les droites qui les projettent obliquement étant parallèles, leurs projections sont aussi parallèles : donc les deux projections de chaque point du système sont sur des droites qui sont toutes parallèles entre elles. Cela posé, connaissant les projections d'une droite, et sur ces projections celles d'un point, il sera facile de trouver les projections de tout autre point de cette droite.

Il est évident que la trace d'une droite sur le plan de projection, que nous considérerons comme horizontal, doit se trouver à la fois sur les deux projections de la droite, et par conséquent elle est au point où ces deux projections se croisent.

Lorsqu'une droite est horizontale ses deux projections sont parallèles ; si la droite est verticale, la projection orthogonale se réduit à un point, mais la projection oblique est une droite passant par ce point et parallèle aux droites qui unissent les deux projections d'un même point ; si la droite était parallèle à la droite projetant obliquement un point, sa projection oblique se réduirait à un point, et sa projection orthogonale serait une droite passant par ce point et parallèle aux droites qui unissent les deux projections d'un même point.

Enfin, si deux droites sont parallèles, leurs projection de *même nom* sont parallèles.

178. La trace horizontale d'un plan est perpendiculaire à la projection orthogonale de sa ligne de plus *grande pente*, et les deux projections d'une horizontale de ce plan sont parallèles à cette trace (n° 175) ; d'après cela on peut résoudre le problème suivant :

PROBLÈME 15. *Étant connue la projection orthogonale d'un point situé sur un plan, trouver sa projection oblique ou réciproquement (fig. 160)* (*).

1° Soient D la ligne de plus grande pente d'un plan, a un point de cette droite (ce point n'est évidemment déterminé dans l'espace que lorsqu'on connaît, ce qu'il faut toujours supposer, l'inclinaison des lignes projetantes obliques), et x^h la projection orthogonale d'un point x du plan ; par ce point et dans le plan on peut concevoir une horizontale B ; sa projection horizontale B^h passera par x^h et sera perpendiculaire à D^h ; les droites B et D étant dans un même plan se coupent en un point m dont la projection orthogonale est en m^h à l'intersection de D^h et de B^h ; donc si de m^h on mène une parallèle à la direction $a^h a^o$ des lignes projetantes obliques, le point m^o où elle rencontrera D^o sera la projection oblique du point m de la droite B, mais cette droite étant horizontale, B^o sera parallèle à B^h (n° 176) ; puis le point x étant sur la droite B, si de x^h on mène une parallèle à $a^h a^o$, elle coupera B^o au point demandé x^o.

2° Soient D la ligne de plus grande pente du plan, a un point de cette droite, et x^o la projection oblique d'un point x situé sur ce plan ; par le point x passe une

(*) Nous désignons la projection oblique d'un point m par m^o et d'une droite D par D^o (cette projection oblique étant située sur le plan horizontal des projections orthogonales).

horizontale B du plan, les deux projections (l'une *orthogonale* et l'autre *oblique*) de cette horizontale sont parallèles et B^h est perpendiculaire à D^h; donc B^o est aussi perpendiculaire à D^h et passe par le point x^o; puis les droites B et D étant dans un même plan, se coupent en un point m dont m^o intersection de D^o et de B^o est la projection oblique, on en conclut m^h; menant ensuite par ce point m^h une parallèle à B^o, on aura B^h; enfin, menant de x^o une parallèle à a^oa^h, elle viendra couper B^h au point cherché x^h.

179. Problème 16. *Connaissant les projections orthogonales d'un point, la direction et l'inclinaison des droites projetantes, trouver la projection oblique de ce point, sur le plan horizontal* (*fig.* 161). Par le point donné m il faudra mener une droite B parallèle à la droite donnée D (n° 24) et en chercher la trace horizontale qui sera la projection m^o demandée. On pourrait aussi par un changement de plan se ramener au cas où D serait parallèle au plan vertical et l'on peut faire passer la nouvelle ligne de terre par m^h; alors la droite B sera dans le plan vertical, elle fera avec L'T' l'angle que D fait avec le plan horizontal, et elle coupera L'T' au point m^o demandé.

Cette dernière solution est celle que l'on est obligé d'employer quand on donne le point m par sa projection horizontale et sa *cote* de hauteur (*fig.* 162) et qu'en même temps la droite D est donnée par sa projection horizontale et son inclinaison α, ou par les *cotes* de deux de ses points, d'où l'on peut conclure cette inclinaison α; alors de m^h on mène B^h parallèle à D^h, on élève m^hm perpendiculaire à B^h et égale à la *cote* du point m réduite à l'échelle convenue (lorsqu'on n'exécute pas un dessin de grandeur naturelle), du point m on mène une droite B faisant avec B^h un angle α, et le point m^o intersection de B et B^h est la projection oblique demandée.

Si la droite D représentait la direction d'un *rayon de lumière*, ce point m^o sera *l'ombre portée* du point m sur le plan horizontal. On aurait de même son ombre portée sur le plan vertical.

180. Problème 17. *Connaissant la projection et l'ombre portée d'un point, et l'inclinaison du rayon de lumière, trouver la cote de hauteur du point* (*fig.* 162). Si l'on joint les projections m^h et m^o du point m par une droite, elle représentera la projection orthogonale de la droite B projetant obliquement le point m; donc si au point m^o on mène une droite B faisant avec B^h l'angle α égal à l'inclinaison connue du rayon de lumière, et si de m^h on élève une perpendiculaire à B^h jusqu'à sa rencontre m avec B, la droite m^hm sera égale à la *cote* de hauteur cherchée du point m.

181. Problème 18. *Trouver l'ombre portée d'un polyèdre quelconque sur le plan horizontal*. Soit, par exemple, un tronc de pyramide à bases non parallèles (*fig.* 163) dont on demande l'ombre portée sur le plan horizontal. Supposons que le plan horizontal soit précisément le plan de la base *abcde* de la pyramide, les points de

la section peuvent être donnés par deux projections orthogonales, ou simplement par leurs projections horizontales et leurs *cotes* de hauteur, et comme ces dernières données conduisent immédiatement à la détermination de la projection verticale, je suppose le tronc pyramidal donné par ses deux projections et de plus je prends le plan vertical de projection perpendiculaire au plan de la section, cas auquel on pourra toujours se ramener par un changement de plan vertical; puis donnant la droite R (*direction* des rayons de lumière) par sa projection R^h et son inclinaison α sur le plan horizontal, nous en conclurons sa projection verticale R^v. Cela posé, nous déterminerons les projections obliques (nº179) des sommets a', b', c', d', e', de la base supérieure du tronc de pyramide et unissant ces projections par des droites, nous aurons la projection oblique de cette base supérieure; unissant de même ces projections respectivement aux sommets correspondants de la base *abcde*, nous obtiendrons les projections obliques des arêtes du tronc de pyramide et par suite les projections des diverses faces de ce tronc.

Pour trouver maintenant l'ombre portée du tronc de pyramide sur le plan horizontal, remarquons d'abord que tous les rayons lumineux étant parallèles à R, ceux qui passent par les divers points de l'arête bb' forment un plan dont bb'^o est la trace horizontale, de sorte que bb'^o est l'ombre portée de cette arête; de même $b'^o a'^o$ et aa'^o sont les ombres portées des arêtes $b'a'$ et aa', et la droite ab étant sur le plan horizontal, est à elle-même son ombre portée; il résulte évidemment de là que l'ombre portée d'un point quelconque de la face $abb'a'$ est toujours dans le quadrilatère $abb'^o a'^o$, ou, en d'autres termes, que ce quadrilatère est l'ombre portée de la face $abb'a'$; on verra de même que $aa'^o e'^o e$, $ee'^o d'^o d$, $dd'^o c'^o c$, $cc'^o b'^o b$ sont les ombres portées des faces $aa'e'e$, $ee'd'd$, $dd'c'c$, $cc'b'b$, et que $a'^o b'^o c'^o d'^o e'^o$ est l'ombre portée de la base supérieure $a'b'c'd'e'$; mais comme l'ombre portée doit être évidemment au delà de la pyramide, il est évident qu'elle sera comprise dans l'espace $bacdd'^o e'^o a'^o b'^o b$, en supprimant des quadrilatères ci-dessus les portions comprises dans la base *abcde*.

Mais dans la théorie des ombres, outre l'ombre portée, on se propose encore de découvrir quelles sont les parties de la surface du corps proposé qui reçoivent des rayons de lumière ou qui sont éclairées, et celles qui n'en reçoivent pas ou qui sont dans l'ombre, et, par suite, de déterminer la ligne de séparation de ces deux parties et que l'on nomme *ligne de séparation d'ombre et de lumière*. Or, dans notre exemple, il est facile de reconnaître que si l'on mène des rayons lumineux par tous les points du contour de la face $bb'c'c$, ce qui formera quatre plans ayant pour traces horizontales les droites bc, bb'^o, $b'^o c'^o$, cc'^o, tout rayon de lumière mené dans l'intervalle compris entre ces quatre plans rencontrera la face $bb'c'c$; donc cette face est éclairée; il en est de même des deux faces $cc'd'd$, $a'b'c'd'e'$; mais les rayons

lumineux menés par les divers points des arêtes bb' et $b'a'$, passent au delà de la face $abb'a'$, cette face est dans l'ombre, il en est de même des deux autres faces $aa'e'e$ et $ee'd'd$, c'est pourquoi nous les avons *ombrées;* enfin la ligne brisée $bb'a'e'd'd$ forme la ligne de séparation d'ombre et de lumière de la surface proposée.

Remarquons que la série des plans formés par les rayons lumineux menés par les divers points de la ligne brisée $bb'a'e'd'd$, le plan horizontal et les deux faces $bb'c'c$ et $cc'd'd$, déterminent un polyèdre qui cache les droites $aa'^o ee'^o cc'^o b'^o c'^o$, $e'^o d'^o$, que nous avons, par cette raison, ponctuées; de sorte que l'ombre portée de la ligne de séparation d'ombre et de lumière a seule été tracée en *ligne pleine*. C'est toujours ainsi que l'on doit *ponctuer* quand on résout une question d'ombre portée; mais si l'on s'était proposé une simple question de projection, alors les autres lignes étant les projections de lignes vues, auraient dû aussi être tracées en plein.

182. Si l'on connaissait la projection horizontale et l'ombre portée d'un polyèdre sur le plan horizontal, en même temps que l'inclinaison des rayons lumineux, il serait facile de trouver la projection verticale du polyèdre, ou les *cotes* de hauteur de tous ses sommets, et par conséquent le polyèdre serait complétement connu. En effet, soient données la projection horizontale $abcdea'^h b'^h c'^h d'^h e'^h$ d'un tronc de pyramide pentagonale, son ombre portée $baedd'^o e'^o a'^o b'^o b$ sur le plan horizontal, et l'inclinaison α du rayon de lumière; prenant R^h parallèle à $a'^h a'^o$ ou à $b'^h b'^o$, etc..., cette droite nous représentera la projection horizontale du rayon de lumière; menant la droite R, faisant avec R^h l'angle α, on aura ce rayon dans son plan vertical projetant, nous pourrons en conclure sa projection R^v sur un plan vertical quelconque LT; puis les points b'^o, a'^o, e'^o, d'^o étant les traces horizontales de droites parallèles à R et menées respectivement par les sommets b', a', e', d' du tronc de pyramide, si on les projette sur la ligne de terre en β, α, ε, δ, et si, de ces points on mène des parallèles à R^v, les points b'^v, a'^v, e'^v, d'^v seront les intersections de ces droites et des perpendiculaires à LT, abaissées des points b'^h, a'^h, e'^h, d'^h. Pour avoir le cinquième sommet c', nous remarquerons que si l'on connaissait c'^o on trouverait c'^v comme on a trouvé les projections verticales des autres sommets; on peut se procurer ce point c'^o, car il est évident que les droites aa'^o, bb'^o, dd'^o, ee'^o, projections obliques des arêtes de la pyramide, concourent en un point s^o, projection du sommet s de ce polyèdre; donc c'^o doit être sur la droite cs^o; il est d'ailleurs sur une parallèle à R^h et menée de c'^h; donc il est à l'intersection de ces deux lignes. Le point s^o, que nous avons considéré, sera souvent hors des limites du dessin et la construction précédente ne fournira plus dès lors ce point c'^o; mais dans ce cas, menons par c'^h une parallèle à cb et rencontrant bb'^h en un point x^h, la droite $c^h x^h$ sera la projection horizontale d'une droite $c'a$, située dans le plan de la face $bcc'b'$ et parallèle à bc, et par conséquent d'une horizontale de ce plan; si

donc on prend la projection oblique x^o du point x (n° 177), et si de x^o on mène une parallèle à $x^h c^h$ ou à bc, cette droite sera la projection oblique de xc' (n° 177), elle contiendra donc le point c^o, qui se trouve aussi sur une parallèle à R^h menée du point c^h. On trouverait de la même manière la projection oblique de tout autre sommet non situé sur la ligne de *séparation d'ombre et de lumière*.

Si l'on suppose que le rayon de lumière est incliné à 45° sur le plan horizontal, la projection orthogonale sur ce plan et l'ombre portée sur ce même plan d'un polyèdre situé dans l'espace, suffisent pour fixer la position de ce corps; et l'on peut très-facilement trouver au moyen de ces deux projections sur un même plan, la hauteur de chacun des sommets du polyèdre au-dessus de ce plan de projection, puisque cette hauteur sera égale à la distance de la projection orthogonale d'un sommet à sa projection oblique.

On a donc dans ce système de projection oblique quelque chose qui offre de l'analogie avec le système *des plans cotés*, où l'on n'a aussi qu'un seul *dessin* sur un seul *plan de projection*.

Des projections coniques et de la perspective.

183. Étant donné un point fixe o dans l'espace, et un point quelconque m, la droite om sera une ligne projetante du point m, et le point où elle ira rencontrer un plan donné sera la projection *conique*, ou *centrale*, ou *polaire* du point m, le point o étant le *centre* ou le *pôle* des projections. Si l'on projette de même tous les points d'un corps, la projection conique ainsi obtenue sera l'ombre portée du corps sur le plan de projection, si le point o est un *point lumineux*, et elle en sera la perspective, si le point o est l'*œil* d'un observateur. Il faut cependant, pour avoir l'ombre portée, que le corps éclairé soit placé entre le point lumineux et le plan de projection, sans quoi ce serait une simple projection conique. Dans la théorie de la perspective, le plan qui reçoit la projection conique et que l'on nomme *tableau*, est ordinairement placé entre le corps et l'œil de l'observateur, mais rien n'empêcherait de le placer au delà du corps projeté coniquement sur ce plan.

184. Les droites projetant coniquement les divers points d'un système, passant toutes par le pôle o, il est évident que les projections orthogonales de ces droites sur le *géométral* (n° 159), que nous considérerons comme plan horizontal de projection, passeront toutes par le point o^h, et leurs projections sur le *tableau* passeront toutes par o^p (*), pied de la perpendiculaire abaissée du point o sur le plan servant de *tableau*.

(*) Désignant par o^p la projection polaire ou centrale sur le plan du tableau, ou, en d'autres termes, la perspective du point o de l'espace, et par D^p la projection centrale ou polaire, ou, en d'autres termes, la perspective d'une droite D de l'espace sur le même plan, c'est-à-dire, sur le *tableau*.

Les projections horizontale et polaire d'un point m sont telles, que si l'on joint m^h et o^h par une droite D^h, elle ira rencontrer la base du tableau au pied de la perpendiculaire abaissée de m^p sur cette base.

185. La projection conique d'une droite est une droite qui est l'intersection du tableau et du plan mené par la droite donnée et le point o. Tous les plans projetants passant par le point o se coupent, donc si l'on a deux droites parallèles D et D′ leurs plans projetants se couperont suivant une droite K parallèle à D et D′, qui ira rencontrer le tableau en un point b, par lequel passeront les intersections de ces plans et du tableau; donc les projections coniques ou les perspectives de deux droites parallèles se coupent. Quel que soit le nombre des droites parallèles, leurs plans projetants se couperont tous suivant une même droite K, et par conséquent les perspectives de toutes ces droites passeront par un même point b, que l'on nomme *point de concours* ou *point de fuite*. Si l'on a plusieurs systèmes de droites parallèles, il existe un point de concours pour chaque système.

Si les droites parallèles sont perpendiculaires au tableau, la droite K est aussi perpendiculaire au tableau, et le point de concours b n'est autre que o^p. Si les droites proposées sont parallèles au tableau, la droite K est aussi parallèle au tableau, et le point b est transporté à l'infini; donc les perspectives de droites parallèles entre elles et au tableau sont parallèles. Si les droites données sont inclinées à 45° sur le tableau, la droite K fera aussi un angle de 45° avec le tableau, et elle le percera en un point b, de sorte que le triangle obo^p, rectangle en o^p, sera isocèle, et l'on aura $o^pb = oo^p$. Enfin si dans ce cas les droites parallèles sont de plus horizontales, la droite K sera aussi horizontale, le point de concours b et le point o^p seront donc sur une même parallèle à la base du tableau, et dans ce cas le point de concours prend le nom de *point de distance*. Il y a deux points de distance situés de part et d'autre de o^p, parce que l'on peut mener deux droites K et K′ horizontales et inclinées à 45° sur le tableau.

186. Un plan indéfini est déterminé par ses traces sur le *géométral* et sur le *tableau*, comme nous allons le démontrer en résolvant le problème suivant :

Problème 19. *Connaissant la projection orthogonale d'un point situé sur un plan donné par ses traces, trouver sa projection conique, et réciproquement* (*fig.* 164).

1° Soient H^R et P^R (*) les traces d'un plan R, et x^h la projection d'un point de ce plan sur le *géométral;* par ce point x passe une horizontale D du plan R, sa projection D^h est parallèle à H^R, et elle perce le plan du *tableau* en a, ce point a est un point de D^p; pour connaître la seconde projection de la droite D, il suffirait

(*) Nous désignons par P la trace d'un plan sur le *tableau* ; le plan étant désigné par R, sa trace sur le *tableau* sera P^R.

d'avoir le point de concours des horizontales du plan R; or, parmi ces horizontales, il y en a une D′ située avec le point o sur un plan horizontal, et dont la projection D'^p est par conséquent parallèle à LT; elle perce le plan du tableau au point a' qui se projette en a'^h, d'où l'on conclut D'^h; puis les plans projetants de D et D′ se coupent suivant une droite K qui leur est parallèle, et comme elle passe par le point o, elle est tout entière dans le plan (D′, o), menant donc K^h parallèle à D^h, et K^p parallèle à LT, la trace b de cette droite K est le point de concours demandé; puis joignant a et b par une droite, on a D^p. Si maintenant on unit o^h et x^h par une droite B^h, et qu'on la prolonge jusqu'à LT en α, que par ce point α on élève une perpendiculaire à LT jusqu'à sa rencontre avec D^v, on aura x^v.

Remarquons que si l'on joint o^p et x^p par une droite B^p, les deux droites B^h et B^p seront les projections orthogonales l'une sur le *géométral* et l'autre sur le *tableau* de la droite B, qui projette coniquement le point x.

2° Si l'on donne x^p, pour avoir x^h nous remarquerons que par ce point x passe une horizontale D du plan R; D^p doit passer par le point de concours des projections polaires des horizontales du plan, nous le construirons comme précédemment; puis unissant x^pb, nous aurons la projection conique D^p de l'horizontale D; D^p rencontre P^s au point a, trace de la droite D sur le tableau; projetant ce point a sur la base du tableau en a^h, et menant par a^h une parallèle à H^s, on aura D^h; le point cherché x^h se trouve sur cette droite D^h et aussi sur la projection horizontale B^h de la droite B qui est menée du point o au point x; mais cette droite B perce le plan du tableau au point x^p, qui se projette en α sur LT; joignant αo^h, on aura une droite coupant D^h précisément au point x^h.

187. Problème 20. *Connaissant les projections orthogonales d'un point et celles du pôle, trouver la projection conique du premier point sur un plan donné (fig. 165).* Soient o le pôle, m le point donné, et supposons le plan du tableau perpendiculaire à la ligne de terre et rabattu sur le plan horizontal. La projection du pôle sur le tableau doit toujours être orthogonale, nous la trouverons par un simple changement de plan vertical (n° 44) en o^p, puis la question proposée revient à mener la droite om, et à chercher sa trace sur le plan du tableau, cette trace a pour projection horizontale le point α^h dont la hauteur verticale est égale à $i\alpha^v$; élevant donc par α^h une perpendiculaire à L′T′, et prenant $\alpha^h m^p = i\alpha^v$, on aura le point cherché m^p.

Si les points o et m étaient donnés par leurs projections horizontales et leurs *cotes*, on chercherait sur la droite om la *cote* du point qui se projette en α^h (n° 162), et l'on prendrait $\alpha^h m^p$ égale à cette *cote*.

188. Problème 21. *Connaissant les projections horizontale et conique d'un point et celles du pôle, trouver la projection verticale du premier point.* Le tableau est un plan vertical sur lequel la droite om est projetée orthogonalement (n° 186 1°); or

on connaît les projections horizontales o^h et α^h de deux points de cette droite, et leurs hauteurs $\omega' o^p$ et $\alpha^h m^p$, donc abaissant de o^h et de α^h des perpendiculaires sur LT, et prenant $\omega o^v = \omega' o^p$, $i\alpha^v = \alpha^h m^p$, et joignant $o^v \alpha^v$, il n'y aura plus qu'à abaisser de m^h une perpendiculaire sur LT, et elle ira couper B^v au point cherché m^v.

189. Problème 22. *Trouver la perspective d'un polyèdre quelconque.* Soit demandée la perspective du polyèdre (*fig.* 166) composé d'un parallélipipède rectangle vertical surmonté d'une pyramide quadrangulaire. Supposons le tableau perpendiculaire à LT, et rabattons-le sur le plan vertical en le faisant tourner autour de sa trace verticale V^v; ce qui revient à prendre le plan vertical de projection pour le *géométral*. Pour obtenir ensuite la perspective demandée, nous chercherons la projection du point de vue sur le tableau en abaissant du point o sur le plan P une perpendiculaire qui viendra le couper au point o'; puis lorsque le plan P tourne autour de V^v, ce point o' reste évidemment à la même distance zo'^v du plan horizontal et à la même distance aussi zo'^h de l'axe V^v; nous prendrons donc sur $o^v o'^h$ une longueur $o'^v o^p = zo'^h$, et nous aurons le point o^p demandé; on voit que cela revient à décrire du centre z et du rayon zo'^h un arc de cercle qui vient couper LT au point α et à élever par ce point une perpendiculaire à LT jusqu'à la rencontre de $o^v o'^v$; tous les autres points s'obtiennent de la même manière. Pour le point o, on pouvait aussi effectuer un simple changement de plan horizontal en considérant V^v comme la nouvelle ligne de terre.

La droite oa rencontre le tableau en un point a' que nous ramènerons comme le point o sur la perspective, en menant par a'^v une parallèle à LT, et prenant $a'^v a^p = za'^h$, on obtiendra de même tous les autres points b^p, c^p,... de la perspective. Ayant obtenu les perspectives a^p et b^p des points a et b, la droite $a^p b^p$ sera la perspective de la droite ab et ainsi des autres. Nous avons ainsi en $a^p b^p c^p d^p$ la perspective de la base inférieure du parallélipipède, en $a^p b^p f^p e^p$, $b^p c^p g^p f^p$, $c^p d^p i^p g^p$, $a^p d^p i^p e^p$ les perspectives de ses quatre faces latérales verticales, et en $e^p f^p g^p i^p$ la perspective de sa base supérieure; puis on a en $j^p k^p l^p m^p$ la perspective de la base de la pyramide et en $s^p j^p k^p$, $s^p k^p l^p$, $s^p l^p m^p$, $s^p m^p j^p$ les perspectives de ses quatre faces.

Il est évident que l'observateur placé en o ne peut voir que la face *abfe* du parallélipipède, toutes les arêtes qui n'appartiennent pas à cette face lui sont cachées, c'est pourquoi nous les avons *ponctuées* sur la figure. Quant à la pyramide, il est évident que l'arête *sj* est entièrement vue et l'arête *sl* entièrement cachée, mais les arêtes *sk* et *sm* sont vues au-dessus de leurs points d'intersection par le plan (efo), points dont nous n'avons représenté que les projections verticales n^v et q^v et dont les perspectives sont évidemment aux intersections n^p et q^p des droites $s^p m^p$ et $s^p l^p$ avec $e^p f^p$.

Remarquons encore que les droites *ab*, *cd*, *ef*, *gi* étant horizontales et

parallèles au tableau, leurs perspectives a^pb^p, c^pd^p, e^pf^p, g^pi^p doivent être parallèles à LT (n° 185); les droites ad, bc, ei, fg étant perpendiculaires au tableau, leurs perspectives a^pd^p, b^pc^p, e^pi^p, f^pg^p doivent concourir au point o^p; par la même raison les points j^p, l^p, o^p doivent être en ligne droite; il est évident que les côtés jk, kl, lm, mj de la base de la pyramide sont inclinés à 45° sur le tableau et que les côtés opposés sont parallèles; si donc on prend $p^pr^p = o^ho'^h$ (de sorte que r^p sera un *point de distance*) les perspectives j^pm^p et k^pl^p des côtés jm et kl iront concourir au point r^p; les perspectives j^pk^p et l^pm^p des deux autres côtés iraient concourir en un autre point r'^p situé de l'autre côté de o^p et à une distance égale à o^pr^p.

Enfin, nous terminerons par cette dernière remarque: par chaque point que l'on veut mettre en perspective, on peut concevoir deux horizontales, l'une perpendiculaire au tableau, et l'autre inclinée à 45°; on les prolonge jusqu'à leurs intersections avec le tableau, et il est évident que ces points appartiennent respectivement aux perspectives de ces horizontales; donc, en unissant le premier de ces points avec o^p, et l'autre avec le point de distance correspondant, ces deux droites se croiseront à la perpective du point donné. Cette manière de trouver la perspective d'un point est en général très-prompte.

190. Ordinairement pour rendre la figure plus intelligible, on ne construit pas la perspective au lieu où nous l'avons placée, mais avant de rabattre le tableau, on le suppose transporté à une certaine distance, ou bien on prend sur le tableau deux axes perpendiculaires entre eux, et l'on peut prendre ces deux traces sur une autre feuille de dessin que celle où l'on a tracé le *géométral*, et l'on rapporte les distances de chaque point de la perspective à ces axes. C'est ce que nous allons montrer clairement dans le problème suivant.

Problème 23. *Trouver la perspective d'un polyèdre et de son ombre portée sur le plan horizontal* (*fig.* 167). Connaissant les projections du polyèdre et celles du rayon de lumière, nous trouverons d'abord l'ombre portée (n° 181) et la ligne de séparation d'ombre et de lumière; par suite, nous connaîtrons les faces éclairées et les faces qui ne reçoivent aucun rayon de lumière. Ces choses étant obtenues, soit le plan P du tableau perpendiculaire à LT, en menant par le point de vue o, des rayons visuels aux divers sommets du polyèdre proposé, ces rayons rencontreront le tableau P en des points dont nous fixerons la position en les rapportant à deux axes rectangulaires situés dans ce plan, et pour plus de simplicité, nous choisirons les traces mêmes du plan pour axes, nommant X l'axe horizontal H^p, et Y l'axe vertical V^p; et nous construirons à part la figure située sur le tableau P, ou la perspective du polyèdre. Menons par o^h deux horizontales D^h et D'^h inclinées à 45° sur H^p; elles iront couper cette trace en deux points r^h et r'^h, projections horizontales des deux *points de distance*; ayant donc construit les axes X et Y, nous prendrons

$z^p\omega^p = zo'^h$, nous élèverons au point ω^p une perpendiculaire sur X, et nous prendrons $\omega^p o^p = \omega' o^v$ et nous aurons le point de vue; puis menant par o^p une parallèle à X, et prenant $o^p r^p = o^p r'^p = o^h o'^h$, nous aurons les deux points de distance.

Cela posé, considérons d'abord la face *abcd* par laquelle le polyèdre repose sur le plan horizontal; pour avoir la perspective du point *a*, concevons par ce point deux droites horizontales, l'une perpendiculaire au tableau et l'autre inclinée à 45° sur le tableau; la perspective de la première passera par le point o^p, celle de la seconde par le point r'^p; de plus, la première perce le tableau en un point distant du point *z* d'une quantité aa^v, et la seconde en un point distant de *z* de la quantité $z\alpha$, et comme ces deux droites sont dans le plan horizontal, si nous prenons sur Y les longueurs $z^p a'^p = aa^v$, $z^p\alpha^p = z\alpha$, et si nous menons les droites $a'^p o^p$, $\alpha^p r'^p$, elles se croisent au point a^p qui sera la perspective du point *a*. La droite *ob* perce le tableau en un point b' distant de l'axe Y de la quantité zb'^h, et de l'axe X de la quantité zb'^v; prenant donc $z^p b'^p = zb'^h$ et élevant sur l'axe X la perpendiculaire $b'^p b^p = zb'^p$, le point b^p sera la perspective du point *b*. Pour avoir le point c^p, nous prendrons $z^p\gamma'^p = cc^v$, et nous joindrons $\gamma'^p o^p$; et l'on aura la perspective d'une perpendiculaire abaissée du point *c* sur le tableau; puis la droite *oc* perce le tableau en un point c' élevé verticalement de la quantité zc'^v; prenant donc $z^p c' = zc'^v$ et menant par c'^p une parallèle à X, elle va couper la droite $\gamma'^p o^p$ au point c^p demandé. Quant au point d^p, la droite *cd* étant horizontale et parallèle au tableau, il se trouvera à l'intersection de la même horizontale et de la droite $\delta'^p o^p$, perspective d'une perpendiculaire au tableau et menée par le point *d*.

Passant à la face *cdefg*, nous avons obtenu les perpectives des trois sommets *e*, *f*, *g*, par des constructions identiques à celles employées pour trouver la perspective du point *b*.

Pour le sommet *i* de la face *bcgi*, nous avons mené deux horizontales $i\lambda$, $i\lambda'$ inclinées à 45° sur le tableau : leurs perspectives passent respectivement par les points de distance r^p et r'^p et se croisent au point i^p cherché; pour obtenir la perspective de $i\lambda$, il faut prendre sur Y, à partir de z^p, une longueur égale à ξi^v, mener par le point ainsi obtenu une parallèle à X, prendre sur cette parallèle et en arrière une longueur égale à $z\lambda^h$, puis joindre ce dernier point avec r^p; mais si l'on conçoit que toute la construction descende verticalement d'une quantité égale à ξi^v, nous aurons à prendre $z^p\lambda^p = z\lambda^h$, $z^p\rho^p = \xi i^v$, à joindre $\lambda^p\rho^p$, et il ne nous restera plus qu'à mener par r^p une parallèle à $\rho^p\lambda^p$; on construira de même la perspective de $i\lambda'$, et ces deux perspectives se croiseront au point i^p.

Les perspectives des trois sommets de la face *ade* étant connues, et toutes les autres faces concourant au point *s*, il ne nous reste plus qu'à trouver la perspective de ce sommet *s* du polyèdre; pour cela, remarquons que la droite *os* coupe le

tableau en un point s', dont la hauteur verticale est égale à zs'^v, prenant $z^p s'^p = zs'^v$ et menant par s'^p une parallèle à X, cette parallèle contient s^p, puis concevant par s une perpendiculaire au tableau, elle le percevra en un point dont les distances aux axes X et Y sont σs^v et σs^h; prenant donc $z^p \sigma'^p = \sigma s^v$, menant par σ'^p une parallèle à X, et prenant $\sigma'^p \sigma^p = \sigma s^h$ et joignant $\sigma^p o^p$, cette droite contient aussi le point s^p, qui se trouve ainsi déterminé.

Ayant obtenu les perspectives de tous les sommets du polyèdre, il n'y a plus qu'à les unir par des droites pour avoir la perspective demandée. Pour avoir maintenant la perspective de l'ombre portée ($as^of^og^ocda$), nous obtiendrons celle du point s^o en prenant d'abord la perspective $\xi^p o^p$ d'une perpendiculaire au tableau abaissée de ce point comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, puis remarquant que la droite os^o coupe le tableau en un point ξ' distant de Y d'une quantité $z\xi'^h$, il faudra chercher sur $\xi^p o^p$ le point situé à cette distance de Y, ce que l'on obtiendra évidemment en prenant $z^p \xi'^p = z\xi'^h$, et menant par ξ'^p une parallèle à Y, elle ira couper $\xi^p o^p$ au point cherché, que nous aurions dû noter s^{op}, d'après les conventions précédentes, et que, pour plus de simplicité, nous notons seulement s^π. Nous obtenons de même le point f^π, en remarquant que la droite $s^\pi f^\pi$ doit être parallèle à X; enfin, nous avons obtenu le point g^π de la même manière.

Nous avons varié dans cette épure les moyens employés pour obtenir les perspectives de tous les sommets du polyèdre, afin d'enseigner toutes les méthodes connues, laissant au dessinateur le choix de la méthode qu'il jugera préférable dans chaque cas particulier.

191. Il nous reste à faire quelques observations sur la *ponctuation de la figure*. Remarquons d'abord que la projection d'un corps sur un plan est la *perspective* de ce corps pour un observateur dont l'œil serait placé à l'infini sur une droite perpendiculaire à ce plan de projection; ou sous un autre point de *vue géométrique*, chaque projection sera l'*ombre portée* pour une direction de rayons lumineux perpendiculaire au plan de projection; les faces du polyèdre concourant au point s seraient seules vues : donc, sur la projection horizontale, les droites qui forment le contour de ces faces, devront être pleines; les autres lignes sont ponctuées, et la ligne brisée *abigfea* serait pour cet observateur le contour apparent du polyèdre.

Pour un observateur dont l'œil serait placé à une distance infinie sur une perpendiculaire au plan vertical, on trouvera facilement que le contour apparent est la ligne brisée *absfeda*, de sorte que ce contour et les lignes *sa*, *se*, *ae*, doivent être tracées en lignes pleines.

Cette ponctuation des deux projections est sans préjudice des parties cachées par les plans de projection, ce qui pourrait obliger d'écrire en *ligne ponctuée* quelques portions de celles que nous venons d'indiquer comme devant être pleines. Les principes précédents, appliqués à tous les corps que nous considérerons dans la suite de ce cours, complètent ce qui concerne la ponctuation des projections des figures de l'espace que l'on veut représenter, et dont la partie la plus simple a été exposée précédemment (n° 16).

Relativement aux *ombres*, le polyèdre porte *ombre* sur la partie $adcg^{o}f^{o}s^{o}a$ du plan horizontal, de sorte que si le corps était enlevé et que l'ombre restât, elle aurait la forme représentée (*fig.* 168), mais pour l'observateur regardant la projection horizontale, le corps cache une partie de cette ombre, et elle lui paraît avoir la forme $ae^{h}f^{h}kg^{o}f^{o}s^{o}a$; c'est pourquoi nous n'avons *haché* que cette partie du plan par les *hachures* affectées à l'*ombre portée*. Quant aux faces *ombrées*, il est facile de reconnaître que la ligne brisée *abcgfsa* est la ligne de séparation d'ombre et de lumière; donc, les faces *abcd*, *cdefg*, *efs*, *ade*, *aes*, sont dans l'ombre. Mais l'observateur, qui regarde la projection horizontale, ne voit que les faces *sef*, *sae*; c'est pourquoi nous n'avons *ombré* que ces deux faces sur la projection horizontale, et nous avons eu soin de diriger les *hachures* dans des sens différents. L'observateur qui regarde la projection verticale ne voit que les faces *sef*, *ade*, *sae*; ce sont donc les seules faces que nous ayons dû *ombrer* en projection verticale.

Enfin, sur la perspective, il évident que pour l'observateur placé en *o* le contour apparent du polyèdre est *abiseda*; il ne voit donc que les faces *sab*, *sbi*, *sae*, *ade*, les deux premières éclairées, les deux autres ombrées. Les droites, qui forment le contour des quatre faces, sont seules tracées en *lignes pleines*. Enfin, il faut *hacher* toute la partie de la perspective de l'ombre portée, qui est située en dehors de la *perspective* du polyèdre.

191 (*bis*). Les Anglais ont imaginé un genre particulier de projection auquel ils ont donné le nom de projection *isométrique*. Dans les ouvrages publiés en Angleterre sur la technologie, on fait un usage presque constant de ce genre de projection lorsqu'il s'agit de représenter des machines. D'après les Anglais, ce genre de dessin, ou plutôt ce mode de projection a été adopté par les Allemands. La projection isométrique est une projection orthogonale sur un certain plan. Elle déforme les objets d'une manière désagréable pour le lecteur qui a un dessin de ce genre sous les yeux, et l'avantage que ce système de projection présente peut facilement être obtenu dans la perspective oblique dite militaire, et les dessins en perspective mi-

litaire sont, personne ne peut affirmer le contraire, très-lisibles et bien autrement agréables à l'œil que les dessins isométriques (*).

Projection isométrique (**).

I. Concevons trois axes rectangulaires entre eux X, Y, Z, se coupant en un point o (*fig.* 168 *a.*).

Étant donné un point m dans l'espace, on aura ses trois coordonnées $x=a$, $y=b$, $z=c$, et le point m sera complétement déterminé de position dans l'espace, en supposant que cette position est rapportée aux trois axes fixes X, Y, Z.

Cela posé :

Menons par le point o un plan P de position arbitraire par rapport aux trois axes X, Y, Z. Nous pourrons tracer dans le plan P et par le point o deux droites X', Y' quelconques, faisant entre elles un angle quelconque, et dès lors nous pourrons regarder ces droites X', Y' comme étant les projections obliques sur le plan P, des axes X, Y. Dès lors faisant passer par les droites X et X' un plan X_1 et par les droites Y et Y' un plan Y_1, ces deux plans X_1 et Y_1 se couperont suivant une droite D passant par le point o. Nous pourrons donc dire que les axes X et Y sont projetés sur le plan P en les droites X' et Y' par des plans parallèles à la droite D.

Dès lors la projection Z' du troisième axe Z sur le plan P n'est plus arbitraire, il faut la construire, et elle sera donnée par un plan Z_1 passant par l'axe Z et la droite D.

Nous aurons donc sur le plan P, et passant par le point o, trois axes X', Y', Z', dont deux sont arbitraires, mais dont le troisième a une position déterminée en vertu de l'angle que les deux axes, arbitrairement choisis, font entre eux.

Cela posé :

(*) Prenons aux Anglais ce qui est bon, mais point d'engouement, et rejetons ce qui chez eux est mauvais ou médiocre. En Angleterre on n'étudie pas la géométrie descriptive comme science; on ne l'enseigne que dans un petit nombre d'écoles et encore n'y enseigne-t-on que les éléments; c'est une science ignorée de la plupart des ingénieurs et mal connue de ceux qui s'en servent, car, pour eux, elle n'est pas encore autre chose que l'art des projections. TH. O.

(**) Le système de projection, connu sous le nom de *Perspective isométrique*, a été proposé par M. William Farish, nommé, en 1813, professeur à l'Université de Cambridge (mort en 1837). Le professeur Farish a publié son Mémoire sur la perspective isométrique dans le volume Ier des transactions de la Société philosophique de Cambridge (*Transactions of the Cambridge philosophical society*).

On trouve dans l'*Aide mémoire général des ingénieurs* (3 vol. in-8°) un résumé du Mémoire de M. Farish, et des développements que l'auteur n'a pas donnés et qui tendent à faciliter les tracés de ce mode de projection.

(Cette note m'a été communiquée par M. Tom Richard.) TH. O.

Si l'on porte respectivement et à partir de l'origine o sur les trois axes X, Y, Z les distances

$$x=a=on, \quad y=b=\overline{op}, \quad z=c=\overline{oq},$$

les trois points n, p, q seront respectivement projetés obliquement et parallèlement à la droite D, en les points n', p' q' sur les axes X', Y', Z', tracés sur le plan P.

On aura donc

$$\overline{on}=\alpha.\overline{on'}, \quad \overline{op}=\beta.\overline{op'}, \quad \overline{oq}=\gamma.\overline{oq'}.$$

Dès lors les coordonnées rectangulaires du point m rapportées aux axes rectangulaires X, Y, Z étant x, y, z, et les coordonnées de la projection m' du point m sur le plan P étant x', y', z', on aura :

$$x=\alpha x', \quad y=\beta y', \quad z=\gamma z'.$$

α, β, γ étant des coefficients constants et dépendants de l'inclinaison du plan P par rapport aux axes X, Y, Z, et de l'angle que deux des trois droites X', Y', Z' font avec ces mêmes axes.

On conçoit donc qu'étant donné sur le plan P, un point m', on aura ses trois coordonnées x', y', z' (toutes trois situées sur le plan P), et dont on pourra conclure les trois coordonnées x, y, z du point m de l'espace en le supposant rapporté à trois axes rectangulaires entre eux et *vice versâ*.

II. Dans les constructions graphiques on sera obligé de se servir d'une échelle, et l'on voit que pour passer des coordonnées planes x', y', z' aux coordonnées rectangulaires et dans l'espace x, y, z, il faudrait trois échelles; l'une réduisant les coordonnées x..... au moyen du rapport α, l'autre réduisant les coordonnées y..... au moyen du rapport β, la troisième enfin réduisant les coordonnées z..... au moyen du rapport γ.

Il serait donc avantageux de choisir X', Y' sur le plan P, et par suite de conclure Z' de manière à ce que l'on eût $\alpha=\beta=\gamma$.

C'est ce que l'on obtient en supposant que le plan P est perpendiculaire à la diagonale d'un cube construit sur les trois axes X, Y, Z comme arêtes se coupant au sommet o de ce cube, et dès lors la droite D est la diagonale de ce cube, et le plan P est perpendiculaire à cette diagonale D.

Par cette hypothèse les trois axes X', Y', Z' tracés sur le plan P font entre eux des angles égaux, et l'on a $\widehat{X'Y'}=\widehat{X'Z'}=\widehat{Y'Z'}=120°$.

Par cette hypothèse, on peut prendre sur les axes X', Y', Z' les coordonnées x', y', z' de la projection m' du point m égales aux coordonnées réelles x, y, z

de ce point m de l'espace. En sorte qu'ayant sur le plan P une suite de points m', a', b',.... on aura tout de suite, par de très-simples opérations graphiques, la longueur des coordonnées rectangulaires x, y, z des divers points m, a, b,.... de l'espace, par hypothèse les points m', a', b'.... sont supposés être les projections non plus obliques mais orthogonales sur le plan P (*).

Et c'est parce que par ce choix des axes X', Y', Z' et de la direction du plan P, on a : $\alpha = 6 = \gamma$, que l'on a donné à ce genre de projection le nom de *projection isométrique*.

III. Mais dans la projection oblique, dite *perspective militaire* ou *cavalière*, on peut obtenir des résultats analogues, et en effet : dans ce genre de projection, étant donné (*fig.* 168 *b.*) les trois axes rectangulaires entre eux X, Y, Z auxquels on rapporte la position des divers points m.... d'un *relief*, on prend le plan (Z, X) pour le plan P de projection et l'on trace dans ce plan les trois axes X, Y', Z, tels que X et Z sont deux des axes rectangulaires primitifs et le troisième Y' qui passe par l'origine o divise en deux parties égales l'angle $\widehat{Z, X}$.

Il s'ensuit, évidemment, que les faces d'un cube construit sur les trois axes X, Y, Z comme arêtes et ayant l'un de ses sommets à l'origine o, se projettent sur le plan P ou (Z, X) de telle manière que les carrés-faces situés dans des plans parallèles au plan P ou (Z, X) se projettent sur ce plan suivant des carrés et que les carrés ou faces parallèles au plan (Z, Y) ou au plan (X, Y) se projettent sur le plan P suivant des losanges de mêmes dimensions, et étant par conséquent superposables.

Tandis que dans la *projection isométrique*, les faces d'un tel cube se projetteraient toutes suivant des *losanges* identiques.

IV. La droite D, dans le système de projection *militaire* est telle :

Que si l'on prend (*fig.* 168 *b.*) sur l'axe Y un point p tel que l'on ait $\overline{op} = y$ et si l'on prend sur l'axe Y' [situé sur le plan P ou (Z, X)] un point p' tel que l'on ait $\overline{op'} = y = y'$, en unissant les points p et p' par une droite D', la droite D (qui passe par l'origine o) sera parallèle à D'. Il est évident que la droite D' est inclinée sous l'angle de 45° par rapport au plan (Z, X), on a donc sur ce plan (Z, X) une projection oblique; ainsi la *projection militaire* est une projection oblique, et la *projection isométrique* est une projection orthogonale.

Imaginons un cube ayant l'un de ses sommets au point o origine des axes rectangulaires X, Y, Z et ayant ses arêtes respectivement parallèles à ces trois axes.

Traçons sur les faces de ce cube des cercles inscrits aux carrés qui déterminent

(*) Nous verrons plus loin que les points m', a', b',..... ne sont pas réellement les projections orthogonales des points m, a, b,..... de l'espace.

ses faces. On aura six cercles de même rayon et situés deux à deux dans des plans parallèles aux plans (Z, X), (Z, Y) et (X, Y).

En prenant la *projection isométrique*, ces six cercles se projettant sur le plan P, suivant six ellipses identiques tracées chacune sur son système de diamètres conjugués égaux ; ces diamètres conjugués seront égaux en longueur et au diamètre du cercle, et comprendront entre eux un angle de 60° ou 120°.

En prenant, au contraire, la *projection militaire*, deux des six cercles se projetteront sur le plan P ou (Z, X) suivant des cercles égaux et de même rayon et les quatre autres cercles, savoir : les deux parallèles au plan (Z, Y) et les deux parallèles au plan (X, Y) suivant des ellipses identiques et construites chacune sur son système de diamètres conjugués égaux ; ces diamètres conjugués seront égaux en longueur et au diamètre du cercle, et comprendront entre eux un angle de 45° ou 135°.

V. Jusqu'à présent nous ne voyons pas que la *projection isométrique* l'emporte sur la *projection militaire*.

La direction des axes de *l'ellipse isométrique* comme ceux de *l'ellipse militaire* se construisent facilement, puisque pour l'une et l'autre, cette direction est donnée par les diagonales du losange circonscrit à l'ellipse et dont les côtés sont respectivement *parallèles*, et deux à deux, aux diamètres conjugués égaux de cette ellipse.

Les avantages dont pourrait jouir l'ellipse isométrique par rapport à l'ellipse militaire, ne peuvent donc dépendre que de ceci, savoir : que pour la première ellipse, les diamètres conjugués égaux se coupent sous un angle de 60°, tandis que pour la seconde ellipse, les diamètres conjugués égaux se coupent sous un angle de 45° (*).

Mais examinons la question sous un point de vue plus général.

VI. Il est évident qu'ayant un *solide* à trois dimensions, et dont les divers points sont rapportés à trois axes X, Y, Z rectangulaires entre eux ou non, on veut, au moyen d'un seul dessin ou d'une seule projection sur un plan, pouvoir reconstruire ce *solide*.

On veut donc n'employer, pour ce mode de projection, qu'un seul dessin au lieu de deux, et non comme on le fait dans le système ordinaire où l'on a une projection horizontale (ou *plan*), et une projection verticale (ou *élévation*).

Pour arriver à n'avoir qu'un seul dessin (ou une seule projection), on suppose que

(*) Mais la projection militaire permet de construire très-facilement les sommets de l'ellipse, car (*fig.* 108 *d.*) on voit que les sommets de l'ellipse projection sur le plan (Z, X) du cercle tracé sur la face du cube qui est parallèle au plan (Z, Y) sont donnés par les quatre points en lesquels les diagonales de la face carrée située sur le plan (Z, X) coupent le cercle inscrit à ce carré, et cela au moyen de parallèles à la diagonale du losange projection sur le plan (Z, X) de la face carrée du cube situé sur le plan (Y, X).

les trois axes rectangulaires ou non X, Y, Z (qui forment un système *solide*), sont projetés sur un plan P en des axes X′, Y′, Z′, qui forment dès lors un système *plan*.

Nota. Cette idée a de l'analogie avec celle qui fait recoucher le plan vertical de projection sur le plan horizontal de projection, pour arriver à transformer le problème *solide* en un problème *plan*.

VII. Concevons, d'après ce qui précède, un *dessin* B′ tracé sur un plan P, et chaque point de ce dessin B′ étant rapporté à trois axes X′, Y′, Z′ tracées sur ce plan P et se coupant en un point *o*.

Nous pourrons par le point *o* mener une droite D, qui, située hors du plan P, lui sera oblique ou orthogonale, et nous pourrons mener par le point *o* une droite arbitraire Y dans le plan (D, Y), une droite arbitraire X dans le plan (D, X), et enfin une droite arbitraire Z dans le plan (D, Z).

Au moyen de la projection B′ nous pourrons construire dans l'espace les divers points d'un *solide* B, chacun de ces points étant rapporté aux trois axes X, Y, Z (qui forment un système *solide*).

Or, l'on peut faire varier la position des axes X, Y, Z d'une infinité de manières en conservant la même droite projetante D.

Or, l'on peut faire varier d'une infinité de manières la direction de la droite projetante D, par rapport au plan P.

On voit donc que la figure B′ peut être considérée comme étant la projection cylindrique sur le plan P d'une infinité de systèmes B..... *solides*.

Ainsi : une figure B′ tracée sur un plan P peut être la projection cylindrique d'une infinité de systèmes *solides* B..... situés dans l'espace.

Ainsi : un système *solide* B, situé dans l'espace, peut avoir une infinité de projections planes B′..... en changeant, soit la direction du plan P, soit la direction de la droite D, ou l'une et l'autre en même temps.

Nous retrouvons encore ici le principe énoncé précédemment : *Il faut savoir remonter du plan dans l'espace et descendre de l'espace sur le plan*.

VIII. Si nous reprenons les trois axes rectangulaires entre eux X, Y, Z se coupant en un point *o*, et si nous reprenons le plan P passant par le point *o*, les trois axes X′, Y′, Z′ tracés sur ce plan, et la droite D qui projette *obliquement* un *relief* sur le plan P, nous devons nous rappeler qu'un point *m* du *relief* ayant pour coordonnées rectangulaires $x=a$, $y=b$, $z=c$, a sur le plan P pour projection oblique un point m' ayant pour coordonnées $x'=\alpha x$, $y'=6y$, $z'=\gamma z$, en sorte qu'en définitive les coordonnées du point m' rapportées aux trois axes X′, Y′, Z′ (tracés sur le plan P), sont : $x'=\alpha a$, $y'=6b$ et $z'=\gamma c$.

Si donc sur le plan P on trace un dessin B′ tel que pour chacun de ses points m', on porte sur les axes X′, Y′, Z′, non les valeurs ci-dessus trouvées pour

x', y' et z', mais les valeurs des coordonnées x, y, z du point m (lequel point appartient au *relief* B), la figure B′ ne sera pas la projection oblique sur le plan P du relief B, mais celle d'un autre relief B_1 dont l'un des points m_1 aurait pour coordonnées rectangulaires

$$x=\frac{a}{\alpha},\ \ y=\frac{b}{\beta},\ \ z=\frac{c}{\gamma}.$$

De sorte que si le relief B est une surface ayant pour équation $f(x, y, z)=o$, le relief B_1 sera une surface ayant pour équation

$$f\left(\frac{x}{\alpha},\ \frac{y}{\beta},\ \frac{z}{\gamma}\right)=0$$

Ainsi, si par exemple le relief B est une sphère ayant son centre en o, et ayant dès lors pour équation

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1$$

le relief B_1 sera un ellipsoïde à trois axes inégaux, et ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\alpha^2R^2}+\frac{y^2}{\beta^2R^2}+\frac{z^2}{\gamma^2R^2}=1.$$

En sorte que le dessin B′ ne sera pas la projection oblique sur le plan P de la sphère B, mais la projection oblique de l'ellipsoïde B_1.

Toutefois le dessin B′ permettra de construire le *relief* ou *sphère* B, parce que l'on trouvera en les coordonnées x', y', z' d'un point m' du dessin B′, la longueur des coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point m de la sphère B.

On est donc conduit à ne considérer la figure B′ que comme un dessin servant à construire un certain relief, et non plus comme étant la projection de ce relief.

IX. On voit apparaître dans ce qui précède le principe très-fécond, en géométrie descriptive, de la transformation d'un *relief* en un autre relief, d'une *figure* en une autre figure, d'une *surface* en une autre surface. Nous devons cependant faire remarquer que lorsque l'on emploie la projection isométrique, dans laquelle on a : $\alpha=\beta=\gamma$, la figure B′ n'est plus la projection du relief B, mais d'un relief B_1 semblable au relief B, et ayant l'origine o pour pôle de similitude, de sorte que si le relief B est une sphère, le relief B_1 serait aussi une sphère. C'est une des propriétés de la projection isométrique de ne pas altérer dans sa nature la forme géométrique du relief B que l'on veut construire au moyen de la figure ou dessin B′.

X. Maintenant, en vertu de tout ce qui précède, l'on pourra comprendre les

raisons qui nous font préférer la projection militaire à la projection isométrique; en effet :

L'auteur anglais qui a imaginé la projection isométrique, y a été conduit pour arriver à représenter une machine au moyen d'un seul dessin, et par suite de pouvoir, au moyen de ce seul dessin (c'est-à-dire au moyen d'une seule projection), construire une machine.

Sous ce point de vue, il a raison; mais comme ce genre de projection déforme les objets, il est difficile de se faire (en regardant le dessin d'une machine exécuté d'après le mode de projection isométrique) une idée exacte des formes de l'objet représenté par le dessin; car toutes les faces d'un cube sont projetées sur le plan P isométrique, suivant des losanges (*fig.* 168 *c.*); rien donc dans cette figure ne rappelle à l'œil que les faces sont des carrés.

Tandis que dans la projection militaire (*fig.* 168 *d.*) l'on voit de suite à l'œil que deux des faces du cube, celle située sur le plan de projection (Z, X), et celle qui est parallèle à ce plan, sont des carrés, ce qui amène tout naturellement l'observateur à penser que le dessin représente la projection d'un cube. D'ailleurs une machine repose toujours sur un sol horizontal; ses diverses pièces principales sont, le plus ordinairement, les unes horizontales et les autres verticales.

Il existe toujours, pour une machine donnée en position, un plan vertical qui est parallèle à un grand nombre de pièces horizontales et verticales, et c'est ce plan que l'on peut prendre dans la projection militaire pour plan (Z, X) de projection.

La plupart des roues dentées qui existent dans une machine ont ordinairement leur plan soit horizontal, soit vertical, et pour les unes et les autres, perpendiculaire au plan (Z, X). Il nous semble donc que la *projection militaire* doit être préférée à la *projection isométrique* pour le dessin des machines, lorsque l'on veut n'employer qu'un seul dessin ou projection pour les représenter d'une manière complète, et ainsi de manière à ce qu'au moyen de ce seul dessin on puisse construire la machine.

CHAPITRE VI.

DE LA TRANSFORMATION CYLINDRIQUE ET CONIQUE.

Transformation d'une droite en une autre droite, et d'un plan en un autre plan.

192. Si l'on a une droite D dans l'espace et un plan H, si par la droite D on fait passer un plan P coupant le plan H suivant une droite D_1 on peut dire que la droite D_1 est la transformée sur le plan H de la droite D de l'espace.

Le plan P que nous faisons passer par la droite D peut être considéré : 1° comme engendré par une droite G se mouvant parallèlement à elle-même et à une droite K située dans ce plan P et alors l'on regarde le plan P comme engendré *cylindriquement*; 2° comme engendré par une droite J passant par un point *s* situé sur ce plan P et se mouvant sur une droite L située aussi dans ce plan P, et alors l'on regarde le plan P comme engendré *coniquement*. Dans le premier cas la droite D_1 est la projection *cylindrique* ou oblique de la droite D; dans le deuxième cas la droite D_1 est la projection *conique* ou centrale de la droite D;

Dans le premier cas : si l'on mène une droite G parallèle à K et coupant les droites D et D_1 respectivement aux points *d* et d_1, ces deux points *d* et d_1 seront deux points *homologues* et nous dirons que le point d_1 est le *transformé* du point *d* dans le mode de *transformation cylindrique*, et les droites G... sont dites droites *de transformation cylindrique*.

Dans le deuxième cas : si l'on mène par le point *s* une droite J coupant les droites D et D_1 respectivement aux points *b* et b_1, ces deux points *b* et b_1 seront deux points *homologues* et nous dirons que le point b_1 est le *transformé* du point *b* dans le mode de *transformation conique;* et les droites J..... divergentes du point *s* sont dites *droites de transformation conique.*

Il est évident que dans le mode de transformation cylindrique, le point milieu

d'une droite D se transforme en le point milieu de la transformée D_1, et que cela n'a pas lieu généralement dans le mode de transformation conique, *en d'autres termes*, que cela ne peut avoir lieu, lorsque l'on emploie le mode de transformation conique, que dans quelques cas très-particuliers.

Si l'on a un plan P dans l'espace et deux droites A et B situées sur ce plan P et que par A et B on fasse passer des plans A′ et B′ parallèles à une même droite J arbitrairement située dans l'espace, et que l'on coupe le système par un plan Q, on pourra dire que le plan Q est *transformé* du plan P, car les deux droites A_1 et B_1 suivant lesquelles seront coupés par le plan Q les plans A′ et B′, seront les *transformées cylindriques* des droites A et B, les droites de transformation étant parallèles à J.

Si l'on a un plan P dans l'espace et deux droites A et B situées sur ce plan, et si par ces droites A et B on fait passer des plans A′ et B′ assujettis à passer l'un et l'autre par un même point *s* de l'espace, et si l'on coupe le système par un plan quelconque Q, on pourra dire que le plan Q est le *transformé* du plan P, car les deux droites A_1 et B_1 suivant lesquelles seront coupés par le plan Q les plans A′ et B′ seront les *transformées coniques* des droites A et B, les droites de transformation divergeant du point *s*.

Dans le premier cas : on dira que le plan Q est le *transformé cylindrique* du plan P.

Dans le deuxième cas : on dira que le plan Q est le *transformé conique* du plan P ; cela posé :

Traçons dans un plan P deux droites D et Y se coupant un point ω.

Par les divers points m, m', m'',... de D menons des parallèles à une droite J située dans le plan P et coupant la droite Y en les points p, p', p'',... puis par les points p, p', p'',... menons des parallèles à une seconde droite J_1 et prenons sur ces parallèles des points m_1, m'_1, m''_1,... tels que l'on aie :

$$mp : m'p' : m''p'' : \text{etc.}, :: m_1p : m_1'p' : m_1''p'' : \text{etc.}$$

les points m_1, m'_1, m''_1,... seront sur une droite D_1 passant par le point o.

On pourra dire que la droite D_1 est la *transformée cylindrique* de la droite D; mais elle ne sera plus sa *transformée* d'une manière directe, car pour passer de la droite D à la droite D_1 on s'est appuyé sur la droite Y ; c'est pourquoi on doit donner à la droite Y le nom d'*axe de transformation cylindrique*.

Ce que nous venons de faire dans un plan, nous pouvons l'effectuer dans l'espace et de la manière suivante.

Par une droite Y menons deux plans P et P_1 ; coupons les deux plans P et P_1

suivant les droites J et J_1 par un plan quelconque Q; cela fait, traçons dans le plan P une droite D coupant la droite Y au point *o*, puis menons par les divers points $m, m', m'', \ldots$ de D des parallèles à J, lesquelles couperont Y aux points p, $p', p'', \ldots$ enfin menons par les points $p, p', p'', \ldots$ des parallèles à J_1 et prenons sur ces parallèles des points m_1, m_1', m_1'', etc., tels que l'on aie :

$$mp : m'p' : m''p'' : \text{etc.}, :: m_1p : m_1'p' : m_1''p'' : \text{etc.}$$

les divers points m_1, m_1', m_1'', seront sur une droite D_1 située dans leplan P_1 et passant par le point *o*.

Il est évident que si l'on prend sur la droite D deux points x et y, le point q milieu de $\overline{xy}$ aura pour *transformé* sur D_1 le point q_1 qui sera le milieu de la droite $\overline{x_1y_1}$, les points x_1 et y_1 étant les *transformés* sur la droite D_1 des points x et y de la droite D.

Cela posé :

Remarquons que les droites $mm_1, m'm'_1, m''m''_1, \ldots$ seront toutes parallèles entre elles et situées dans le plan X passant par les droites D et D_1, et de plus on aura :

$$mm_1 : m'm_1' : m''m_1'' : \text{etc.} :: mp : m'p' : m''p'' : \text{etc.} :: m_1p : m_1'p' : m_1''p'' : \text{etc.}$$

On aura aussi :

$$mm_1 : m'm_1' : m''m_1'' : \text{etc.} :: mo : m'o : m''o : \text{etc.} :: m_1o : m_1'o : m_1''o : \text{etc.}$$

on peut donc regarder les deux droites D et D_1 (en tant que situées dans le plan X) comme étant l'une D_1 la *transformée cylindrique directe* de l'autre droite D.

Si l'on a deux plans P et P_1 se coupant suivant une droite Y et si l'on trace dans le plan P deux droites D et D' on pourra déterminer, en s'appuyant sur la droite Y comme axe de transformation, deux droites D_1 et D'_1 qui situées sur le plan P_1 seront les *transformations* des droites D et D'. On peut donc dire que le plan P_1 est le transformé du plan P au moyen de l'axe Y de transformation.

D'après ce qui précède on voit : 1° que si l'on a un prisme Σ coupé par deux plans P et P_1 se coupant entre eux suivant une droite Y, on peut dire que la section (P, Σ) a pour *transformée cylindrique* la section (P_1, Σ), l'axe de transformation étant la droite Y.

2° Que si l'on a une pyramide Σ coupée par deux plans P et P_1 se coupant entre

eux suivant une droite Y, on peut dire que la section (P, Σ) a pour *transformée conique* la section (P_1, Σ), l'*axe* de transformation étant la droite Y et le *centre* de la transformation étant le sommet *s* de la pyramide donnée Σ.

Appliquons ce qui vient d'être dit à quelques exemples.

Transformation dans l'espace d'un polygone plan en un autre polygone plan.

192 *bis*. Si 1° nous traçons sur un plan H une droite D, et si nous prenons sur le plan H deux points *a* et *b* arbitraires, la droite qui les unit coupant la droite D en un point *p* (*fig.* 169).

Si 2° nous dirigeons dans l'espace une droite R venant percer le plan H au point *x*.

Si 3° nous prenons sur la droite R deux points arbitraires *s* et *s'*.

Si 4° nous joignons les points $\left\{\begin{matrix} s \text{ et } a \\ s \text{ et } b \\ s' \text{ et } a \\ s' \text{ et } b \end{matrix}\right\}$ par quatre droites.

Si 5° nous prenons sur la droite R un point arbitraire *z*.

Si 6° nous joignons les points *x* et *a*, *x* et *b* par deux droites venant couper la droite D, la première au point α et la seconde au point β.

Si 7° nous joignons les points *z* et α, *z* et β par deux droites, savoir :

$z\alpha$ coupant *sa* en *a'*

$z\beta$ coupant *sb* en *b'*

Si 8° nous menons les droites $\left\{\begin{matrix} xa' \text{ coupant } s'a \text{ en } a''. \\ xb' \text{ coupant } s'b \text{ en } b''. \end{matrix}\right.$

Je dis que les trois points *a'*, *b'*, *p*, sont en ligne droite, ainsi que les trois points *a''*, *b''*, *p*.

Je dis aussi que les droites α*a''*, β*b''*, étant prolongées se coupent en un point *y* situé sur la droite R.

En effet, la droite *abp* peut être considérée comme la trace, sur le plan H, d'un plan X coupant la droite R au point *s*. La droite *abp* peut encore être considérée comme la trace, sur le plan H, d'un plan X' coupant la droite R au point *s'*.

Les droites α*x*, β*x*, peuvent être considérées comme les traces, sur le plan H, de deux plans A et B passant par la droite R.

La droite D peut être considérée comme la trace, sur le plan H, d'un plan P courant la droite R au point z.

Ainsi, la droite $a'b'p$ est l'intersection des deux plans P et X.

Par les trois points a', b', x, on peut faire passer un plan Z; ce plan Z coupera le plan A suivant la droite $xa'b'$ et le plan B suivant la droite $xb'b''$, et le plan X' suivant la droite $a''b''$.

Or : les droites $a'b', a''b''$ étant dans le plan Z, et $a'b'$ coupant la droite D au point p, la trace sur le plan H du plan Z sera xp; donc la droite $a''b''$ passe par le point p.

Les trois droites $\alpha a'', \beta b'', a''b''p$, déterminent un plan Q ayant la droite D pour trace sur le plan H, et ce plan Q coupera la droite R en un point y tel que les droites $\alpha a'', \beta b''$ devront passer par ce point y, puisque les droites $\alpha a''$ et $\beta b''$ sont les intersections de ce plan Q avec les plans A et B, lesquels passent par la droite R.

On peut supposer que la droite R ne perce pas le plan H, mais lui soit parallèle (*fig.* 169, *e*).

Alors le point x est situé à l'infini.

Alors les droites R, $\alpha a, \beta b, a'a'', b'b''$, sont parallèles entre elles.

Le reste des constructions subsiste sans autre modification.

Nous pouvons étendre ce qui précède à trois points a, b, c, pris arbitrairement sur le plan H (*fig.* 169, *a*).

Ainsi, la droite R perçant le plan H en un point x, on pourra considérer le triangle abc comme la base commune à deux pyramides ayant, l'une son sommet en s et l'autre en s'.

Le plan P, dont la trace sur le plan H est la droite D, coupera la pyramide (s, abc) suivant le triangle $a'b'c'$, et la droite R au point z.

Si l'on considère le point x comme le sommet d'une pyramide ayant le triangle $a'b'c'$ pour base, cette pyramide $(x, a'b'c')$ coupera la pyramide (s, abc), suivant le triangle $a''b''c''$, dont le plan Q passera par la droite D.

Ainsi l'on peut dire :

Ayant, pour deux points a et b, déterminé les points z et y, la pyramide (s', abc) sera coupée par le plan P ou (z, D), suivant le triangle $a'b'c'$.

La pyramide (s', abc) sera coupée par le plan Q ou (y, D), suivant le triangle $a''b''c''$.

Les deux triangles $a'b'c', a''b''c''$, seront sur une pyramide dont le sommet sera en x.

Cela aura lieu pour un polygone d'un nombre n de côtés, que les côtés soient finis ou infiniment petits.

Ainsi l'on peut dire :

Étant donnés sur un plan H, un polygone C et une droite D ;

Étant dirigée dans l'espace, une droite R coupant le plan H en un point x;

Faisant passer par la droite D un plan P coupant la pyramide (s, C), suivant un polygone C'.

La pyramide (x, C') coupera la pyramide (s', C), suivant un polygone C'' qui sera plan, et dont le plan passera par la droite D.

Si la droite R est parallèle au plan H, le point x sera situé à l'infini, et dès lors, les triangles $a'b'c'$, $a''b''c''$, seront sur un prisme dont les arêtes $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$, seront parallèles à la droite R (*fig.* 169, *b*).

Cela aura lieu pour un polygone d'un nombre arbitraire de côtés finis ou infiniment petits.

Dès lors on peut dire :

Si l'on a une droite R parallèle au plan H, un polygone C et une droite D tracés sur ce plan H;

Si l'on prend deux points arbitraires s et s', sur la droite R; si l'on fait passer par la droite D un plan arbitraire P, ce plan coupera la pyramide (s, C), suivant un polygone C'.

Si l'on regarde C' comme la base d'un prisme Σ ayant ses génératrices parallèles à la droite R, ce prisme Σ coupera la pyramide (s', C), suivant un polygone C'' qui sera plan et dont le plan passera par la droite D.

De ce qui précède, on peut déduire certaines propriétés de *transversales;* ainsi :

Si l'on suppose un plan V perpendiculaire au plan H et à la droite D, ce plan V coupera la droite D en un point d, le plan H suivant une droite K (*fig.* 169, *c*).

Les sommets du polygone tracé sur le plan H se projetteront sur la droite K en les points a, b, c....... La droite R se projettera suivant R, les sommets des deux pyramides se projetant en s et s', et le point x en lequel R perce le plan H, se projettera sur K en x.

Le plan P sera coupé par le plan V suivant la droite dP.

Les sommets a', b', c' du polygone se projetteront en les points a', b', c', situés sur la droite P et sur les droites sa, sb, sc.....

Il est alors évident que :

1° Si l'on mène les droites xa', xb', xc'....., elles couperont les droites $s'a$, $s'b$, $s'c$....., en des points a'', b'', c'', qui seront en ligne droite, et la droite Q qui les contient passera par le point d.

2° Si la droite R était parallèle à la droite K (*fig.* 166, d), les droites $a'a''$, $b'b''$, $c'c''$....., seraient parallèles entre elles et à la droite R, et les points a', b', c', étant sur une ligne droite dP, les points a'', b'', c''....., seront aussi sur une ligne droite dQ.

Nous pouvons considérer toutes les lignes droites tracées dans les figures (169; 169, a; 169, b), comme étant les projections sur le plan H de toutes les figures considérées dans l'espace; on serait, par ce qui précède, facilement conduit aux propriétés si remarquables et appartenant à trois polygones ou à trois courbes (*) situées sur un plan H, dont chacun des sommets ou des points sont liés entre eux et aux droites R et D, ainsi que le sont (*fig.* 169, a et 169, b) les trois points a, a', a''.

On pourrait supposer que la droite D fût située à l'infini, alors les plans P et Q deviendraient parallèles entre eux et au plan H.

La figure (169, f) fait voir en effet : (la droite R perçant le plan H en x) que le plan P ou ($a'b'z$), et que le plan Q ou ($a''b''y$) seront parallèles au plan H ou (abx).

La figure (169, g) fait voir en effet · (la droite R étant parallèle au plan H) que les plans P et Q sont parallèles au plan H, et de plus se confondent en un seul et unique plan.

3° Dès lors (*fig.* 169, h), si sur les droites sa, sb, sc, on prend les points a', b', c', situés sur une droite P parallèle à la droite K; si l'on mène xa', xb', xc', les points a'', b'', c'', intersections respectives de ces droites concourant au point x avec celles $s'a$, $s'b$, $s'c$, concourant au point s', seront sur une droite Q parallèle à K.

4° Et (*fig.* 169, k) les droites R et K étant parallèles, on doit avoir les points a', b', c', et a'', b'', c'', situés sur une seule droite P ou Q parallèle à K.

(*) En considérant une courbe comme étant un polygone d'un nombre infini de côtés, chaque côté étant infiniment petit.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Ce, RUE RACINE, PRÈS DE L'ODÉON.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

DEUXIÈME PARTIE.

DES COURBES ET DES SURFACES COURBES

ET EN PARTICULIER

DES SECTIONS CONIQUES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

DEUXIÈME ÉDITION.

PAR M. THÉODORE OLIVIER,

Ancien élève de l'École polytechnique et ancien Officier d'artillerie; Docteur ès sciences de la Faculté de Paris;
Ancien professeur adjoint de l'École d'application de l'artillerie et du génie à Metz;
Ancien répétiteur à l'École polytechnique; Professeur-Administrateur du Conservatoire impérial des arts et métiers;
Professeur-fondateur de l'École centrale des arts et manufactures;
Membre honoraire de la Société philomathique de Paris et du comité des arts mécaniques de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale;
Membre étranger des deux Académies royales des sciences et des sciences militaires de Stockholm;
Membre correspondant de la Société royale des sciences de Liége et de la Société impériale d'agriculture et arts utiles de Lyon,
des Académies des sciences de Metz, Dijon et Lyon;
Officier de l'ordre impérial de la Légion d'honneur et Chevalier de l'Ordre royal de l'Étoile polaire de Suède.

PARIS.

CARILIAN-GOEURY ET V[ve] DALMONT,

LIBRAIRES DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, N° 49.

1853.

OUVRAGES SUR LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PUBLIÉS

PAR M. THÉODORE OLIVIER.

I. COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

PREMIÈRE PARTIE. — Du point, de la droite et du plan : in-4° de 156 pages avec un atlas de 43 pl. in-4°, 2e édition (1852).

DEUXIÈME PARTIE. — Des courbes et des surfaces, et en particulier des sections coniques et des surfaces du second ordre : in-4° de 407 pages avec un atlas de 54 pl. in-4°, 2e édition (1853).

II. ADDITIONS AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1847) : Démonstration nouvelle des propriétés principales des sections coniques : in-4° de 100 pages avec un atlas de 15 pl. in-4°.

III. DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1843) : in-4° de 500 pages avec un atlas de 27 pl. in-4°.

IV. COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1845) : in-4° de 472 pages avec un atlas de 58 pl. in-folio.

V. APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE (1846) : 1° aux ombres ; 2° à la perspective ; 3° à la gnomonique ; 4° aux engrenages : in-4° de 415 pages avec un atlas de 58 pl. in-folio.

VI. THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES ENGRENAGES (1842) destinés à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes situés ou non situés dans un même plan : in-4° de 125 pages avec 4 pl. dont une in-folio.

VII. MÉMOIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE (1851) : in-4° de 310 pages avec un atlas de 12 pl. in-folio.

PRÉFACE DE LA DEUXIÈME ÉDITION (1853).

La première édition de la seconde partie du *Cours de géométrie descriptive* parut en 1844; j'avais écrit cet ouvrage en vue de montrer que la géométrie descriptive avait une puissance qui lui était propre et que, sans savoir l'analyse de Descartes, on pouvait rechercher et démontrer les propriétés principales des sections coniques et des surfaces du second ordre en n'employant que le principe des projections, principe plus fécond qu'on ne paraissait le croire.

Dans cet ouvrage, j'avais pris à tâche de faire connaître toutes les méthodes qui sont à la disposition de celui qui veut, par la géométrie descriptive, rechercher les vérités géométriques relatives aux *relations de position*.

J'avais donc exposé la méthode du changement des plans de projection et celle du mouvement de rotation d'un système autour d'un axe; la méthode des transformations cylindriques et coniques d'un système en un autre système; la méthode toute projective, qui consiste à passer du plan dans l'espace et réciproquement.

J'avais été par là conduit à faire voir que les principales propriétés polaires des sections coniques et des surfaces du second ordre, pouvaient facilement être recherchées et démontrées par la géométrie descriptive, sans avoir besoin de recourir à l'analyse ou aux rapports harmoniques, etc., etc.

Dans cette réimpression, j'ai dû laisser à mon travail le caractère particulier que j'avais eu l'intention de lui donner, et dès lors je me suis contenté de corriger seulement le style pour le rendre plus clair.

On ne trouvera donc rien de nouveau dans cette deuxième édition, seulement je me suis efforcé de la rendre moins incorrecte.

En géométrie descriptive, nous sommes forcés de considérer une courbe comme étant la trace d'un point matériel et mobile; or en vertu de l'inertie de la matière qui force un point matériel à se mouvoir en ligne droite et à ne changer de direction que lorsqu'une cause nouvelle vient infléchir cette direction, nous sommes forcés d'admettre comme vérité géométrique qu'une courbe n'est autre chose qu'un polygone infinitésimal ayant un nombre infini de côtés, chacun d'eux étant infiniment (ou indéfiniment) petit; on est alors conduit à admettre comme vérités géométriques toutes les conséquences qui, logiquement, découlent de cette manière de considérer une courbe.

Juillet 1853.

AVANT-PROPOS DE LA PREMIÈRE ÉDITION (1844).

Dans la première partie de ce Cours (du point, de la droite et du plan), j'ai exposé en détail la méthode des projections, et j'ai en même temps donné complétement (dans les planches) la solution graphique des diverses questions; en sorte que cette première partie est un traité complet de *géométrie descriptive* théorique et graphique. Dans la seconde partie, j'applique la méthode des projections à la recherche des propriétés générales dont jouissent les courbes et les surfaces, en vertu de leurs divers modes de génération, et je me suis surtout proposé de rechercher et de démontrer par la seule méthode des projections, ou, en d'autres termes, par la géométrie descriptive, les diverses propriétés dont jouissent les *sections coniques* et les *surfaces du second ordre*.

J'ai indiqué toutes les méthodes graphiques qui peuvent servir, suivant les données particulières de la question, à déterminer les projections des courbes intersections des surfaces entre elles; mais je n'ai jamais dans l'*épure* construit qu'un seul point de chaque courbe : car, dans ma pensée, autre chose est de faire un *Cours* en décrivant *point à point* et *ligne à ligne* une *épure* de *géométrie descriptive*, autre chose est d'exposer les *méthodes* de solution, et de faire voir dans quels cas et pour quelles causes telle méthode graphique doit être préférée aux diverses autres méthodes que l'on pourrait employer, et qui seraient vraies et exactes *géométriqnement* parlant, et ainsi, en les considérant seulement du point de vue *théorique*, sans songer aux applications à l'art de l'ingénieur.

Pour moi, il y a deux choses distinctes dans un cours de géométrie descriptive : aussitôt que les *préliminaires*, c'est-à-dire tout ce qui est relatif *au point*, *à la droite et au plan*, se trouvent exposés, il y a la partie *théorique* et la partie *graphique*.

La partie *théorique* n'exige comme dessins que des *croquis*. Ces croquis servent à aider le lecteur ou l'auditeur à mieux voir dans l'espace et à se placer de suite au point de vue de l'auteur ou du professeur.

La partie *graphique* consiste en la construction complète de la solution du problème proposé, et ainsi en une *épure* complète.

Un cours de géométrie descriptive doit donc être divisé en deux enseignements différents entre eux.

Le premier enseignement est *oral*, et ainsi dans les leçons on explique la *théorie*.

Le second enseignement est *manuel*, et ainsi, dans la salle de dessin, on fait exécuter les *épures*.

A la leçon, l'élève doit prendre des *croquis*.

Dans la salle de dessin, l'élève doit exécuter complétement une *épure*.

Je considère donc l'enseignement de la géométrie descriptive comme devant être établi ainsi qu'est établi celui de la chimie, et ainsi comme devant être composé, pour être complet, de *leçons orales* et de *manipulations*.

Dès lors : 1° exposition de la *théorie* dans les *leçons*, et 2° construction de l'*épure* (ou *manipulation graphique*) dans la salle de dessin.

Et par suite : 1° autant de leçons orales qu'il est nécessaire pour exposer complétement les diverses *théories* relatives à la *science* de l'espace figuré; et 2° un nombre limité de manipulations ou d'*épures*, puisque l'on n'a en vue, par le *travail graphique*, que d'apprendre à l'élève : *premièrement* à dessiner exactement et à manier avec habileté sa règle, son équerre, son compas et son tire-ligne; et *secondement* à exécuter complétement et dans tous ses détails la solution graphique d'une question, afin de le mettre par là à même d'exécuter avec intelligence les *épures* nécessaires à la rédaction d'un *projet* ou d'un *lever*, lorsque plus tard il sera *ingénieur*.

TABLE DES MATIÈRES.

DEUXIÈME PARTIE.

DES COURBES ET DES SURFACES COURBES, ET EN PARTICULIER DES SECTIONS CONIQUES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE II.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

CHAPITRE X.

CHAPITRE XI.

Pages.

CHAPITRE XII.

FIN DE LA TABLE DE LA DEUXIÈME PARTIE.

Nota. Une erreur commise à la page 287 laisse dans la pagination l'apparence d'une lacune de la page 281 à la page 286.

PARIS. — IMPRIMÉ PAR E. THUNOT ET Cie, RUE RACINE, 26, PRÈS DE L'ODÉON.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

SECONDE PARTIE.

DES COURBES ET DES SURFACES COURBES, ET EN PARTICULIER DES SECTIONS CONIQUES ET DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

CHAPITRE PREMIER.

DES COURBES ET DES SURFACES EN GÉNÉRAL.

193. Une *ligne* est en général engendrée par un point se mouvant d'une manière continue, suivant une loi donnée, et laissant dans l'espace les traces de ses diverses positions successives. On peut aussi engendrer une courbe par le mouvement d'une droite dont les positions successives se coupent deux à deux, de sorte que la série des points d'intersection forme une *ligne*. Enfin on peut à la droite substituer un plan mobile, dont les positions successives se coupent successivement deux à deux suivant des droites qui, elles-mêmes se coupent deux à deux en des points dont l'ensemble forme en général une *ligne*. Il est évident que ces trois modes de génération rentrent l'un dans l'autre, et qu'en réalité, c'est toujours par le mouvement d'un point qu'une *ligne* est engendrée.

La *ligne* engendrée par le mouvement d'un point est dite le *lieu géométrique* des positions successives occupées par le point mobile. Lorsqu'elle est engendrée par le mouvement d'une droite ou d'un plan, on dit qu'elle est l'*enveloppe* des posi-

tions successivement occupées par cette droite ou par ce plan. Il est bien évident que toute ligne et toute surface pourraient engendrer une ligne, qui serait également l'enveloppe de leurs positions successives, et cette ligne ou cette surface génératrice prend le nom d'*enveloppée*. On ne considère presque jamais les lignes comme engendrées par le mouvement des surfaces, mais très-souvent comme provenant de l'intersection de deux surfaces.

194. On distingue deux sortes de courbes : les *courbes planes* et les *courbes gauches;* tous les points des premières se trouvent dans un même plan, que l'on obtient en le faisant passer par trois quelconques d'entre eux; tous les points des dernières ne peuvent jamais se trouver dans un même plan. On les nomme aussi respectivement *courbes à simple courbure* et *courbes à double courbure*. Pour entendre ces dernières dénominations, considérons une droite D (*fig.* 170), supposons qu'on la brise en un point m' et que la partie à droite de ce point vienne en D', qu'on brise encore cette droite en m'' pour faire prendre à la partie de droite la position D'' sans qu'elle sorte du plan déterminé par les fragments de droite D et D' et ainsi de suite, la ligne D cesse d'être droite et acquiert une seule courbure, tous les brisements étant faits suivant une même loi; mais si maintenant on supposait que la partie $m'm''m'''\ldots\ldots m^{\text{IX}}$ tournât autour de D' pour venir prendre une position voisine, qu'ensuite la partie $m''m'''\ldots\ldots m^{\text{IX}}$ tournât autour de D'', que $m'''m^{\text{IV}}\ldots\ldots m^{\text{IX}}$ tournât autour de D''', et ainsi de suite, la courbe C acquerrait une seconde courbure résultant des brisements successifs de son plan le long des droites D', D'', D''', etc.

195. Lorsqu'un point se meut et décrit une courbe C, trois positions successives du point ne sont pas généralement en ligne droite, mais deux le sont toujours, de sorte que chaque point forme avec celui qui le suit immédiatement une droite infiniment petite, composée de deux points *juxta-posés* ou *successifs*, c'est-à-dire tels qu'entre deux de ces points considérés comme étant successifs et infiniment voisins on ne peut pas placer un troisième point, en vertu de la même loi de mouvement, ou du même mode de génération qui sert à déterminer ou à engendrer la courbe C considérée. Quelquefois il se rencontre plus de deux points successifs en ligne droite, mais alors la courbe offre des *affections* (*) particulières. Cela posé, on peut évidemment considérer une courbe comme un polygone formé d'un nombre infini de côtés infiniment petits. Deux points juxtaposés forment la plus petite ligne que l'on puisse concevoir, et que, par cette raison, nous nommerons

(*) *Voyez* dans le chapitre VII de l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, et que j'ai publié en 1843, les paragraphes dans lesquels on traite *De la manière d'envisager les infiniment petits en géométrie descriptive*.

élément rectiligne, ou *infiniment petit rectiligne* ou enfin *point ligne*. Il est évident que les éléments rectilignes ne sont pas égaux dans les diverses courbes, ni même dans une même courbe, et qu'ainsi une même courbe peut être remplacée par divers polygones infinitésimaux, chacun d'eux répondant à un mode particulier de génération de la courbe.

Si l'on considère trois points successifs, non en ligne droite, ils forment le plus petit arc de cercle que l'on puisse concevoir, et que nous nommerons *élément* ou *infiniment petit circulaire*. C'est en même temps l'élément de toutes les courbes, quoique l'on pût pousser cette distinction aussi loin qu'on le désirerait, nous le nommerons donc *élément curviligne*. Les éléments curvilignes diffèrent entre eux comme les éléments rectilignes.

196. Cela posé, si par un point m d'une courbe C on conduit une droite ou une autre courbe qui ne contienne pas le point m' de la courbe C successif du point m, ces deux lignes sont dites *sécantes* au point m; mais si elle passe en même temps par le point m' successif de m, ces deux lignes sont dites *tangentes* au point m. La droite tangente ou simplement la tangente à une courbe est donc le prolongement d'un élément rectiligne de la courbe.

La tangente peut avoir deux positions distinctes à l'égard de la courbe :

1° Elle peut laisser la courbe d'un même côté de part et d'autre du point de contact;

2° Les portions de courbes situées de part et d'autre du point de contact peuvent se trouver l'une d'un côté, l'autre de l'autre côté de la tangente; dans ce dernier cas le point de contact est ce que l'on nomme un *point d'inflexion*. Enfin dans les deux cas la tangente en un point m peut couper la courbe en un point n situé à distance finie; elle est alors tangente en m et sécante en n; elle pourrait être tangente en plusieurs points (*).

Lorsqu'une courbe a des branches infinies, la tangente au point situé à l'infini prend le nom d'*asymptote;* mais cette tangente n'existe pas toujours, ou plutôt elle est quelquefois rejetée tout entière à l'infini; de là, la distinction des branches infinies des courbes, en branches avec asymptotes et branches sans asymptotes, ou en *branches hyperboliques* et *branches paraboliques*. Nous verrons plus loin le motif de ces dernières dénominations.

197. Une droite ne peut pas être assujettie à passer par plus de deux points,

---

(*) *Voyez* dans le chapitre VII de l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, les paragraphes dans lesquels on traite *Des diverses espèces de points singuliers qu'une courbe plane peut présenter dans son cours.*

mais il n'en est pas de même d'une courbe, il faut au moins trois points pour la déterminer; on peut donc assujettir une courbe à avoir trois, quatre, etc. points communs avec une autre courbe suivant sa nature; on peut donc avoir des courbes qui aient entre elles des contacts plus ou moins intimes. Cela posé, on dit que deux lignes ont un contact de *premier ordre* lorsqu'elles ont deux points successifs m et m' communs, ou un élément rectiligne $\overline{mm'}$ commun; qu'elles ont un contact de *deuxième ordre* lorsqu'elles ont trois points successifs m, m', m'' communs ou deux éléments rectilignes $\overline{mm'}$, $\overline{m'm''}$ communs, et ainsi de suite; l'ordre du contact de deux lignes étant toujours déterminé par le nombre de leurs éléments rectilignes successifs communs. Le contact du second ordre prend le nom d'*osculation*, et les courbes qui ont un pareil contact sont dites *osculatrices*. Deux courbes qui ont un contact d'un ordre plus élevé sont aussi osculatrices entre elles, de là, plusieurs ordres d'osculation.

198. Par une tangente à une courbe, on peut faire passer une infinité de plans qui sont tous dits *plans tangents* à la courbe, mais un plan assujetti à contenir deux tangentes successives ou trois points successifs de la courbe est déterminé de position dans l'espace, et prend alors le nom de *plan osculateur*. Il est évident que, lorsque la courbe est plane, tous les plans osculateurs se confondent avec le plan de la courbe, mais dans les courbes gauches deux plans osculateurs successifs font entre eux un angle infiniment petit que l'on désigne par le nom d'angle de *flexion*.

199. Concevons une courbe C (*fig.* 170) engendrée par le mouvement d'une droite D, deux positions successives D et D′ de la droite mobile seront telles qu'on ne pourrait placer entre elles une troisième droite en vertu de la même loi de mouvement de la droite D, ou du même mode de génération de la courbe C; si donc on les coupait par une transversale quelconque, les points de section seraient deux points successifs; il est évident que la droite D dans toutes ses positions est tangente à la courbe C, dont elle est l'enveloppée (n° 193); D et D′ sont deux tangentes successives de cette courbe, elles font entre elles un angle qu'on nomme *angle de contingence*. Cet angle infiniment petit n'est pas le même dans toutes les courbes, ni en tous les points d'une même courbe, et comme il mesure la quantité dont la ligne a tourné pour cesser d'être droite et acquérir une courbure, il était naturel de le prendre pour la mesure de la courbure de la courbe. Mais la construction de cet angle est graphiquement impossible, il était donc essentiel de trouver un autre moyen de mesurer la courbure d'une courbe; or, si par le milieu de l'élément rectiligne $\overline{mm'}$ on élève une perpendiculaire N, à la droite D, et si par le milieu de l'élément rectiligne $\overline{m'm''}$ successif de l'élément $\overline{mm'}$, on élève une perpendiculaire N_1' à la droite D′; ces

droites N_1 et N_1' se couperont en un point o, et feront entre elles un angle égal à l'angle de contingence. Ce nouvel angle ne serait pas plus facile à construire que celui formé par deux tangentes successives; mais remarquons que le point o_1 peut être pris pour le centre d'un cercle δ passant par les trois points successifs m, m', m'', ou ayant avec la courbe C les deux éléments rectilignes $\overline{mm'}$ et $\overline{m'm''}$ communs, de sorte que la courbure de la courbe C au point m est la même que celle de ce cercle δ; mais il est évident que la courbure d'un cercle est la même en tous ses points, et que les courbures de divers cercles sont en raison inverse de leurs rayons, donc les courbures des courbes en chacun de leurs points sont en raison inverse des rayons de leurs cercles osculateurs en ces points (n° 197). C'est à cause de cette propriété que le cercle osculateur en un point d'une courbe, son centre et son rayon sont nommés *cercle de courbure*, *centre de courbure* et *rayon de courbure*.

La détermination graphique du rayon de courbure ne serait pas plus facile que celle de l'angle de contingence.

Si au lieu d'élever les perpendiculaires N_1 et N_1' sur les milieux des éléments rectilignes $\overline{mm'}$ et $\overline{m'm''}$, on élève au point m une perpendiculaire N à la droite D et au point m' une perpendiculaire N' à la droite D', ces deux droites N et N' se couperont en un point o, et si l'on élève au point m' une perpendiculaire à D et au point m'' une perpendiculaire à D', ces deux droites N_2 et N_2' se couperont en un point o_2, et les trois points o, o_1. o_2 peuvent être pris l'un pour l'autre, car les trois perpendiculaires N, N_1, N_2 à la droite D peuvent être considérées comme n'étant qu'une seule et même droite, et il en est de même des trois perpendiculaires N', N_1', N_2' à la droite D'.

Cela posé, si en chaque point d'une courbe donnée C on conçoit une perpendiculaire à la tangente correspondante, deux perpendiculaires successives se couperont en un point qui sera le centre d'un cercle osculateur; trois perpendiculaires successives donneront évidemment deux centres successifs formant l'élément rectiligne d'une courbe S, lieu des centres des cercles osculateurs et qui sera l'*enveloppe* des perpendiculaires à toutes les tangentes de la courbe C.

Cette courbe S peut se construire approximativement, en menant des perpendiculaires à des tangentes voisines, mais non successives, de la courbe C, ou en d'autres termes en menant en divers points de la courbe C, ces points étant situés à distance finie les uns des autres, des *normales* à cette courbe C, et inscrivant une courbe S au polygone fini déterminé par les intersections de ces normales prises successivement deux à deux.

200. La perpendiculaire N à la tangente D (*fig.* 170) est dite *normale* à la courbe C au point m, l'on ne peut pas dans le plan de la courbe et par le point m

mener une seconde normale, mais il y en a une infinité d'autres situées hors de ce plan ; elles sont toutes sur un même plan perpendiculaire à la tangente D, et que l'on nomme *plan normal*. Quand on parle d'une normale menée à une courbe C en un point de cette courbe, sans la désigner particulièrement, on entend toujours la normale située dans le plan de la courbe, si la courbe est plane ou située dans le plan osculateur de la courbe au point considéré, si cette courbe est gauche.

201. L'enveloppe des normales à une courbe plane C (n° 199) est une courbe C′, qui a reçu le nom de *développée* de C; et C est dite alors la *développante* de C′. Les normales à la développante sont tangentes à la développée, ce qui permet de construire l'une d'elles quand on connaît l'autre. Ainsi quand on donne la développante, on en conclut la développée par une série de normales très-rapprochées; et si l'on donne la développée, en lui menant une série de tangentes voisines les unes des autres, la développante devra les couper à angle droit.

Si l'on conçoit un fil enroulé sur la développée et tendu de manière que son prolongement soit tangent à cette courbe, et que l'on prenne sur ce fil le point où dans sa première position il va rencontrer la développante, et qu'on déroule le fil en le tendant toujours de manière qu'il reste tangent à la développée, ce point décrira évidemment la développante qui pourra être considérée comme formée par une série d'arcs de cercles infiniment petits, ayant successivement leurs centres situés sur la développée (n° 199).

Tout autre point de la tangente décrirait de la même manière une développante de la courbe proposée, donc *une développée plane a une infinité de développantes dans son plan*, et deux développantes de la même développée sont partout également distantes, leur distance constante est celle des deux points générateurs de la tangente primitive. Au contraire la développée d'une courbe plane étant déterminée par les intersections des normales successives de cette courbe, il est évident qu'*une développante plane n'a qu'une seule développée dans son plan*.

Il résulte de là que si l'on mène plusieurs tangentes à la développée, et qu'on les prolonge jusqu'à leur rencontre avec la développante, les longueurs de ces droites diffèrent entre elles d'une quantité égale à l'arc de développée compris entre les deux points de contact. Et si la développante va couper la développée sous un angle droit en un point a, si l'on mène en un point quelconque m de la développée une tangente et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre au point n avec la développante, on aura toujours $mn =$ l'arc an rectifié. C'est d'après cette considération que l'on peut construire par points une développante d'une courbe donnée.

Enfin nous ajouterons que toutes les développantes d'une même courbe plane

ne sont pas (*) généralement des courbes de même nature et de même forme géométrique, excepté les développantes d'un cercle, qui sont toutes des courbes identiques ou superposables.

202. Toute ligne qui se meut dans l'espace en y laissant les traces de ses positions successives, engendre une surface; sous le rapport de cette génération, on distingue les surfaces en plusieurs classes;

1° Les *surfaces réglées*, ou qui peuvent être engendrées par une droite, et 2° les *surfaces courbes* proprement dites, qui n'admettent pas de génératrices rectilignes;

Parmi les surfaces *réglées*, on doit remarquer les surfaces *développables*, et parmi les surfaces *courbes* on doit remarquer les surfaces de *révolution*, qui sont engendrées par une ligne quelconque tournant autour d'un axe.

203. Par un point d'une surface on peut toujours faire passer une infinité de courbes qui soient toutes tracées sur la surface donnée; si une droite menée par ce même point est tangente à quelqu'une de ces courbes, elle est dite *tangente à la surface*, dans le cas contraire, elle est dite *sécante*.

Nous allons démontrer le théorème suivant qui est fondamental en géométrie descriptive, *les tangentes à toutes les courbes situées sur la surface et passant par un point* m *de cette surface sont contenues dans un même plan, que l'on nomme* PLAN TANGENT *à la surface en ce point* m, *qu'on dit point de* CONTACT.

Si toutes les tangentes laissent chacune la courbe à laquelle elle est tangente d'un même côté et de part et d'autre du point de contact, le plan tangent laissera la surface tout entière d'un même côté. Une telle surface est dite *convexe* tout autour du point de contact; mais elle pourrait cesser d'être telle à une certaine distance de ce point. Si quelqu'une des tangentes laissait au point de contact la courbe qui lui correspond, partie d'un côté, partie de l'autre, le plan tangent laisserait aussi la surface partie d'un côté, partie de l'autre, et il serait en même temps tangent et sécant. De là la distinction des surfaces en deux classes relativement au plan tangent, et il faut démontrer le théorème énoncé pour chacune de ces deux espèces de surfaces.

(*) Lorsque nous disons que deux courbes ne sont pas de même nature géométrique, nous entendons dire par là que les équations de ces courbes ne sont pas du même degré et qu'ainsi toutes les développantes d'une même développée ne seront pas coupées par une droite en le même nombre de points; et lorsque nous disons que deux courbes n'ont pas la même forme géométrique, nous entendons que les unes peuvent présenter des points singuliers, que les autres ne peuvent offrir. Ainsi, prenant la développée de l'ellipse, parmi toutes les développantes de cette développée, l'ellipse est la seule qui soit du second degré, et plusieurs de ces développantes présentent des points de rebroussement.

204. 1° *Pour les surfaces convexes;* supposons que l'on coupe une pareille surface par un plan suivant une courbe C (*fig.* 171), qu'en un point *m* de cette courbe C on lui mène la tangente T, et concevons d'autres courbes K, K'....... tracées sur la surface et passant par le point *m*, elles iront couper la courbe C en des points *n*, *p*,...... et les courbes *mn*, *mp*...... seront toutes dans un même plan avec la tangente T. Si l'on fait tourner le plan sécant autour de la tangente T de manière que les points d'intersection avec les courbes K, K'...... se rapprochent du point *m* et viennent par exemple en *n'*, *p'*....... la tangente T et les sécantes *mn'*, *mp'*,...... seront toujours dans un même plan, et cette condition sera toujours remplie lorsque le plan sécant coupera la surface successivement suivant les courbes C', C'', C''',...... Donc à la limite, lorsque les points *n*, *p*,...... seront devenus les successifs de *m*, et que par conséquent les sécantes *mn*, *mp*...... seront devenues des tangentes aux courbes K, K'...... elles seront encore toutes contenues dans un même plan, ce qu'il fallait démontrer.

2° Dans les surfaces non convexes, on peut toujours trouver en un point quelconque une tangente telle que tous les plans sécants menés par cette tangente coupent la surface suivant des courbes telles que C (*fig.* 172). Si par le point de contact *m* on fait passer d'autres courbes K, K',..... elles couperont C en des points *n*, *p*,...... et les sécantes *mn*, *mp*,...... seront toutes avec T dans un même plan. Si l'on suppose que le plan tourne autour de T de manière que les points *n*, *p*...... se rapprochent de *m*, les sécantes *mn*, *mp*,...... et la tangente T pour chaque position du plan sécant seront toujours dans un même plan; il en sera donc encore de même lorsque ces points seront devenus les successifs de *m*, et que par conséquent les sécantes seront devenues des tangentes aux courbes K, K'......, ce qu'il fallait démontrer.

205. Il suit naturellement de là que pour mener le plan tangent en un point d'une surface, il faudra faire passer par ce point et sur la surface deux courbes, mener les tangentes à ces deux courbes, puis le plan de ces deux tangentes. On doit, dans chaque cas, choisir les courbes les plus faciles à construire, ou celles auxquelles on sait mener les tangentes rigoureusement; par exemple des cercles, quand la nature de la surface le permet, ou bien des droites parce qu'elles sont à elles-mêmes leur propre tangente. Le plan tangent en un point d'une surface réglée contient donc toujours la génératrice droite qui passe par le point de contact. Et ces surfaces se distinguent en deux classes suivant la manière d'être du plan tangent à leur égard. Dans les unes le plan tangent en un point d'une génératrice droite est tangent en tous les autres points de la même génératrice, dans les autres le plan tangent en un point d'une génératrice droite n'est tangent en aucun autre point de cette même génératrice.

206. En effet, 1° construisons un plan T (*fig.* 173) et dans ce plan trois droites G, *mt*, *nt'* non parallèles, puis en dehors du plan T deux courbes C et C' qui aient pour tangentes les droites *mt*, *nt'* aux points *m* et *n* où elles rencontrent G, enfin supposons qu'une surface réglée Σ ait pour génératrices les droites G, G_1, G_2, G_3,... s'appuyant sur les deux courbes C et C'; le plan T contenant la génératrice G et la tangente *mt* à C est dès lors tangent à la surface Σ au point *m*; de même ce plan contenant la génératrice G et la tangente *nt'* à C' est aussi tangent à la surface Σ au point *n*; je dis que dès lors le plan T est tangent à la surface Σ en tous les autres points de la même génératrice G.

Pour le démontrer, menons la génératrice G' successive de G; elle rencontrera les courbes C et C' en des points *m'* et *n'* successifs de *m* et *n*, et par conséquent appartenant aux tangentes *mt* et *nt'*, et par suite au plan tangent T, donc G et G' sont dans ce même plan T; coupons maintenant la surface Σ par un plan quelconque déterminant la courbe K, qui rencontre G et G' aux points successifs *p* et *p'* qui sont dans le plan T, la tangente *pθ* à la courbe K est donc dans le plan T; donc enfin le plan T est tangent à la surface Σ au point *p* arbitrairement pris sur la génératrice G, et par conséquent en tout autre point de cette génératrice.

Deux génératrices droites successives de ces sortes de surfaces étant dans un même plan, déterminent une petite surface plane, qui est l'*élément* de la surface, infiniment petit dans le sens de la largeur, mais indéfini dans le sens de sa longueur. Si l'on fait tourner l'un de ces éléments autour d'une génératrice droite pour le ramener dans le plan de l'élément suivant, puis si ces deux éléments réunis tournant autour de la génératrice suivante pour les ramener dans le plan du troisième élément, et ainsi de suite, la surface sera tout entière déroulée sur un plan *sans déchirure ni duplicature*; cette propriété les a fait nommer *surfaces développables*.

2° Ayant comme ci-dessus un plan T, et dans ce plan, trois droites G, *mt*, *ns*, nous construirons hors du plan deux courbes, l'une C ayant *mt* pour tangente au point *m*, l'autre C' à laquelle *ns* sera sécante au point *n*, de sorte que la tangente *nt'* à C' sera située en dehors du plan T.

Cela posé, si l'on conçoit une surface réglée Σ ayant pour génératrices des droites G, G_1, G_2, G_3, ... qui s'appuient sur les deux courbes C et C', le plan T contenant la génératrice G et la tangente *mt* à la courbe C sera tangent à la surface Σ au point *m*; mais au point *n* ce plan ne contenant pas la tangente *nt'* à la courbe C' ne sera pas tangent à cette surface Σ. Je dis que dès lors le plan T n'est tangent à la surface Σ en aucun autre point de la génératrice G. En effet, la génératrice G' successive de G rencontrera C au point *m'* successif de *m*, et par conséquent appartenant à la tangente *mt* et aussi au plan T; de même G' rencontre C' au point *n'* successif de *n*, appartenant par conséquent à la tangente *nt'*, et par suite situé

hors du plan T, donc la génératrice G′ n'a que le point m' sur le plan T; cela posé, si l'on coupe la surface par un plan suivant une courbe K, rencontrant G et G′ aux points successifs p et p', le point p appartiendra au plan T et le point p' sera hors de ce plan; donc le plan T ne contient pas la tangente $p\theta$ à la courbe K; donc il n'est pas tangent à la surface au point p.

L'élément superficiel compris entre deux génératrices successives G et G′ n'est plus *plan*, de sorte que la surface ne peut plus se dérouler sur un plan; on nomme ces surfaces, des *surfaces gauches*. Remarquons que les génératrices successives G et G′ ne sont pas dans un même plan, et cependant il est impossible d'en placer entre elles une troisième, circonstance difficile à admettre *à priori*, et sur laquelle la démonstration précédente ne peut laisser aucun doute.

207. Il résulte de ces démonstrations que dans une surface réglée: 1° si le plan tangent en un point d'une génératrice droite, est tangent en tous les autres points de la même génératrice, deux génératrices successives sont dans un même plan;

2° Si le plan tangent en un point d'une génératrice droite n'est tangent en aucun autre point de la même génératrice, les deux génératrices successives ne sont pas dans un même plan.

208. Les réciproques de ces propositions sont également vraies, c'est-à-dire que dans une surface réglée, 1° si les génératrices successives sont dans un même plan, le plan tangent en un point d'une génératrice est tangent en tous les points de la même génératrice; 2° si les génératrices successives ne sont pas dans un même plan, le plan tangent en un point d'une génératrice n'est tangent en aucun autre point de cette génératrice.

En effet, 1° si nous considérons la série des tangentes G, G′, G″,..... (*fig.* 174) à une courbe gauche C, elles formeront une surface, et deux génératrices successives de cette surface seront dans un même plan osculateur de la courbe C. Considérons une génératrice quelconque G, et menons les plans tangents à la surface en deux points n et p; pour cela sur la surface et par le point n nous ferons passer une courbe K qui rencontrera G′ en un point n' successif de n, et l'élément nn' prolongé donnera la tangente T à la courbe K, le plan tangent en n déterminé par les droites G et T contiendra les trois points n, m', n', donc il contient les deux génératrices successives G et G′; de même sur la surface et par le point p faisons passer une courbe X, elle coupera G′ en un point p' successif de p, et l'élément pp' prolongé donnera la tangente Θ à la courbe X, le plan tangent en p déterminé par les droites G et Θ, contiendra les trois points p, m', p'; donc il contient les deux génératrices successives G et G′. Les deux plans tangents en n et p se confondent donc, et il en est évidemment de même des plans tangents en tous les autres points de la génératrice G.

2° Soient G et G′ (*fig.* 173) deux génératrices successives d'une surface réglée et non situées dans un même plan, prenant deux points quelconques *m* et *n* sur l'une d'elles G, par ces deux points et sur la surface menons deux courbes C et C′ coupant G′ aux points *m′* et *n′* successifs de *m* et *n*, de sorte que les éléments $\overline{mm'}$ et $\overline{nn'}$ prolongés donneront les tangentes *mt* et *nt′* aux courbes C et C′; le plan tangent en *m* est déterminé par les droites G et *mt*; il contient le point *m′* de G; mais le point *n′* est en dehors de ce plan, donc *nt′* n'est pas dans ce plan tangent; mais cette droite est dans le plan tangent au point *n*, donc ces deux plans tangents sont distincts l'un de l'autre.

209. On déduit de tout ce qui précède les deux caractères distinctifs des deux espèces de surfaces réglées, savoir :

1° Toute surface réglée dont deux génératrices successives sont dans un même plan, est *développable ;* toute surface réglée dont deux génératrices successives ne sont pas dans un même plan est *gauche.*

2° Toute surface réglée, pour laquelle le plan tangent en un point d'une génératrice est tangent en tout autre point de la même génératrice, est *développable ;* toute surface réglée pour laquelle le plan tangent en un point d'une génératrice n'est tangent en aucun autre point de la même génératrice, est une surface *gauche.*

On doit aussi se rappeler que réciproquement :

3° Dans toute surface développable, deux génératrices successives sont dans un même plan, et le plan tangent en un point d'une génératrice est tangent en tous les points de la même génératrice ;

4° Dans toute surface gauche, deux génératrices successives ne sont pas dans un même plan, et le plan tangent en un point d'une génératrice n'est tangent en aucun autre point de la même génératrice.

Nous avons répété ici ces principes, qu'il faut bien se graver dans la mémoire, parce qu'ils sont d'un usage continuel dans la théorie des surfaces réglées ; nous ajouterons encore que plusieurs surfaces sont gauches, suivant certaines générations, et développables suivant d'autres génératrices, c'est ce que nous reconnaîtrons plus facilement en ayant recours au second caractère, quoique le premier soit celui que l'on adopte pour définir les deux espèces de surfaces réglées.

210. Tout plan conduit suivant une génératrice droite G d'une surface gauche est un plan tangent, car il coupe la surface suivant une courbe C, dont il contient la tangente au point *m* (en lequel la courbe C coupe la génératrice G) en même temps que cette génératrice G. On peut donc se proposer sur les surfaces gauches les deux questions réciproques suivantes :

1° Par un point d'une surface gauche faire passer un plan tangent ; ce plan est

déterminé par la génératrice et la tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface et passant par ce point ;

2° Étant donné un plan P passant par une génératrice G, trouver son point de contact ; c'est celui où la courbe d'intersection C de la surface par le plan P coupe la génératrice G.

211. Une surface développable peut être engendrée de bien des manières différentes, parmi lesquelles nous distinguerons les suivantes :

1° Par un plan roulant sur deux courbes, c'est-à-dire restant toujours tangent à l'une et à l'autre ;

2° Par un plan roulant sur une courbe et sur une surface ;

3° Par un plan roulant sur deux surfaces ;

4° Par un plan assujetti à se mouvoir en restant toujours normal à une courbe ;

5° Par un plan tangent à une courbe et restant toujours perpendiculaire au plan osculateur ;

6° Par un plan se mouvant sur une courbe en lui restant toujours osculateur.

Ces six modes de générations peuvent se comprendre sous ce seul énoncé : *Tout plan se mouvant suivant une loi déterminée engendre, par ses intersections successives, une surface développable.* Il ne faut donc pas que le plan se meuve parallèlement à lui-même.

7° Enfin, par une droite mobile demeurant toujours tangente à une courbe à double courbure.

Lorsque la surface est engendrée par le mouvement d'un plan, on dit qu'elle est l'*enveloppe* des positions successives du plan, qui prend le nom d'*enveloppée.* En général, une surface mobile, qui en engendre une autre, prend le nom de *surface enveloppée*, et celle qu'elle engendre et qui lui est tangente dans toutes ses positions a reçu le nom d'*enveloppe*.

Lorsqu'une surface est engendrée par le mouvement d'une droite, on dit qu'elle est le lieu des positions successives occupées dans l'espace par cette génératrice droite. Les six premiers modes de génération rentrent, au reste, dans ce dernier, car les plans mobiles se coupent suivant des droites, qui sont précisément les génératrices de la surface, et celles-ci se coupent en des points dont la série forme une courbe à laquelle les génératrices droites sont toutes tangentes.

212. Le lieu des intersections successives des génératrices droites d'une surface développable est une courbe à double courbure, à laquelle Monge a donné le nom d'*arête de rebroussement.* La courbe à laquelle la génératrice droite reste toujours tangente dans le septième mode de génération (n° 211) est précisément l'arête de rebroussement de la surface engendrée par cette droite.

Toute surface développable est séparée par l'arête de rebroussement en deux

parties ou *nappes*, qui vont en s'évasant à mesure qu'elles s'éloignent de cette courbe, de sorte que la surface éprouve un rétrécissement le long de l'arête de rebroussement. Mais pour que la courbe, le long de laquelle une surface est ainsi rétrécie, soit une arête de rebroussement, il faut qu'elle soit produite par les intersections des génératrices successives, lors même que ces génératrices ne seraient pas droites. On doit donc définir d'une manière générale l'arête de rebroussement d'une surface, *la courbe enveloppe des génératrices de la surface*. Toute autre ligne, suivant laquelle une surface éprouve un pareil rétrécissement, se nomme *ligne de gorge*.

On a aussi des rétrécissements produits par les intersections de génératrices, situées à distance finie les unes par rapport aux autres, ou plus généralement, par l'intersection de deux nappes de la surface, on les nomme alors *lignes d'intersection*.

212 *bis*. Je crois devoir placer ici une démonstration très-générale de la propriété dont jouit le plan tangent, sans avoir besoin de distinguer deux manières d'être d'une surface par rapport à son plan tangent, comme nous l'avons fait art. 204 ci-dessus.

Démonstration de la propriété dont jouit le plan tangent, savoir : que le plan tangent en un point d'une surface, quel que soit le mode de génération de cette surface, contient les tangentes à toutes les courbes qui, tracées sur la surface, se croisent au point de contact.

Une surface Σ, quelle qu'elle soit, peut toujours être considérée comme engendrée par le mouvement d'une *ligne* C, et de plusieurs manières différentes.

Ainsi : 1° on peut prendre sur la surface Σ un point m, faire passer par ce point m un plan R coupant la surface Σ suivant une courbe C, mener à la courbe C et au point m la tangente θ et supposer que par la droite θ on fasse passer une série de plans R, R', R'', R''',... coupant dès lors la surface Σ et respectivement suivant les *lignes* C, C', C'', C''',... qui seront évidemment toutes tangentes entre elles et au point m, la tangente qui leur est commune en le point m étant la droite θ.

On peut donc supposer la surface Σ engendrée par le mouvement de rotation de la *ligne* C autour de la *droite* θ, cette *ligne* C changeant de forme pendant son mouvement de rotation et prenant successivement les *formes* C', C'', C''',...

2° On peut mener une suite de plans R_1', R_1'', R_1''',... parallèles entre eux et au plan R et coupant la surface Σ et respectivement suivant des courbes ou *lignes* C_1', C_1'', C_1''',... et l'on pourra considérer la surface Σ comme engendrée par le mouvement de la courbe ou *ligne* C qui, se mouvant parallèlement à elle-même, se déforme successivement pour prendre successivement les formes C_1', C_1'', C_1''', ...

3° On peut mener une droite D coupant, perçant la surface Σ en un point ou

plusieurs points m, et faire passer par cette droite D une suite de plans R_2, R_2', R_2'', R_2''',... coupant la surface Σ et respectivement suivant les *lignes* C_2, C_2', C_2'', C_2''',... qui toutes se croiseront, se couperont en le point m, ou en les divers points m.

Et l'on pourra supposer que la surface Σ est engendrée par la rotation de la courbe C_2 autour de la sécante D, cette courbe C_2 prenant successivement les *formes* C', C_2'', C_2''',...

Au lieu d'engendrer la surface Σ par des courbes ou *lignes* planes, on pourrait sans peine la supposer engendrée par des courbes à double courbure.

Cela posé :

La démonstration du théorème relatif *au plan tangent*, savoir : que le plan tangent en un point m d'une surface Σ contient les tangentes à toutes les courbes qui, tracées sur cette surface, se croisent en ce point m, doit varier suivant que l'on considère tel ou tel mode de génération de la surface Σ.

Ci-dessus (art. 203), nous avons considéré la surface Σ comme engendrée par le premier mode indiqué ci-dessus, et le théorème a été démontré directement, en ce sens que nous n'avons pas eu besoin d'établir, au préalable, ce théorème pour une surface simple, et ainsi pour une surface développable, pour ensuite le faire passer sur la surface générale Σ.

Ici, nous allons supposer que la surface Σ est déterminée par le second mode de génération exposé ci-dessus, et nous ferons passer le *théorème du plan tangent*, de dessus une surface développable, sur cette surface générale Σ, et cela de la manière suivante :

On sait qu'il n'y a rien de plus facile que de démontrer le théorème relatif au plan tangent pour une surface développable.

Et en effet :

Rappelons-nous qu'une surface développable K peut être engendrée de deux manières *principales* : ou 1° au moyen de son arête de rebroussement ξ dont toutes les tangentes forment les génératrices droites (ou les caractéristiques) de la surface K; ou 2° au moyen d'un plan Θ roulant tangentiellement sur deux courbes *directrices* B et B_1.

Si l'on considère le premier mode de génération de la surface développable K, nous pourrons considérer une génératrice droite G de cette surface, laquelle sera une tangente à l'arête de rebroussement ξ.

La position voisine de G sera G'; et dès lors en menant par un point m de G une suite de *plans* ou de *surfaces* quelconques, on coupera la surface K suivant des courbes *planes* ou à *double courbure* C, C', C'',... qui se croiseront au point m et qui couperont la génératrice G' et respectivement aux points n, n', n'',...

Or il est évident que $\overline{mn}$, $\overline{mn'}$, $\overline{mn''}$,.. seront les éléments rectilignes des courbes

C, C′, C″,… Ces éléments rectilignes prolongés donneront les tangentes θ, θ', θ'',… à ces courbes C, C′, C″,… pour le point m; et comme les génératrices droites successives et infiniment voisines G et G′ se coupent en un point qui appartient à la courbe ξ, il s'ensuit que toutes les tangentes θ, θ', θ'',… sont situées sur un même plan Θ qui passe par les droites G et G′, et c'est ce plan Θ qui a reçu le nom de plan tangent.

Ainsi, le théorème relatif au plan tangent en un point m d'une surface développable K se trouve démontré, lorsque l'on considère cette surface K comme étant donnée par son arête de rebroussement ξ, comme étant dès lors engendrée par une ligne droite G assujettie, par la loi de son mouvement dans l'espace, à être tangente en toutes ses positions successives à une courbe donnée ξ.

Cela posé :

Le théorème relatif au plan Θ, tangent en un point m d'une surface développable K, étant démontré pour un certain mode de génération de la surface K, subsistera, quel que soit le mode de génération de cette surface K.

Par conséquent, si nous supposons que la surface K est engendrée par un plan Θ roulant tangentiellement sur deux courbes directrices B et B_1 tracées sur cette surface K, le théorème subsistant toujours, nous pourrons en conclure ce qui suit :

Si la courbe B se meut sur la surface K en changeant de forme pour arriver à la forme et en la position B_1 (le changement de forme et la loi du mouvement étant déterminés), on conçoit sans peine que la courbe B passera en une position infiniment voisine B′ (B′ ayant une forme modifiée), et que la surface K sera tout aussi bien engendrée par le plan Θ roulant tangentiellement sur les courbes B et B_1 (situées à distance finie), que par le plan Θ roulant tangentiellement sur les courbes B et B′ (situées à distance infiniment petite).

Cela dit :

Les courbes C, C′, C″,… couperont respectivement la courbe B′ en les points p, p', p'',… qui, en vertu du nouveau mode de génération de la surface K, seront des points successifs et infiniment voisins du point m; en sorte que $\overline{mp}$, $\overline{mp'}$, $\overline{mp''}$,… seront dans ce nouveau mode de génération les éléments rectilignes des courbes C, C′, C″,… (*).

Or ces éléments rectilignes prolongés donneront les tangentes θ, θ', θ'',… aux courbes C, C′, C″,… et nous savons, *à priori*, par ce qui a été démontré plus haut (en nous servant du premier mode de génération de la surface développable K), que toutes ces tangentes sont situées dans un même plan, qui n'est autre que le plan Θ tangent en m à la surface K.

(*) Voyez le chapitre VII des *Développements de géométrie descriptive*.

Cela posé :

Si nous considérons une surface générale Σ et un point m sur cette surface, nous pourrons tracer sur cette surface une courbe B, laquelle passera par le point m; puis supposer que cette courbe B se déplace sur la surface Σ, en vertu d'une certaine loi de mouvement, et qu'elle arrive, en changeant de forme, en la position B′ infiniment voisine de B.

Les deux courbes infiniment voisines B et B′ comprendront donc sur la surface Σ une zone élémentaire et superficielle.

Cela posé :

Si nous faisons rouler un plan Θ tangentiellement aux deux courbes B et B′, nous obtiendrons une surface développable K.

Si ensuite nous faisons passer par le point m une suite de *plans* ou de *surfaces arbitraires* P, P′, P″,... ces *plans* ou *surfaces* couperont la surface Σ suivant des courbes δ, δ', δ'',... et la surface K suivant des courbes Δ, Δ', Δ'',... et les courbes δ et Δ, δ' et Δ'... passeront toutes par le point m, et de plus couperont la courbe B′ et respectivement deux à deux en les mêmes points p, p',... Par conséquent, ces courbes δ et Δ, δ' et Δ',... auront mêmes tangentes θ, θ',... au point m, puisqu'elles auront deux à deux même élément rectiligne $\overline{mp}$, $\overline{mp'}$, $\overline{mp''}$,...

Or nous savons que les tangentes θ, θ',... aux diverses courbes Δ, Δ',... de la surface K sont dans un même plan; donc nous pouvons affirmer le théorème suivant :

Théorème. *Si l'on trace une série de courbes* C, C′, C′,... *sur une surface quelconque* Σ, *toutes ces courbes se croisant en un point* m, *les tangentes menées au point* m *à ces diverses courbes sont toutes situées dans un seul plan, auquel on donne le nom de* plan tangent *au point* m *de la surface* Σ.

Cette nouvelle manière de démontrer le théorème relatif au plan tangent offre l'avantage suivant :

Ce que nous avons dit pour un point m de la courbe B tracée sur la surface générale Σ peut se dire de tout autre point de cette même courbe B.

Par conséquent, la surface développable K jouit de la propriété d'avoir en commun avec la surface Σ la zone élémentaire et superficielle comprise entre les deux courbes successives et infiniment voisines B et B′, et aussi d'avoir en chaque point de la courbe B même plan tangent avec la surface Σ, propriété que l'on énonce en disant que la surface développable K engendrée par un plan Θ roulant tangentiellement à la surface Σ et sur la courbe B, est tangente à la surface Σ tout le long de la courbe B.

En nous servant, ainsi que nous venons de le faire, d'une surface simple (une surface développable) pour démontrer l'existence d'un théorème pour une surface

générale, nous avons employé une méthode très-familière à la géométrie descriptive et qui est très-féconde. En effet : lorsque l'on voudra plus tard chercher la construction des divers points d'une certaine courbe λ tracée sur une surface générale Σ, et de manière à satisfaire à certaines conditions, on tracera sur la surface Σ une série de courbes α, α', α'',... d'après une loi donnée, et l'on cherchera sur ces courbes au moyen des surfaces développables A, A', A'',... tangentes à la surface Σ suivant ces courbes α, α', α'',... les points en lesquels ces courbes α, α', α'',... coupent la courbe λ.

Ce ne seront pas toujours des surfaces développables que l'on emploiera, mais ce seront toujours des surfaces plus simples que la surface Σ proposée, et pour chacune desquelles on pourra facilement et presque *immédiatement* résoudre le problème proposé pour la surface Σ.

On en trouve un exemple remarquable dans la construction par *points* de la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre avec une surface de révolution quelconque Σ. Alors, pour chaque *parallèle* de la surface de révolution Σ, on remplace cette surface de révolution Σ par un cône Δ (surface développable la plus simple) ou par une sphère S (surface de révolution la plus simple), ces surfaces Δ ou S étant tangentes à cette surface de révolution Σ tout le long d'un *parallèle*.

Or il est utile, dans l'enseignement, d'employer le plus possible les mêmes *idées*, pour ne pas surcharger la mémoire des élèves.

Je pense donc que la manière de démontrer le théorème relatif au plan tangent, telle que je viens de l'exposer, doit être préférée, puisque *les idées géométriques* que l'on emploie dans cette démonstration se reproduisent plus tard dans la solution de divers problèmes importants où l'on fait usage du plan tangent.

213. Nous allons démontrer deux théorèmes relatifs aux surfaces développables et dont nous aurons besoin plus tard.

Théorème 1. *Étant donnée une surface développable Σ par son arête de rebroussement* C, *si toutes les tangentes* T *à la courbe* C *s'appuient sur une droite* B, *la surface développable Σ est un plan, et la courbe* C *est dès lors une courbe plane.*

En effet :

Prenons trois éléments rectilignes successifs $\overline{mm'}$ et $\overline{m'm''}$ et $\overline{m''m'''}$ de la courbe C, ces éléments prolongés donneront les tangentes successives T, T', T'' de la courbe C, et ces tangentes seront des *caractéristiques* ou génératrices droites successives de la surface Σ.

Les deux droites T et T' déterminent un plan Θ; traçons dans ce plan une droite B; les deux droites T' et T'' déterminent un plan Θ'; si la droite T'' s'appuie sur la droite B, les trois droites T', T'' et B seront dans le même plan Θ'; mais la droite B est déjà tout entière dans le plan Θ, il faut donc que les deux plans Θ

et Θ' se confondent ; il faut donc que les trois éléments rectilignes de la courbe C soient dans un même plan. On démontre donc de cette manière que si toutes les tangentes à la courbe C s'appuient sur la droite B, elles sont toutes situées dans un même plan, et que dès lors tous les éléments rectilignes de la courbe C sont situés dans un même plan ; la courbe C est donc plane.

Théorème 2. *Lorsqu'on fait rouler un plan* P *sur deux courbes* C *et* C', *l'enveloppe de l'espace parcouru par le plan* P *est une surface développable* Σ, *et qui évidemment n'est pas plane ; si toutes les génératrices droites de la surface* Σ *s'appuient sur une même droite* B, *elles doivent nécessairement toutes la couper en un même point* b.

En effet : soient les positions successives P, P', P'', P''', etc., de l'enveloppée P ; P coupe P' suivant la génératrice droite G ; P' coupe P'' suivant G' ; P'' coupe P''' suivant G'', etc. Les droites G, G', G'', etc., sont des génératrices successives et infiniment voisines de la surface Σ ; dès lors G coupe G' en un point m, G' coupe G'' en un point m', etc., et les points m, m', etc., sont des points successifs et infiniment voisins qui déterminent la courbe C, *arête de rebroussement* de la surface Σ, et $\overline{mm'}$ en est l'élément rectiligne.

Supposons maintenant que toutes les droites G, G', G'', etc., s'appuient sur une droite B.

G coupera B en un point b, G' coupera B en un point b', G'' coupera B en un point b'', etc.

Or, G, G' et B seront dans un même plan P' ; G', G'' et B seront dans un même plan P'', etc.

Il est donc évident qu'il faut, pour que les plans P' et P'' ne se confondent pas (ce qui ne peut être, puisque la surface Σ ne peut être un *plan* en vertu de son mode de génération), et que cependant ce qui vient d'être établi subsiste, il faut, dis-je, que les points b, b', b'', etc., se confondent en un seul point b ;

Ou, en d'autres termes, il faut que la surface développable Σ soit une surface conique dont b est le sommet.

Parmi les surfaces développables, nous étudierons d'une manière spéciale les surfaces *coniques* et *cylindriques*.

Une surface conique est engendrée par le mouvement d'une droite assujettie à passer constamment par un point fixe qu'on nomme le *sommet* (point qui dans certains cas est le *centre* de la surface), et à s'appuyer constamment sur une courbe donnée que l'on nomme la *directrice* de la surface. L'*arête de rebroussement* de cette surface se réduit à un seul point, qui est le sommet, lequel divise la surface en deux *nappes*. Ce point joue en même temps le rôle de ligne d'*intersection* et de ligne de *gorge*.

Une surface cylindrique est engendrée par le mouvement d'une droite s'appuyant

constamment sur une courbe donnée, qui est la *directrice courbe* de la surface, et restant toujours parallèle à une même droite, qui prend, elle, le nom de *directrice droite* de la surface.

On pourrait remplacer la directrice courbe des surfaces coniques et cylindriques par une surface à laquelle la génératrice droite devrait rester tangente ; mais ces données ne diffèrent pas des précédentes (sous le point de vue théorique), car on peut, à la surface directrice, substituer la courbe, lieu des points de contact de toutes les génératrices droites avec cette surface.

214. Il résulte de là que les surfaces projetant horizontalement et verticalement une courbe (n° 25) sont des surfaces cylindriques ; il en serait de même de la surface qui la projetterait obliquement (n° 158) ; c'est pourquoi les deux systèmes de projection, orthogonale et oblique, ont reçu le nom de projections cylindriques (n° 159).

Dans le système des projections orthogonales qui est le plus usité, une courbe est donc toujours l'intersection de deux surfaces cylindriques dont les génératrices sont perpendiculaires pour l'une au plan horizontal et pour l'autre au plan vertical de projection. En général, une courbe est l'intersection de deux surfaces, et au lieu des deux surfaces cylindriques projetantes, on pourrait donner deux autres surfaces quelconques se coupant suivant cette même courbe, qui serait également déterminée, mais on se la représenterait plus difficilement. Toutefois une courbe plane ne peut être définie d'une manière exacte qu'en choisissant son plan pour l'une des surfaces, car on pourra toujours alors retrouver la seconde projection, tandis que deux courbes arbitrairement tracées sur les deux plans de projection sont rarement les projections d'une courbe plane de l'espace.

Deux cylindres se coupent ordinairement suivant plusieurs courbes ; pour savoir par conséquent quelle est celle dont on a les projections, il ne suffit pas de donner ces projections, il faut encore fixer quels sont les points de la projection verticale qui correspondent aux divers points de la projection horizontale, lorsque la même perpendiculaire à la ligne de terre rencontre les deux projections chacune en plus d'un point. Lorsque l'on ne fixe pas cette correspondance, le problème de trouver la courbe dont on a les projections, admet plusieurs solutions ; quelquefois on peut et l'on doit même les adopter toutes, d'autres fois on reconnaît facilement celles d'entre elles qui doivent être rejetées ou acceptées.

215. Dans la théorie de la perspective ou des projections polaires (n° 159) la surface qui projette une courbe sur le tableau est une surface conique ayant son sommet au point de vue, c'est ce qui nous a fait donner à ces projections le nom de projections coniques ; mais la projection sur le *géométral* étant toujours orthogonale, et par conséquent cylindrique, la courbe est dans ce cas l'intersection

d'une surface conique avec une surface cylindrique. Ici encore ces deux surfaces se coupent généralement suivant plusieurs courbes, de sorte que le problème admet plusieurs solutions lorsque les données ou la nature de la question ne font pas connaître celle de ces courbes qu'il faut seule conserver.

216. Les courbes, projections d'une courbe de l'espace, peuvent comme telles se terminer en des points, au delà desquels elles se prolongeraient si on les considérait dans leur plan et indépendamment des courbes projetées. On dit alors que ces courbes *reçoivent* les projections des courbes de l'espace, lorsque les projections semblent se terminer brusquement en certains points par des motifs que nous aurons l'occasion d'étudier plus tard.

217. *Les projections d'une tangente à une courbe sont tangentes aux projections de la courbe.* En effet, soit une courbe C et sa tangente T au point m; les points successifs m et m' appartiennent à la fois à C et à T (195), donc m^h et m'^h se trouvent en même temps sur C^h et sur T^h; mais il est évident que m^h et m'^h sont deux points successifs (194), car si l'on pouvait placer un troisième point entre eux, en élevant par ce point une verticale, elle serait placée entre les verticales élevées des points m^h et m'^h, et irait couper la courbe C en un point placé entre les points m et m', qui par conséquent ne seraient pas des points successifs, contrairement à notre hypothèse. Donc T^h est tangente à C^h au point m^h, projection du point de contact m de T et C. On montrerait de même que T^v est tangente à C^v au point m^v.

La réciproque est évidente, car si T^h est tangente à C^h en m^h, et T^v tangente à C^v en m^v, les points successifs m et m' seront communs à T et C; donc T sera tangente à C au point m (*).

218. Supposons un fil enroulé sur une courbe C à double courbure et que l'on tienne ce fil tendu (afin qu'il reste toujours tangent à la courbe); en le déroulant, il engendrera par ses positions successives une surface développable (n° 211, 7°) et un point quelconque de ce fil engendrera une courbe, qui sera une développante de la courbe proposée C. Donc une développée à double courbure a une infinité de développantes situées sur la surface développable, dont cette développée est l'arête de rebroussement (n° 211).

219. Si par chacun des points d'une courbe plane C on mène à cette courbe et dans son plan une normale, toutes ces normales déterminent par leurs intersections suc-

(*) Ce théorème n'est vrai qu'autant que la tangente T, au point m de la courbe C, n'est pas perpendiculaire au plan de projection. Lorsque la tangente T est perpendiculaire au plan de projection horizontale, par exemple, alors T^h est un point qui se confond avec m^h. Dans ce cas particulier, la courbe C_h offre au point m^h un *point de rebroussement*, et sa tangente, au point m_h, est la projection sur le plan horizontal de la normale au point m de la courbe C et qui est située dans le plan osculateur en m à cette courbe C.

cessives la seule développée plane C′ que puisse fournir la courbe C (n° 201). Mais considérons la série des plans normaux à la courbe C; par leurs intersections successives, ils forment une surface cylindrique Δ (n° 213), car tous les plans normaux étant perpendiculaires au plan de la courbe C, leurs intersections sont perpendiculaires à ce même plan, et par conséquent parallèles entre elles.

Cela posé, concevons par le point *m* de la courbe C une normale N non située dans le plan de cette courbe, elle sera sur le plan R normal à la courbe C au point *m* et rencontrera les génératrices droites successives G et G′ de la surface cylindrique Δ aux points *n* et *n′*; si au point *m′* successif du point *m* de la courbe C on mène une normale N′ passant par le point *n′*, cette normale N′ successive de la normale N sera située dans le plan normal R′ successif du plan R et rencontrera la génératrice G″ du cylindre Δ en un point *n″*; pour le troisième plan normal R″ successif de R′ on aura de même une normale N″ successive de N′ et coupant la génératrice G‴ du cylindre Δ au point *n‴*; la série des points *n*, *n′*, *n″*, *n‴*,... forme une courbe C″ à laquelle les normales N, N′, N″,..... de la courbe C sont tangentes, C″ est donc une développée de la courbe C (n° 201). On en conclut qu'une courbe plane ou qu'une développante plane a une infinité de développées à double courbure situées sur le cylindre enveloppe des plans normaux à cette développante.

220. Toutes les développées à double courbure d'une développante plane C, sont des hélices ayant la développée plane pour projection commune sur le plan de la courbe C. La dernière partie de la proposition est évidente, puisque toutes les génératrices du cylindre sont perpendiculaires au plan de la développante. Quant à la première partie, on nomme *hélice* une courbe tracée sur une surface cylindrique, et telle que tous ses éléments rectilignes ou toutes ses tangentes font le même angle avec les génératrices du cylindre sur lequel la courbe dite *hélice* est tracée.

Cela posé, soit une normale de direction arbitraire dans l'espace (*fig.* 175) et menée au premier point *m* de la courbe plane C, elle rencontre les génératrices successives G et G′ sous un certain angle 6, et aux points *m″* et *n″*; joignant le point *n*, successif du point *m*, avec le point *n″* on aura une normale successive *nn″*, et je dis que cette seconde normale coupe les génératrices successives G′ et G″ sous le même angle 6, etc. En effet, la courbe C′ étant la développée plane de C, l'arc *mn* est un élément circulaire ayant son centre en *n′*, donc $mn' = nn'$ et les triangles rectangles *mn″n′* et *nn″n′* sont donc aussi égaux; par conséquent on a : $\widehat{mn''n'} = \widehat{nn''n'}$; on démontrera de même que $\widehat{np''p'} = \widehat{pp''p'}$, et ainsi de suite. Donc, etc.

221. A l'égard d'une développante à double courbure C, l'enveloppe de ses plans normaux n'est plus une surface cylindrique, mais elle est toujours une surface

développable Σ; si l'on mène une normale N de direction quelconque dans l'espace et au point m de la courbe C, elle est située dans le plan normal en ce point, et rencontre par conséquent en un point n la génératrice G de la surface développable Σ; si l'on joint nm', cette seconde normale N' coupera G' en un point n'; joignant encore $n'm''$, cette troisième normale N'' coupera G'' en n'', et ainsi de suite, les normales N, N', N'', etc...... par leurs intersections successives déterminent une courbe C' à laquelle elles sont tangentes, et qui est par conséquent une développée de la courbe C. Donc *une développante à double courbure a une infinité de développées à double courbure situées sur la surface développable, enveloppe des plans normaux à la courbure* C.

Chacune de ces développées est l'arête de rebroussement d'autant de surfaces développables contenant la développante à double courbure proposée (n° 217) Donc une courbe à double courbure peut toujours être placée sur une infinité de surfaces développables. Il en est évidemment de même d'une courbe plane.

Remarquons que pour les courbes planes, le lieu des centres des cercles osculateurs aux divers points de la courbe est précisément sa développée plane : dans les courbes à double courbure le lieu de ces centres forme encore une courbe, mais elle n'est plus une développée de la courbe proposée, car les normales à la courbe à double courbure ou gauche donnée C, qui sont respectivement situées dans les plans osculateurs de cette courbe, forment une surface gauche (*).

CHAPITRE II.

PLANS TANGENTS AUX SURFACES CONIQUES ET CYLINDRIQUES.

---

222. Une surface conique est engendrée par une droite assujettie à passer toujours par un point dit *sommet* et à s'appuyer sur une courbe dite *directrice* (n° 213). Si on la coupe par une série de plans parallèles, on obtient des courbes de grandeurs différentes, que l'on peut considérer comme des génératrices de la surface.

(*) A ce sujet, *voyez* les dernières pages du *Traité de géométrie descriptive* de Monge.

Une surface conique admet donc une seule génératrice constante de forme, qui est la ligne droite, et une infinité de génératrices courbes dont la forme ou la grandeur varie dans chacune de leurs positions.

Il est évident que l'on peut prendre pour directrice une courbe quelconque, tracée sur la surface et rencontrant toutes les génératrices droites; si parmi toutes ces directrices, il en est une qui soit un cercle, et si dans ce cas le sommet et le centre du cercle sont sur une même droite perpendiculaire au plan du cercle, le cône prend le nom de *cône droit*, et la droite menée du sommet au centre du cercle est dite *axe* du cône. Remarquons que les anciens géomètres donnent à cette droite le nom d'axe, même quand elle n'est pas perpendiculaire au plan du cercle (*).

223. Une surface conique est déterminée par son sommet s et sa directrice C, c'est-à-dire que ces données suffisent pour fixer complétement un point m, de la surface conique dont on donne une projection, par exemple, m^h; en effet par ce point m passe une génératrice droite G, dont la projection G^h passe par s^h et m^h, elle rencontre la courbe C^h en un point n^h que l'on projette verticalement sur C^v en n^v; unissant n^v et s^v on aura G^v qui contient m^v.

On pourrait se donner le point n^v et chercher à déterminer n^h, de manière à ce que le point n fût situé sur la surface conique; pour déterminer n^h, on unirait les points s^v et n^v par une droite G_1^v laquelle couperait la courbe C^v en un point q^v; on déterminerait q^h sur la courbe C^h et l'on aurait la droite G_1^h en unissant les points q^h et s^h, le point n^h serait sur la droite G_1^h.

Ainsi l'on voit que les constructions à effectuer pour trouver le point m^v, s'étant donné m^h, ou le point n^h, s'étant donné n^v, les points m et n devant être situés sur la surface conique, surface qui est écrite graphiquement au moyen des projections de son sommet et des projections de la courbe directrice du mouvement de ses génératrices droites, que les constructions, dis-je, n'exigent pas autre chose que ces projections, en se rappelant toutefois que toutes les génératrices droites d'une surface conique passent par le sommet du cône et s'appuient sur la directrice courbe, ou, en d'autres termes, en se conformant, dans les constructions à exécuter, au mode de génération qui définit la surface considérée.

Lorsque l'on considérera une surface quelle qu'elle soit, il y aura deux choses à considérer : 1° le mode de génération de cette surface, mode qui la définit, et 2° la représentation graphique de cette surface, représentation qui sera dite

(*) Abaissant du sommet s d'un cône oblique une perpendiculaire Y sur le plan du cercle C base de ce cône, et unissant le sommet s avec le centre o du cercle C par une droite A (dite axe), les anciens géomètres appelaient le plan (Y, A) *plan de l'axe*.

complète au moyen des projections de certains points et de certaines lignes appartenant à la surface, lorsque l'on pourra résoudre graphiquement le problème suivant, *étant donné un point* m^h *ou un point* n^v *déterminer la position que le point* m^v *ou le point* n^h *doit avoir pour que les points* m *et* n *de l'espace soient en effet situés sur la surface considérée*, et il faudra que la détermination ou construction de ces points m^v et n^h puisse s'effectuer au moyen de *tracés* ou constructions graphiques n'exigeant pas autre chose que la connaissance des projections des points et des lignes dites, seules nécessaires pour la représentation ou définition graphique complète de la surface, et en se conformant d'ailleurs dans ces constructions au mode de génération indiqué comme étant celui qui appartient à la surface.

Lors donc que par la suite nous examinerons une surface, nous commencerons par l'écrire graphiquement et par vérifier, au moyen de la solution du problème précédent, si en effet la surface donnée est bien complétement écrite : cela fait, nous pourrons nous livrer à la recherche de la solution des divers problèmes que l'on pourra se proposer par rapport à cette surface.

224. Problème 1. *Mener un plan tangent à une surface conique par un point pris sur la surface*. Le point ne peut être donné que par l'une de ses projections, par exemple m^h; on détermine sa projection verticale comme ci-dessus (n° 222). La surface conique étant développable, le plan tangent au point *m* est tangent en tous les points de la génératrice droite G (n° 209, 3°) qui passe par ce point, et par conséquent au point *n* où elle rencontre la directrice C; il doit donc contenir cette génératrice G et la tangente T menée au point *n* à la courbe C. Le plan tangent est complétement déterminé par ces deux droites.

Si la directrice C était la trace horizontale de la surface, c'est-à-dire son intersection par le plan horizontal (et alors la courbe C peut être dite *base horizontale* du cône), la tangente T ne serait autre que la trace H^T du plan tangent T; on trouverait facilement la trace verticale V^T, puisqu'on connaît deux droites H^T et G situées sur ce plan T.

Si la directrice C était une courbe plane donnée par l'une de ces projections C^h et par son plan (n° 214), on aurait θ^h tangente à C^h et l'on en conclurait θ^v par la condition que la tangente θ doit être dans le plan de la directrice, et en outre θ^v devrait passer par la projection n^v du point de contact.

Dans tous les cas, on est conduit à mener une tangente en un point d'une courbe donnée par son *tracé*, la nature géométrique de cette courbe étant inconnue; ce problème présente de très-grandes difficultés et ne peut se résoudre qu'à un degré d'approximation très-loin d'être satisfaisant. Je suis parvenu à résoudre ce problème d'une manière générale pour un point simple ou multiple d'une courbe

dont on ne connaît pas l'équation (*); Hachette l'avait déjà résolu pour un point simple; mais les méthodes que nous employons reposent sur des considérations très-élevées et conduisent à des constructions très-compliquées et ne donnent en définitive qu'une solution approximative; de sorte qu'une semblable recherche est plus curieuse sous le point de vue géométrique, en ce sens qu'elle sert à démontrer que la géométrie descriptive a comme science une puissance qui lui est propre, et qu'elle est réellement utile.

Lorsque pour la solution graphique d'un problème on sera conduit à construire la tangente en un point d'une courbe C^h ou d'une courbe D^v, on devra dire que le problème est résolu sous le point de vue géométrique, mais non sous le point de vue graphique, si la courbe C^h ou la courbe D^v est telle qu'on ne sache pas construire rigoureusement la tangente en un de ses points; et lorsque l'on ignore la construction de cette tangente, on devra chercher à modifier la solution de manière à la faire dépendre de la construction d'une tangente menée à la courbe C^h ou à la courbe D^v par un point extérieur à cette courbe; car alors il n'y aura que très-peu d'incertitude sur la position exacte du point de contact (la tangente étant menée à vue et au moyen de la règle), tandis que dans le premier cas, la tangente étant menée à vue et au moyen de la règle, il existe une très-grande incertitude sur sa véritable direction; en sorte que si l'on doit employer pour la suite des constructions un point assez éloigné du point de contact et situé sur la tangente, ce point pourrait avoir une position très-différente de celle qu'il devrait occuper réellement sur le dessin.

Ainsi nous admettrons à l'avenir comme solution graphique suffisamment approximative, toute solution dépendant de la construction d'une tangente menée par un point extérieur à une courbe inconnue et seulement donnée par son tracé, ou d'une tangente menée parallèlement à une droite donnée de position par rapport à la courbe. Mais nous rejetterons comme ne pouvant avoir une approximation suffisante toute solution graphique dépendant de la tangente en un point d'une courbe donnée par son tracé, et dont on ignore la nature géométrique et par suite la construction rigoureuse et géométrique de la tangente.

225. Problème 2. *Mener un plan tangent à une surface conique par un point situé hors de la surface.* Soient une surface conique donnée par son sommet *s* et sa directrice C, et un point *m* de la surface, le plan tangent T devant contenir une gé-

(*) *Voyez* dans l'ouvrage qui a pour titre : *Complément de géométrie descriptive*, le Mémoire qui a pour titre : *Construction de la tangente en un point d'une courbe plane dont l'équation est inconnue.* Ce Mémoire a été publié pour la première fois dans le 21e cahier du Journal de l'École polytechnique.

nératrice droite de la surface, passera par le sommet s; donc la droite D, qui unit les points s et m, y sera contenue tout entière; mais le plan T contient en outre la tangente Θ à la directrice C, au point où elle est coupée par la génératrice de contact G, les droites D et Θ se coupent, donc la droite D coupe la surface développable, lieu des tangentes à la courbe C; cherchant ce point d'intersection n et menant par n la tangente Θ à C, puis la génératrice G passant par le point de contact x, nous aurons trois droites D, Θ, G situées dans le plan T, il sera donc déterminé.

226. Pour obtenir le point n, il faut par la droite D faire passer un plan auxiliaire quelconque X, chercher son intersection I avec la surface développable formée par les tangentes à la courbe C; elle contiendra évidemment le point n, qui est par conséquent à la rencontre de cette intersection I avec la droite D. Mais cette construction se simplifie beaucoup, lorsque la courbe C est une courbe plane, car alors la surface lieu des tangentes à cette courbe n'est autre chose que son plan P, et l'on a seulement à trouver l'intersection de la droite D et du plan P (n°s 111 à 113).

227. Dans le cas d'une directrice gauche ou à double courbure C, il est plus simple de couper la surface conique par un plan quelconque déterminant une courbe K que l'on substitue à la courbe C; et pour plus de simplicité, on peut chercher la base sur le plan horizontal ou vertical de projection de la surface conique, lorsque cette base ou trace se trouve dans les limites du dessin. Cette construction s'effectue facilement et sans erreur sensible, car les génératrices droites de la surface conique peuvent toujours s'obtenir exactement; il n'en est pas de même des tangentes à la courbe C, ainsi qu'on l'a dit ci-dessus (224).

228. Problème 3. *Mener un plan tangent à une surface conique parallèlement à une droite donnée.* Le plan tangent devant contenir une génératrice droite passera par le sommet s de la surface conique; cela posé, si par un point quelconque d'un plan parallèle à une droite B, l'on mène une parallèle à cette droite, elle est tout entière dans le plan; donc si par le sommet s on mène une parallèle D à la droite donnée B, on sera conduit à construire un plan tangent passant par la droite D, ce qui est précisément le problème 2 précédent.

229. Problème 4. *Mener un plan tangent commun à deux surfaces coniques ayant même sommet.* Si les deux surfaces coniques sont données par des directrices à double courbure, ou par des directrices planes, mais non situées dans le même plan, on les coupera par un même plan P, et l'on considérera les courbures C et C′ d'intersection comme les directrices des deux surfaces. Cela posé, le plan tangent doit contenir une génératrice droite de chaque surface et les tangentes aux courbes C et C′ aux points où elles sont rencontrées par les génératrices de

contact, mais ces deux tangentes étant l'une et l'autre dans le plan P et dans le plan tangent se confondent en une seule droite intersection de ces deux plans. Il faut donc mener une tangente commune Θ aux courbes C et C′, puis les génératrices G et G′, qui passent par les points de contact, et le plan tangent devra contenir ces trois droites.

Si l'on prend les bases ou traces horizontales des surfaces coniques, leur tangente commune sera la trace horizontale du plan tangent.

Si les deux courbes C et C′ sont extérieures l'une à l'autre, ou si elles présentent des parties saillantes et des parties rentrantes, il sera généralement possible de leur mener plusieurs tangentes communes, qui détermineront autant de plans tangents communs. Mais si les deux courbes C et C′ sont convexes et que l'une d'elles soit intérieure à l'autre, il sera impossible de leur mener une tangente commune, et par suite les deux surfaces coniques proposées n'auront pas de plans tangents communs.

Remarquons en passant que si l'on coupe les deux surfaces coniques par un plan quelconque, les courbes d'intersection présenteront toujours les mêmes circonstances, ce qui est évident.

230. *Les plans tangents à un cône droit font tous le même angle avec un plan perpendiculaire à l'axe du cône.* En effet, soient *so* (*fig.* 176) l'axe, d'un cône droit, perpendiculaire au plan horizontal, et le cercle C base de ce cône sur ce plan; le plan T tangent le long de la génératrice *sa* coupe le plan horizontal suivant la tangente Θ au cercle C, mais le rayon *oa* étant perpendiculaire à Θ, l'oblique *sa* est aussi perpendiculaire à Θ, donc l'angle dièdre formé par le plan T avec le plan horizontal est mesuré par l'angle $\widehat{sao}$ formé par la génératrice de contact *sa* avec le rayon *ao*, ou avec le plan du cercle C; mais toutes les génératrices du cône (en vertu de ce que son axe est perpendiculaire au plan horizontal) font le même angle avec le plan du cercle C, donc aussi tous les plans tangents à ce cône font le même angle avec le plan perpendiculaire à l'axe du cône.

231. Problème 5. *Mener à une surface conique un plan tangent faisant un angle donné avec un plan donné.*

Soient *s* (*fig.* 177) le sommet et B la base ou trace horizontale de la surface conique Σ proposée, cherchons 1° *un plan tangent à la surface conique et faisant avec le plan horizontal un angle* α. Considérons un cône droit Δ ayant son sommet en *s* et ayant son axe A vertical, et tel que ses génératrices droites fassent avec le plan horizontal l'angle α; la projection verticale Γ^v de la génératrice Γ du cône Δ, laquelle sera parallèle au plan vertical, fera avec la ligne de terre l'angle α, et elle rencontrera le plan horizontal en un point *a* déterminant le rayon $s^h a$ de la base

circulaire ou trace horizontale C du cône Δ. Tout plan mené par le point *s* et faisant avec le plan horizontal l'angle α sera tangent à ce cône droit Δ, donc le plan demandé doit être tangent à la fois à la surface conique proposée Σ ou (*s*, B) et au cône droit Δ ou (*s*, C); sa trace H^t sera donc tangente à la fois aux deux bases B et C qu'elle touche aux points *p* et *q*, d'où l'on conclut les génératrices de contact G et Γ; la trace verticale V^t devra passer par le point *t* intersection de H^t et de LT, et par les traces verticales des deux génératrices de contact; lorsque ces points sont hors des limites du dessin, on trouve un point *b* de V^t par une horizontale K du plan T et menée par le sommet *s*, ou par tout autre point de G ou Γ; ou encore par une droite quelconque s'appuyant à la fois sur deux des trois droites H^t, G et Γ déjà connues dans le plan T. Dans la figure 177, outre le plan T construit, il en existe trois autres, car les deux bases B et C ont quatre tangentes communes; nous n'en construisons qu'une pour ne pas embarrasser la figure.

2° *Mener à une surface conique un plan tangent faisant avec le plan vertical un angle* β. On devra considérer un cône droit ayant son sommet en *s* sommet de la surface conique donnée et ayant son axe perpendiculaire au plan vertical et tel que ses génératrices feront, avec le plan vertical, l'angle β; puis mener un plan tangent commun à ce cône droit et à la surface conique proposée.

3° *Mener à une surface conique un plan tangent faisant un angle* γ *avec un plan donné* P. On devra considérer un cône droit ayant même sommet *s* que la surface conique proposée et ayant son axe perpendiculaire au plan P et dont les génératrices feront avec le plan P l'angle γ, puis mener un plan tangent commun à ce cône droit et à la surface conique proposée.

232. Si l'on coupe une surface cylindrique (n° 213) par une série de plans parallèles, les courbes ainsi obtenues sont toutes égales entre elles (c'est-à-dire superposables), et l'on peut concevoir que l'une d'elles engendre la surface en glissant parallèlement à elle-même, de sorte que la surface cylindrique a une infinité de génératrices courbes toutes constantes de forme et de grandeur.

233. Une surface cylindrique est déterminée par ses deux directrices, l'une *courbe* et l'autre *droite*, c'est-à-dire que ces données suffisent pour fixer complétement un point *m* de la surface, dont on donne une des projections, par exemple, m^v. En effet, par ce point *m* passe une génératrice droite G de la surface, sa projection verticale G^v passe donc par m^v et elle est parallèle à la projection verticale D^v de la directrice droite D de la surface; elle coupe la projection verticale C^v de la directrice courbe en un point n^v, projection verticale du point *n* d'intersection de C et G; on en conclut la projection horizontale n^h sur C^h, puis G^h menée par n^h parallèlement à D^h; et la projection horizontale m^h doit être sur G^h.

On voit par là qu'un point m^v du plan vertical ne peut être la projection verti-

cale d'un point de la surface cylindrique, qu'autant qu'il satisfait aux conditions suivantes :

1° Qu'une droite G^v menée par ce point parallèlement à D^v rencontre C^v en un point n^v; 2° que la perpendiculaire abaissée du point n^v sur la ligne de terre rencontre C^h. Quand ces conditions sont remplies, il y a généralement plusieurs points qui ont la même projection verticale. Il en serait de même si l'on se donnait d'abord la projection horizontale m^h et que l'on se proposât de déterminer m_v de manière à ce que le point m de l'espace fût réellement situé sur la face cylindrique.

D'après ce qui précède, on voit qu'une surface cylindrique est écrite graphiquement et d'une manière complète, lorsqu'on se donne les projections de la directrice courbe et de la droite à laquelle toutes les génératrices droites doivent être parallèles (n° 224).

234. Problème 6. *Mener un plan tangent à une surface cylindrique par un point pris sur la surface.* Le point ne peut être donné que par l'une de ses projections m^h ou m^v on trouve l'autre projection m^v ou m^h comme ci-dessus (n° 233). La surface cylindrique étant développable, le plan tangent au point m est tangent en tous les points de la génératrice droite G qui passe par ce point, et par conséquent au point n où G rencontre la directrice courbe C; le plan tangent doit donc contenir cette génératrice G et la tangente T au point n à la courbe C. Le plan tangent est déterminé par ces deux droites.

Si la directrice courbe C était la base ou trace horizontale de la surface cylindrique, la tangente T à cette base ne serait autre que la trace H^T du plan tangent.

235. Problème 7. *Mener un plan tangent à une surface cylindrique par un point situé hors de la surface.*

Soient une surface cylindrique donnée par ses deux directrices C et D, et un point m situé hors de la surface; le plan tangent devant contenir une génératrice droite G, si par le point m on mène une parallèle A à cette génératrice G, elle sera tout entière dans le plan tangent T, mais ce plan T contient en outre la tangente Θ menée à la directrice courbe C au point où cette courbe est coupée par la génératrice de contact G; les droites A et Θ situées dans un même plan se coupent, donc la droite A rencontre la surface développable lieu des tangentes à la courbe C; cherchant ce point d'intersection n, et menant par le point n la tangente Θ à la courbe C, puis la génératrice G passant par le point de contact x et nous aurons trois droites A, Θ, G, situées dans le plan tangent T.

Lorsque la courbe C est plane, le lieu de ses tangentes n'est autre que son plan P, et le point n est alors l'intersection de la droite A et du plan P. Mais si la courbe C est à double courbure, la détermination du point n serait très-com-

pliquée. Dans ce cas, on peut couper la surface cylindrique par un plan quelconque P, on obtient ainsi une courbe plane K que l'on peut prendre pour directrice courbe de la surface ; et plus simplement encore on cherche la trace horizontale ou base de la surface cylindrique, alors le point *n* est la trace horizontale de la droite A, et la tangente Θ devient la trace horizontale H^T du plan tangent T.

236. Problème 8. *Mener un plan tangent à une surface cylindrique parallèlement à une droite donnée.*

Si la surface cylindrique est donnée par une directrice à double courbure, on la coupera par un plan P suivant une courbe plane C, que l'on prendra pour directrice de la surface ; ou mieux, si les limites de la feuille de dessin le permettent, on construira la base ou trace horizontale de la surface cylindrique donnée. Cela fait, si par un point *m* quelconque de la droite donnée A on conduit une droite B parallèle aux génératrices droites du cylindre, le plan Q de ces deux droites A et B sera parallèle au plan tangent T demandé, car il contiendra deux droites parallèles à ce plan et non parallèles entre elles ; donc son intersection I avec le plan P sera parallèle à l'intersection Θ des plans P et T ; or cette dernière droite Θ doit évidemment être tangente à la directrice C, donc menant à la courbe C une tangente Θ parallèle à I, puis menant la génératrice droite G appartenant au cylindre, laquelle passe par le point de contact, ces deux droites Θ et G détermineront le plan tangent demandé T.

237. Problème 9. *Mener un plan tangent commun à deux surfaces cylindriques ayant une même directrice droite.* Si les surfaces cylindriques sont données par des directrices courbes à double courbure, ou par des directrices courbes planes non situées dans le même plan, on les coupera par un plan P suivant des courbes C et C′, que l'on prendra pour les directrices courbes des deux surfaces ; ce plan P coupera le plan tangent T, suivant une tangente commune aux deux courbes C et C′ ; construisant donc cette tangente commune Θ, puis les deux génératrices droites G et G′ passant respectivement par les points de contact de Θ avec C et C′, on aura trois droites Θ, G et G′ situées dans le plan tangent demandé T.

238. Problème 10. *Construire à une surface cylindrique un plan tangent faisant un angle donné avec un plan donné* P. Soit donnée la surface cylindrique par sa base ou trace horizontale B et par sa directrice droite D ; prenons un point *s* quelconque pour sommet d'une surface conique Δ de révolution, dont l'axe soit perpendiculaire au plan P et dont les génératrices fassent avec ce plan l'angle donné *α* ; par le sommet *s* menons une droite K parallèle à D, puis par cette droite K un plan Q tangent à la surface conique Δ ; ce plan, s'il n'est pas tangent à la surface cylindrique, sera parallèle au plan tangent demandé T, donc H^T doit être parallèle à H^Q et tangente à la courbe B. On voit que le problème sera possible chaque fois

que la droite K ne percera pas le plan P en dedans du cercle, base de la surface conique de révolution, et dans ce cas il y aura généralement plusieurs solutions.

239. PROBLÈME 11. *Construire un plan tangent commun à deux surfaces coniques ayant une même directrice et des sommets différents.* Soient C la directrice courbe gauche et commune aux deux surfaces, *s* et *s'* les deux sommets; le plan tangent passera par les deux sommets, et par conséquent il contiendra la droite D qui les unit; il contient en outre une tangente Θ à la courbe C, dont on trouve le point *n* d'intersection avec D en cherchant l'intersection de D avec la surface développable, lieu des tangentes à la courbe C. Cette construction est très-simple quand la courbe C est plane; dans le cas contraire, on peut couper les surfaces coniques par un plan P, suivant des courbes K et K', chercher l'intersection *m* de ce plan et de la droite D, et menant de *m* une tangente à la courbe K, on est assuré qu'elle est en même temps tangente à K'; cette tangente et la droite D déterminent le plan tangent. Il est évident que le problème serait impossible si le point *m* était intérieur à l'une des courbes K ou K'.

240. PROBLÈME 12. *Construire un plan tangent commun à deux surfaces cylindriques ayant une même directrice courbe.* Le plan tangent devant contenir une génératrice droite de chaque surface, si par un point quelconque *m* on mène des droites A et A' respectivement parallèles aux génératrices droites des deux cylindres donnés, puis le plan P déterminé par ces droites A et A', le plan tangent cherché T sera parallèle au plan P; on coupera donc les cylindres et le plan P par un plan Q; on aura sur les cylindres les courbes K et K' et la droite I sera l'intersection des deux plans P et Q; on mènera aux courbes K et K' une tangente Θ commune, e comme vérification Θ sera parallèle à la droite I; puis on mènera les génératrices droites de contact G et G', et l'on aura trois droites du plan tangent demandé T, savoir G, G' et Θ.

241. PROBLÈME 13. *Construire un plan tangent commun à une surface conique et à une surface cylindrique ayant même directrice courbe.* Ce plan doit passer par le sommet *s* du cône et contenir une droite D menée par ce sommet parallèlement aux génératrices droites du cylindre, l'on rentre donc dans la construction d'un problème déjà résolu (n° 228).

Il est évident que l'on devrait effectuer les mêmes constructions si l'on donnait deux surfaces coniques, ou deux surfaces cylindriques, ou une surface conique et une surface cylindrique, qui n'auraient pas de directrice courbe commune, mais dans ce cas le problème est généralement impossible, excepté dans des cas particuliers, qu'il serait facile de concevoir, d'après ce qu'on vient de dire (n°s 239, 240, 241).

242. Problème 14. *Mener des plans tangents parallèles entre eux, à deux surfaces coniques de sommets différents.* Soient s et s' les sommets, B et B′ les bases ou traces horizontales des deux surfaces coniques; concevons les plans tangents T et T′ construits et supposons que le cône (s', B′) se meuve parallèlement à lui-même jusqu'à ce que son sommet s' vienne coïncider avec le sommet s du cône (s, B); à ce moment les plans tangents et parallèles entre eux T et T′ coïncideront. Si donc nous construisons la base ou trace horizontale B″ du cône (s', B′) dans sa nouvelle position, ce qui se fera facilement en menant par le sommet s des parallèles aux diverses génératrices de ce cône, il restera à mener un plan tangent T commun aux deux cônes (s, B) et (s, B″) qui ont un même sommet (n° 228), puis à mener par le sommet s' un plan T′ parallèle à ce plan T.

On voit qu'il y aura autant de solutions qu'il existera de tangentes communes aux deux bases B et B″; si l'une de ces courbes est enveloppée par l'autre, il sera impossible de mener des plans tangents, parallèles entre eux, aux deux surfaces coniques (s, B) et (s', B′), à moins cependant que les courbes B et B″ ne présentent des parties saillantes et des parties rentrantes, auquel cas elles pourraient encore avoir quelques tangentes communes.

243. Problème 15. *Mener deux plans tangents, parallèles entre eux, à une surface conique et à une surface cylindrique.* Un plan tangent T′ à la surface cylindrique devant contenir une génératrice droite de cette surface, si par le sommet s de la surface conique on mène une droite D parallèle aux génératrices de la surface cylindrique, elle doit être entièrement située dans le plan tangent T qui doit être parallèle à T′; on est donc conduit à mener par cette droite D un plan tangent T à la surface conique, puis un plan T′ tangent à la surface cylindrique et parallèlement au plan T (n° 236).

244. Problème 16. *Mener des plans tangents, parallèles entre eux, à deux surfaces cylindriques.* Un plan tangent T à la première surface doit contenir une génératrice droite G de cette surface; un plan tangent T′ à la seconde surface doit contenir une génératrice droite G′ de cette surface; si donc par un point quelconque m de l'espace on fait passer deux droites D et D′ respectivement parallèles à ces génératrices G et G′ et un plan P par ces deux droites D et D′, il n'y aura plus qu'à mener des plans respectivement tangents aux surfaces proposées et qui soient parallèles à ce plan P.

245. Problème 17. *Mener une normale commune à deux surfaces coniques, ou à une surface conique et à une surface cylindrique, ou enfin à deux surfaces cylindriques.* Une normale à une surface en un point m de cette surface est perpendiculaire au plan tangent à la surface en ce point; une normale commune à deux surfaces en des points m et n respectivement situés sur ces surfaces, est perpendiculaire à la

fois aux plans tangents menés aux deux surfaces en ces points m et n, donc ces plans tangents sont parallèles; pour résoudre le problème actuel, il faut donc construire les plans tangents, parallèles entre eux, aux deux surfaces proposées (n°s 242, 243, 244), trouver les génératrices droites de contact, et la droite qui mesure la plus courte distance de ces deux génératrices de contact (n° 137) est la normale commune demandée.

245 *bis*. Lorsque nous considérons le plan tangent T à une surface conique (s, C), dont le point s est le sommet et la courbe C la directrice, et que nous disons : le plan T est tangent au cône suivant une génératrice droite G de la surface, nous employons une expression particulière pour abréger le discours ; car si nous concevons la droite G, elle coupe la courbe C en un point m, et si en ce point m nous menons la tangente Θ à la courbe C, le plan T est déterminé par les droites G et Θ ; or la tangente Θ contient les deux points successifs m et m' de la courbe C, dès lors le plan T contient les deux génératrices successives G et G′ du cône, la première passant par le point m, et la seconde passant par le point m', de telle sorte qu'en réalité le contact n'est pas une seule droite G (entre le cône et son plan tangent), mais bien deux droites successives G et G′, ou en d'autres termes l'élément superficiel et angulaire compris entre les deux droites successives G et G′.

Il en est évidemment de même pour une surface cylindrique, son plan tangent contient aussi deux de ses génératrices droites successives; mais pour abréger le discours, nous disons *la droite de contact* au lieu de dire *l'élément superficiel commun* au cylindre et à son plan tangent.

Lorsque deux cônes Σ et Σ' ont une génératrice commune G, et leurs sommets s et s' situés sur cette droite G, si on les coupe par un plan P on obtient deux courbes C et C′ ayant en commun le point m en lequel la droite G est coupée par le plan P.

Si les deux courbes C et C′ se croisent au point m, les deux cônes Σ et Σ' s'entrecoupent suivant la droite G, mais si les deux courbes C et C′ ont une tangente commune Θ au point m, alors les deux cônes Σ et Σ' sont tangents l'un à l'autre suivant la droite G, c'est-à-dire qu'ils ont un plan tangent commun T déterminé par les droites G et Θ.

Mais la droite Θ ayant en commun avec les courbes C et C′, les deux points successifs m et m', il s'ensuit que le plan T a en commun avec le cône Σ les deux droites successives (s, m) ou G et (s, m'), et que le plan T a en commun avec le cône Σ' les deux droites successives (s', m) ou G et (s', m').

De sorte que l'élément superficiel de contact du cône Σ et de son plan tangent T, n'est pas le même que l'élément superficiel de contact du cône Σ' et de ce même plan T; en d'autres termes, les deux cônes Σ et Σ' n'ont pas en commun

deux génératrices droites successives, mais seulement en commun une partie des deux éléments superficiels formant leur contact avec le plan T. Tandis que, lorsque deux cylindres sont en contact suivant une génératrice droite G, ils ont toujours en commun deux génératrices successives G et G′.

On peut rendre compte de ce qui se passe entre deux cônes et deux cylindres tangents entre eux suivant une génératrice droite, de la manière suivante :

1° Un plan peut être engendré par une droite passant par un point fixe, et s'appuyant dans son mouvement sur une droite ; dans ce cas le plan a le même mode de génération que le cône.

2° Un plan peut être engendré par une droite se mouvant parallèlement à elle-même en s'appuyant sur une droite ; dans ce cas, le plan a le même mode de génération que le cylindre.

Or, lorsque l'on considère un cône et son plan tangent suivant la génératrice G, on peut supposer le plan engendré par la droite G passant par le sommet s du cône, et se mouvant sur la tangente Θ à la directrice courbe C de ce cône ; les deux surfaces, cône et plan, ont donc le même mode de génération.

Mais si l'on a deux cônes Σ et Σ' tangents entre eux suivant une droite G, et ayant des sommets différents s et s' situés sur le plan T tangent au cône Σ suivant G, ce plan T devra être considéré comme engendré par la droite G, s'appuyant sur la tangente Θ à la courbe C en passant toujours par le point s, et ce même plan T comme tangent au cône Σ' devra être considéré comme engendré par la même droite G s'appuyant sur la même droite Θ tangente à la courbe C′ (puisque les courbes C et C′ sont par hypothèse tangentes l'une à l'autre), mais en passant constamment non plus par le sommet s, mais au contraire par le sommet s'.

En sorte que le plan T n'a plus le même mode de génération lorsqu'on le considère comme tangent d'abord au cône Σ et ensuite au cône Σ'.

Les éléments superficiels de contact ne sont identiquement les mêmes que pour deux surfaces ayant identiquement le même mode de génération, ainsi pour deux cônes ayant même sommet ou deux cylindres ayant leurs génératrices droites parallèles (*).

(*) *Voyez* dans le chapitre VII de l'ouvrage ayant pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, les paragraphes dans lesquels j'ai exposé les divers modes de génération des surfaces.

CHAPITRE III.

DES SURFACES ENVELOPPES.

246. Une surface Σ est en général engendrée par le mouvement continu d'une ligne G droite ou courbe (n° 202) ; elle est alors dite le *lieu géométrique* des positions successives occupées dans l'espace par la ligne mobile G, et cette ligne est dite *génératrice* de la surface Σ. La génératrice, dans son mouvement, quitte l'une de ses positions G pour venir instantanément en occuper une autre G′, de sorte qu'en vertu de la loi de son mouvement ou du mode de génération de la surface Σ, il est impossible de placer sur cette surface une position de la génératrice entre les deux G et G′, ces deux génératrices sont dites, par cette raison, *génératrices successives*, elles comprennent entre elles une portion de la surface Σ qui est infiniment petite dans le sens du mouvement de la génératrice G. La surface se trouverait ainsi décomposée en une infinité d'éléments superficiels infiniment petits dans un sens. Mais en changeant le mode de génération de la surface, ou, ce qui revient au même, la loi du mouvement de sa génératrice, la surface se trouvera décomposée en un autre système d'éléments superficiels dont chacun sera également compris par deux positions successives de la génératrice dans ce nouveau mode de génération.

247. Au lieu d'engendrer ainsi la surface par le mouvement d'une ligne géométrique, on peut concevoir une surface S se mouvant également d'une manière continue, de sorte que cette surface quittera l'une de ses positions S pour venir instantanément en occuper une autre S′, de sorte que S et S′ sont deux positions successives de la surface mobile, puisqu'en vertu de la loi de son mouvement il n'y a pas de position de cette surface comprise entre les deux S et S′. Si nous considérons S et S′, non plus comme deux positions différentes d'une surface mobile, mais bien comme étant deux surfaces distinctes, qui peuvent être ou n'être pas identiques, ces deux surfaces se couperont suivant une ligne C. Considérant une

troisième position S″ de la surface mobile, les surfaces S′ et S″ se couperont suivant une courbe C′; en continuant de la même manière on déterminera une série de courbes C, C′, C″....... Je dis que deux de ces courbes C et C′ consécutives sont telles qu'on ne peut pas entre elles en placer une troisième en vertu de la loi par laquelle elles ont été produites; en effet cette troisième courbe C_1, si elle existait, ne pourrait provenir que de l'intersection de l'une des surfaces S, S′, S″ avec une surface comprise entre S et S′, ou entre S′ et S″, ce qui est impossible, en vertu de la loi du mouvement de la surface S, donc cette courbe C_1 n'existe pas. On voit dès lors que C, C′, C″..... peuvent être considérées comme les positions successives d'une courbe C, qui par son mouvement engendre une surface Σ. Cette surface serait le lieu géométrique des positions de la génératrice C, mais comme ce mode de génération n'est obtenu qu'*à posteriori*, et que la surface Σ est réellement engendrée par le mouvement de la surface S, on dit que cette surface Σ est l'*enveloppe* des positions successivement occupées dans l'espace par la surface mobile S, et les surfaces S, S′, S″.... qui ne sont que la surface S à divers instants de son mouvement, sont dites les *enveloppées* de la surface Σ. Les enveloppées successives se coupent suivant les courbes C, C′, C″....... que l'on nomme *caractéristiques* de la surface enveloppe Σ. Enfin les caractéristiques successives se coupent en des points évidemment successifs en vertu de la loi qui les détermine, et forment, par conséquent, une couche Γ, qui est l'*arête de rebroussement* de la surface Σ (n° 212), et à laquelle toutes les caractéristiques sont tangentes.

248. *L'enveloppe* Σ *est tangente à une enveloppée quelconque* S′ *en tous les points de la caractéristique* C, *intersection de cette enveloppée* S′ *et de l'enveloppée précédente* S. En effet la caractéristique C intersection de S et S′, et la caractéristique C′ intersection de S′ et S″, sont deux courbes situées à la fois sur les deux surfaces Σ et S′; si par un point *m* quelconque de C, on fait passer un plan sécant P, ce plan coupera C′ en un point *m′* infiniment voisin de *m* et les deux points *m* et *m′* seront deux points successifs communs à la courbe K intersection du plan P et de l'enveloppe Σ, et à la courbe K′ intersection du plan P et de l'enveloppée S′, de sorte que ces deux courbes K et K′ auront même tangente Θ au point *m*. Cela posé, le plan tangent en *m* à l'enveloppe Σ est déterminé par les tangentes T et Θ aux courbes tracées C et K sur cette surface, le plan tangent en *m* à l'enveloppée S′ est déterminé par les tangentes T et Θ aux courbes C et K′ tracées sur cette surface; donc le plan de ces deux droites T et Θ est tangent à la fois à l'enveloppe Σ et à l'enveloppée S′; il en serait de même pour tout autre point de la caractéristique C, ce qui démontre le théorème énoncé.

Il résulte de ce théorème que si l'on veut mener un plan tangent à une surface que l'on puisse considérer comme l'enveloppée d'une autre surface à laquelle on

sache déjà mener le plan tangent, on remplacera la surface proposée par son enveloppée et l'on mènera le plan tangent à cette dernière surface.

249. L'on peut considérer deux modes principaux de mouvement, soit de la génératrice, soit de l'enveloppée qui engendre la surface Σ.

1° La génératrice courbe G peut conserver identiquement la même forme, et se mouvoir parallèlement à elle-même de manière que l'un de ses points m parcoure une courbe donnée D, que l'on nommera la directrice du mouvement. Par ces mots se mouvoir parallèlement à elle-même on doit entendre que dans un instant infiniment petit, chaque point de la courbe G décrit une ligne droite infiniment petite, les lignes étant toutes égales entre elles et leurs directions parallèles; ainsi le point m décrit l'élément rectiligne infiniment petit $\overline{mm'}$ de la courbe D; il en sera de même de tous les autres points de la courbe génératrice G; en continuant à faire mouvoir cette génératrice, on trouvera que tous ses points décrivent des courbes identiques à la directrice D. En passant de la position G à la position successive G′, tous les points de la génératrice G ont décrit des droites égales et parallèles, qui prolongées forment une surface cylindrique; de même en passant de la position G′ à la position G″, tous les points de la génératrice décrivent des droites égales, qui prolongées forment une seconde surface cylindrique, qui peut n'être pas identique à la précédente, car les éléments $\overline{mm'}$ et $\overline{m'm''}$ de la directrice D peuvent fort bien n'être pas également inclinés sur G et G′; de sorte qu'après avoir superposé ces deux courbes, les génératrices des deux surfaces cylindriques ne coïncideraient pas, mais la surface cylindrique correspondant à une position quelconque G^{r} de la génératrice G sera déterminée par cette courbe G^{r} et la tangente D au point m^{r}, position actuellement occupée par le point m. Toutes les surfaces cylindriques ainsi formées se coupent successivement suivant les diverses génératrices G′, G″,....... elles sont les enveloppées de la surface Σ, que l'on pourrait par conséquent engendrer par une surface cylindrique se mouvant de manière à ce que ses génératrices soient parallèles successivement aux tangentes de la directrice D, et que toutes ses caractéristiques soient des courbes identiques et parallèles. Au lieu de considérer ces surfaces cylindriques on pourrait prendre des enveloppées de toute autre nature, pourvu qu'elles satisfassent aux mêmes conditions, mais il est essentiel de remarquer que toute surface ne peut pas être prise comme génératrice d'une surface donnée, tout en lui assignant une loi de mouvement convenable, car il faut que les courbes intersections des enveloppées puissent être placées sur la surface enveloppe.

2° La génératrice G peut rester semblable à elle-même et se mouvoir de manière que deux génératrices successives soient semblablement placées entre elles, un point m de la courbe G parcourant une courbe directrice donnée D. Deux généra-

trices successives G et G' étant deux courbes semblables et semblablement placées déterminent une surface conique comme nous le verrons plus loin (*Théorie de la similitude*), dont le sommet serait à l'intersection de la tangente menée en m à D et de la tangente menée en n à une autre courbe D' décrite par un second point n de G. De même G' et G'' déterminent une autre surface conique ayant son sommet à l'intersection des tangentes en m' et en n' aux courbes D et D', et ainsi de suite. On voit donc qu'on peut toujours se donner les deux directrices D et D' servant à diriger le mouvement de la génératrice courbe G, avec la condition que cette courbe génératrice G reste semblable à elle-même et que la surface Σ sera complétement déterminée, si les courbes D et D' satisfont à la condition de pouvoir être situées sur une même surface cylindrique. Les surfaces coniques que nous venons de considérer sont encore les enveloppées de la surface Σ, et dans ce mode de génération les courbes G, G', G'',....... en sont les caractéristiques. Dans ce cas encore l'on peut substituer aux surfaces coniques d'autres enveloppées, pourvu qu'elles satisfassent à la condition de se couper suivant des courbes que l'on puisse placer sur la surface enveloppe Σ (*).

CHAPITRE IV.

DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

Construction du plan tangent.

250. *Une surface de révolution* est une surface engendrée par une ligne quelconque à simple ou à double courbure (*plane ou gauche*), tournant autour d'une droite qu'on nomme *axe de rotation* ou *axe de révolution* de la surface.

(*) *Voyez* dans l'ouvrage qui a pour titre : *Developpements de géométrie descriptive*, le chapitre VII et dernier, qui traite *des infiniment petits en géométrie descriptive*.

Dans cette rotation chaque point de la ligne mobile décrit une circonférence de cercle, dont le plan est perpendiculaire à l'axe et dont le centre est sur l'axe même, de sorte que l'on peut considérer comme caractère distinctif des surfaces de révolution d'être coupées suivant des cercles par des plans perpendiculaires à l'axe qui est le lieu des centres de tous ces cercles.

Parmi les surfaces de révolution, il faut remarquer : 1° *la surface conique* engendrée par le mouvement d'une droite qui rencontre l'axe; 2° *la surface cylindrique* engendrée par une droite parallèle à l'axe; 3° *la surface sphérique* engendrée par une circonférence de cercle tournant autour d'un de ses diamètres; 4° enfin nous aurons à étudier avec détail la surface engendrée par une droite tournant autour d'un axe non situé dans un même plan avec elle; on la désigne sous le nom de *surface gauche de révolution*, ou sous celui d'*hyperboloïde de révolution à une nappe*.

La ligne quelconque, qui par son mouvement autour d'un axe engendre une surface de révolution, est dite *génératrice de la surface*.

Tout plan conduit par l'axe de la surface porte le nom de *plan méridien*, et la courbe intersection de la surface par ce plan est dite *courbe méridienne*. Il est évident que toutes les méridiennes sont égales, car on peut les prendre pour génératrices de la surface, et alors deux méridiennes ne seront que deux positions différentes d'une même génératrice.

Les cercles, intersections d'une surface de révolution par des plans perpendiculaires à l'axe, sont dits les *parallèles de la surface*. Les parallèles d'une surface de révolution ne sont pas égaux entre eux, excepté pour la surface cylindrique de révolution.

251. Par un point m quelconque d'une surface de révolution Σ passent toujours une *méridienne* et un *parallèle*, si l'on mène des tangentes à ces deux courbes, elles seront dans un même plan, qui est le plan tangent à la surface Σ au point m.

Le plan tangent est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact. En effet soient A (*fig.* 178) l'axe et M la méridienne d'une surface de révolution, considérant un point m de la courbe M et le parallèle C qui passe par ce point, le plan tangent en m contiendra la tangente T à la méridienne M et la tangente Θ au parallèle C; les plans du parallèle C et de la méridienne M sont perpendiculaires entre eux, donc la tangente Θ qui est perpendiculaire à l'intersection de ces deux plans est aussi perpendiculaire au plan méridien; il en est donc de même du plan tangent.

252. La tangente T étant dans le plan méridien rencontre l'axe A en un point s, et si l'on suppose que cette tangente T tourne autour de l'axe A en même temps que la méridienne M, elle engendrera un cône de révolution Δ, ayant avec la sur-

face Σ (engendrée par la courbe M) le parallèle C de commun, je dis que ces deux surfaces Δ et Σ sont tangentes tout le long de ce parallèle. En effet pour un autre point quelconque *n* de ce parallèle C, le plan tangent à la surface de révolution Σ contiendra la tangente Θ′ au parallèle C et la tangente à la méridienne M′ passant par ce point *n*, tangente qui ne sera autre que la position T′ qu'est venue prendre la droite T, en passant du point *m* au point *n*; or, ces deux droites Θ′ et T′ déterminent aussi le plan tangent à la surface conique pour le point *n*; les deux surfaces Δ et Σ sont donc tangentes en *n*, et par suite en tous les points du parallèle C.

253. Si par le point *m* on mène une normale N à la surface Σ, elle sera dans le plan méridien (n° 247), elle rencontrera donc l'axe A en un point *s*′, qui sera le sommet d'une surface conique de révolution ayant le parallèle C de commun avec la surface engendrée par la courbe M; il est évident que toute autre position N′ de cette droite N sera encore normale à la surface Σ, l'on dit par cette raison que la surface conique engendrée par la normale N est normale à la surface engendrée par la courbe méridienne M et qu'elle lui est normale en tous les points du parallèle C.

254. Une surface de révolution admet six modes différents de génération, que l'on peut classer en deux séries de la manière suivante : 1° Trois modes par le mouvement continu d'une *ligne*, dont la surface de révolution sera le lieu géométrique, et trois modes par le mouvement continu d'une *surface*, dont la surface de révolution serait l'enveloppe; 2° trois modes par le mouvement de *rotation* d'une courbe ou d'une surface autour de l'axe, et trois modes par le mouvement de *translation* d'une courbe ou d'une surface le long de l'axe.

Premier mode. Une ligne quelconque à simple ou à double courbure tournant autour de l'axe engendre la surface de révolution; on lui donne le nom de génératrice de la surface. Il est évident que pour engendrer une surface donnée, on pourra prendre une courbe quelconque tracée sur cette surface, pourvu toutefois que cette courbe rencontre tous les parallèles de la surface, lesquels doivent être reproduits par la rotation des divers points de la génératrice autour de l'axe.

Deuxième mode. La génératrice peut être une ligne plane située dans un même plan avec l'axe, c'est-à-dire une méridienne de la surface de révolution.

Troisième mode. On peut encore engendrer la surface par sa méridienne, en ne la donnant pas directement comme dans le mode précédent, mais en la faisant naître par l'intersection de deux surfaces. En effet par tous les points d'une méridienne M concevons des perpendiculaires à son plan, elles seront toutes parallèles entre elles et formeront une surface cylindrique Σ, mais chaque génératrice

droite G de cette surface cylindrique sera tangente à un parallèle P et au point x de ce parallèle en lequel il est coupé par la méridienne M, donc cette génératrice G passe par le point x' successif de x, les points x et x' appartenant au parallèle P; mais la série des points x' ainsi obtenus forme évidemment une méridienne M' successive de M, laquelle est également contenue tout entière sur la surface cylindrique Σ. Si maintenant on opère par rapport à la méridienne M' comme on vient de le faire par rapport à la méridienne M, c'est-à-dire, si par tous les points de M' on élève des perpendiculaires à son plan, ces perpendiculaires forment une surface cylindrique Σ' identique à la précédente Σ et sur laquelle seront deux méridiennes successives M' et M'', les deux surfaces cylindriques Σ et Σ' se coupent donc suivant la méridienne M'. En construisant une troisième surface cylindrique Σ'' sur M'', cette nouvelle surface coupera la précédente Σ' suivant la méridienne M'', et ainsi de suite. Or toutes les surfaces cylindriques ainsi construites étant identiques, on voit que si, après avoir construit l'une d'elles, on la fait tourner autour de l'axe, elle occupera une série de positions telles que deux positions successives se couperont toujours suivant une méridienne de la surface de révolution, et par conséquent cette surface de révolution sera l'enveloppe des positions successives occupées par la surface cylindrique mobile.

Quatrième mode. Si l'on fait mouvoir un cercle de manière que son centre parcoure l'axe, que son plan reste perpendiculaire à cet axe et que son rayon varie comme les ordonnées de la méridienne rapportée à l'axe, dans chacune de ses positions il représentera un parallèle de la surface de révolution et par conséquent ce cercle mobile engendrera la surface de révolution.

Cinquième mode. Au lieu de se donner ainsi les divers parallèles on peut les engendrer par des intersections successives de surfaces. Si par exemple en un point m de la méridienne M on mène la tangente T à cette méridienne (*fig.* 178) elle rencontrera l'axe en un point s sommet d'un cône de révolution Δ ayant pour génératrice T, mais cette tangente T contient les deux points successifs m et m' de M, lesquels décriront deux parallèles successifs C et C' communs à la surface de révolution et à la surface conique Δ (la figure ne montre que le parallèle C décrit par le point m); si maintenant on mène la tangente T' à la courbe M au point m', elle passera aussi par le point suivant m'' et elle sera la génératrice droite d'une surface conique Δ' ayant deux parallèles C' et C'' communs avec la surface de révolution; ces deux surfaces coniques Δ et Δ' se coupent précisément suivant le parallèle C' de la surface de révolution; une troisième surface conique Δ'', successive de Δ' et construite de la même manière, couperait la seconde surface conique Δ' suivant le parallèle C'', et ainsi de suite. Donc en faisant mouvoir dans l'espace une surface conique de révolution de telle manière qu'elle ait toujours pour axe la

droite A et que l'une de ses génératrices droites soit toujours tangente à la méridienne M, les intersections de ses positions successives engendreront la surface de révolution.

Sixième mode. Si au point m de la méridienne M, on mène une normale, elle ira rencontrer l'axe A en un point s', et si de ce point comme centre et avec $\overline{s'm}$ pour rayon, on décrit un cercle K (que nous n'avons pas tracé sur la figure) ce cercle sera situé dans le plan méridien donnant la méridienne M et sera tangent à cette courbe M. Il contiendra par conséquent le point m et le point successif m' de cette courbe M, et en tournant autour de l'axe A, ce cercle K engendrera une sphère Π ayant en commun avec la surface de révolution engendrée par M les deux parallèles C et C' décrits par les points m et m'. En opérant de même par rapport au point m', c'est-à-dire élevant une normale par ce point m' à la courbe M, laquelle normale ira rencontrer l'axe A en un poin ts' qui sera le centre d'une seconde sphère Π' ayant en commun avec la surface de révolution les parallèles C'et C'', de sorte que les deux sphères Π et Π' se couperont suivant le parallèle C'; une troisième sphère Π'' construite de la même manière coupera la seconde sphère Π' suivant le parallèle C'', et ainsi de suite; de sorte que la surface de révolution peut être considérée comme le lieu des intersections successives d'une sphère mobile dont le centre parcourt l'axe A et dont le rayon est toujours égal à la normale abaissée des divers points de l'axe sur la méridienne M.

255. Problème 1. *Étant donnée une des deux projections d'un point d'une surface de révolution, trouver la seconde projection de ce point.* Par des changements de plans, on peut toujours se ramener au cas où l'axe de la surface est vertical et où le plan vertical de projection est parallèle au plan de la méridienne donnée (lorsque la surface est donnée par une méridienne).

Cela posé :

1° Soit la surface donnée par l'axe vertical A (*fig.* 179) et par la méridienne C située dans le plan méridien M parallèle au plan vertical de projection.

Connaissant la projection m^h d'un point m de la surface, pour trouver sa projection verticale m^v remarquons que par ce point m passe un parallèle Δ dont le rayon R est donné en véritable grandeur par $A^h m^h$; ce parallèle Δ rencontre la méridienne C en un point n, dont la projection n^h est à l'intersection de Δ^h et de C^h, on en conclut n^v, par suite Δ^v et enfin m^v. Si l'on donnait m^v, on tracerait la droite Δ^v parallèle à la ligne de terre LT et rencontrant C^v en n^v, on en déduirait n^h, par suite Δ^h et enfin m^h. Il est évident qu'à la même projection m^h ou m^v peuvent correspondre plusieurs projections m^v ou m^h différentes, car dans la figure 178, par exemple, la perpendiculaire abaissée du point n^h sur LT rencontre C^v en deux points, que l'on peut prendre indifféremment pour n^v; on aurait donc deux droites, représen-

tant l'une ou l'autre Δ^h, et enfin on aurait deux points qui seraient également m^v et il est évident que l'on pourrait avoir sur la surface de révolution un plus grand nombre de points, ayant tous la même projection horizontale m^h. Si l'on donne m^v la droite Δ^v peut rencontrer C^v en plusieurs points qui tous étant projetés sur C^h feront connaître les rayons d'autant de parallèles sur lesquels on peut supposer que le point m se trouve situé; ensuite, ayant, pour chacun de ces parallèles, construit la projection horizontale Δ^h, la perpendiculaire abaissée de m^v sur LT rencontrera cette projection Δ^h en deux points symétriquement placés par rapport à H^x; le plan M étant vertical, il en résulte que les deux points du parallèle Δ qui se projettent au même point m^v sont symétriquement placés par rapport à ce plan méridien; donc le plan méridien parallèle au plan vertical divise la surface de révolution en deux parties symétriques, et comme tout plan méridien peut être amené dans cette position par un changement de plan vertical de projection, nous pouvons énoncer cette propriété générale : *Tout plan méridien d'une surface de révolution divise la surface en deux parties symétriques.*

Il en résulte aussi qu'un plan méridien divise en deux parties égales toutes les cordes de la surface qui lui sont perpendiculaires. Et si l'on remarque que les directions de ces cordes sont aussi perpendiculaires à la direction de l'axe de révolution, on pourra énoncer le théorème précédent de la manière suivante : *les milieux de tout un système de cordes parallèles entre elles et dirigées perpendiculairement à l'axe de révolution, sont sur un plan méridien de la surface de révolution.*

2° Soit la surface donnée par l'axe vertical A (*fig.* 180) et une génératrice quelconque C non située dans un plan méridien.

Connaissant la projection m^h d'un point m de la surface, on en conclura la projection m^v en remarquant que ce point est situé sur un parallèle Δ, rencontrant la courbe C en un point n. Les constructions se lisent facilement sur la figure. On voit de même comment de m^v on conclura m^h.

Dans ce cas, comme dans le précédent, à la même projection horizontale peuvent correspondre plusieurs projections verticales, et réciproquement; c'est-à-dire que plusieurs points de la surface peuvent avoir une même projection horizontale, et que plusieurs points de la surface peuvent avoir aussi même projection verticale; ainsi les premiers seront situés sur une même perpendiculaire au plan horizontal, et les seconds sur une même perpendiculaire au plan vertical de projection.

256. Problème 2. *Par un point d'une surface de révolution mener un plan tangent à cette surface.* Le point de contact m étant donné par une de ses projections m^h, on cherchera d'abord la seconde projection m^v (n° 251) (*fig.* 179 et 180) de ce point m en vertu de ce qu'il doit être réellement sur la surface, puis le plan tan-

CHAPITRE V.

THÉORIE GÉNÉRALE DE LA SIMILITUDE.

De la similitude, directe et inverse, des polygones et des courbes.

258. Les propriétés de la similitude des triangles étant supposées connues par les éléments de géométrie, nous pourrons établir le théorème suivant :

Si deux polygones plans situés dans un même plan ou dans des plans parallèles ou *deux polygones gauches ont leurs côtés parallèles et proportionnels, les droites qui unissent leurs sommets homologues concourent en un même point.* Dans deux polygones semblables, on nomme sommets homologues les sommets des angles égaux; côtés homologues, ceux qui unissent des sommets homologues; points homologues, les points dont les distances aux sommets homologues sont proportionnelles; enfin droites homologues, les droites qui unissent des points homologues. Cela posé : les droites (*fig.* 181) aa', bb', se coupant au point o, il faut prouver que cc' passe aussi par ce point; or : les triangles semblables abo, $a'b'o'$ donnent $ab:a'b'::bo:b'o$; nommant pour un instant o' le point de concours de bb' et cc', les triangles semblables bco', $b'c'o'$ donnent $bc:b'c'::bo':b'o'$; mais on a $ab:a'b'::bc:b'c'$; donc $bo:b'o::bo':b'o'$; d'où $bo-b'o:bo::bo'-b'o':bo'$; or : $bo-b'o= bo'-b'o'=bb'$; donc $bo=bo'$; donc les points o et o' coïncident; donc cc' passe par le point o. On démontrera de même que toutes les autres droites dd',...... passent pàr ce même point o. Les polygones $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont donc semblables et semblablement placés, le point o étant leur *centre* ou *pôle commun de similitude.*

Dans cette figure le pôle commun est au delà des deux polygones, si les polygones sont situés sur un même plan et au delà des plans des polygones, si ces

polygones sont situés sur des plans parallèles; on dit alors que ces polygones sont *directement semblables* et le point o peut être nommé *pôle externe de similitude*. Les droites oa, ob,...... sont dites *rayons vecteurs* des sommets ou points du polygone $abcd$....., et les droites oa', ob',..... sont dites *rayons vecteurs* des sommets ou points homologues du polygone $a'b'c'd'$....., et l'on voit que dans ce cas les rayons vecteurs *homologues* sont sur une même droite et dirigés du même côté du pôle commun o. Si l'on fait glisser le polygone $a'b'c'd'$...... parallèlement à lui-même de manière que le sommet a' vienne coïncider avec son homologue a, les côtés $a'b'$ et $a'd'$ viendront se placer sur les côtés homologues ab et ad, et en général toute droite partant du point a' viendra se placer sur son homologue, et le point a sera le pôle commun de similitude des deux polygones $abcd$...... et $a''b''c''d''$...... (le polygone $a''b''c''d''$...... étant la nouvelle position du polygone $a'b'c'd'$......).

259. Mais il peut arriver que les droites aa', bb', cc'..... (*fig.* 182), qui unissent les points homologues des deux systèmes $abcd$...... $a'b'c'd'$...... se croisent en un point o compris entre les deux polygones et que par cette raison nous pourrons nommer *pôle interne de similitude*, on dit alors que les deux polygones sont *inversement semblables*. Dans ce cas les rayons vecteurs homologues sont encore en ligne droite, mais dirigés de part et d'autre du point o et par conséquent sur le prolongement l'un de l'autre. Si l'on fait glisser le polygone $a'b'c'd'$...... parallèlement à lui-même jusqu'à ce que le sommet a' vienne coïncider avec son homologue a, les côtés $a'b'$ et $a'e'$ viendront se placer sur le prolongement de leurs homologues ab et ae, et en général toute droite menée du point a' viendra se placer sur le prolongement de son homologue; et le point a sera alors le pôle interne de similitude des deux polygones.

260. Deux polygones semblables et semblablement placés n'ont en général qu'un pôle commun de similitude externe ou interne; mais dans quelques cas chaque sommet de l'un des polygones peut être considéré indifféremment comme l'homologue de deux sommets différents de l'autre polygone; alors les deux polygones ont deux pôles communs de similitude, l'un externe o (*fig.* 183), l'autre interne o'. Mais dans ce cas, la droite $a'b'$ ou $d''e''$ étant indifféremment l'homologue de ab et de de, ces deux côtés sont parallèles; il en est de même de bc et ef, de cd et fa. Donc les angles a et d, b et e, c et f sont égaux. Je dis de plus que les diagonales qui unissent les sommets des angles égaux se coupent en un même point et que ce point divise chacune d'elles en deux parties égales; en effet ab et ed étant parallèles sont dans un même plan, donc les diagonales homologues $a'd'$ et $b'e'$ ou $a''b''$ et $b''e''$ se coupent en un point p' homologue de p, soit que l'on considère le polygone $a'b'c'd'e'f'$ directement semblable au polygone $abcdef$ ou le

polygone $a''b''c''d''e''f''$ inversement semblable au même polygone $abcdef$; on aura donc les rapports égaux

$$ap : pd :: a'p' : p'd' :: a''p' : p'd'' \quad \text{d'où} \quad a'p' + a''p' : p'd' + p'd'' :: ap : pd$$

mais $a'p' + a''p' = p'd' + p'd'' = a'd'$, donc $ap = pd$; on démontrera de même que le point p est le milieu de be; puis les côtés bc et ef étant parallèles sont dans un même plan et par suite les diagonales be et cf se coupent, et comme on verrait encore qu'elles doivent se couper en deux parties égales, elles se couperont au point p. Le point p est dit le centre du polygone $abcdef$ et par la même raison p' est le centre de l'autre polygone $a'b'c'd'e'f'$. La démonstration ci-dessus montre encore que les quatre points p, p', o, o' sont sur une même droite, car p et p' étant deux points homologues des polygones semblables $abcdef$ et $a'b'c'd'e'f'$, la droite pp' passe par le pôle externe de similitude o de ces deux polygones; de même ces points p et p' étant des points homologues dans les polygones $abcdef$ et $a''b''c''d''e''f''$, la droite pp' passe par leur pôle interne de similitude o'.

261. Par le pôle commun de similitude o (*fig.* 181 et 182) de deux polygones semblables et semblablement placés, situés dans un même plan ou dans des plans parallèles, menons une droite quelconque D, joignons un point quelconque p de cette droite avec tous les sommets de l'un des polygones $abc\ldots\ldots$, menons par le sommet a' du second polygone (ce sommet a' étant l'homologue du sommet a du premier polygone) une droite $a'p'$ parallèle à ap et coupant dès lors la droite D en un point p'; et joignons ce point p' aux autres sommets du second polygone; je dis que les droites qui unissent les points p et p' à deux sommets et en général à deux points homologues, sont parallèles. En effet ap et $a'p'$ sont parallèles par construction, donc les triangles semblables aop, $a'op'$ donnent

$$ao : a'o :: po : p'o \quad \text{mais} \quad ao : a'o :: bo : b'o \quad \text{donc} \quad bo : b'o :: po : p'o$$

donc pb et $b'p'$ sont parallèles; on démontrera de même que cp et $c'p'$, dp et $d'p'\ldots\ldots$ sont parallèles. De plus les distances des points p et p' aux sommets homologues sont proportionnelles, car les triangles semblables abp, $a'b'p'$ donnent $ap : a'p' :: bp : b'p'$; de même les triangles semblables bcp, $b'c'p'$ donnent $bp : b'p' :: cp : c'p'$ et ainsi de suite; donc

$$ap : a'p' :: bp : b'p' :: cp : c'p' :: dp : d'p' :: \ldots\ldots$$

La droite D est dite *axe de similitude* des deux polygones, et les points p et p' sont des *pôles conjugués de similitude*.

Ces deux pôles sont situés du même côté du point o, quand ce point est un pôle de similitude externe (*fig.* 181); ils sont l'un d'un côté et l'autre de l'autre côté, lorsque le point o est un pôle de similitude interne. Dans le cas où les deux polygones ont deux pôles communs de similitude (*fig.* 183), toute droite menée par l'un des points o ou o' est un axe de similitude et les pôles conjugués sont placés sur chacun de ces axes comme dans les cas précédents. La droite oo' qui unit les deux pôles est à la fois un axe de similitude externe et un axe de similitude interne, et les deux centres p et p' sont deux pôles conjugués de similitude, situés, comme on le voit, du même côté par rapport au pôle externe o, mais de côtés différents par rapport au pôle interne o'. Si l'on prend un point quelconque x, qu'on l'unisse avec les deux pôles o et o', on aura deux axes de similitude A et A'; si l'on joint le point x avec tous les sommets de l'un des polygones $abcdef$ par des droites et que des sommets homologues du polygone $a'b'c'd'e'f'$ on mène des parallèles à ces droites, elles se couperont toutes en un point y de A et les points x et y seront des pôles conjugués de similitude des deux polygones; mais si l'on mène les parallèles des sommets homologues du polygone $a''b''c''d''e''f''$, elles se couperont en un point y' de A', et x et y' seront aussi des pôles conjugués de similitude des deux polygones proposés. Donc dans le cas qui nous occupe, à un pôle de l'un des polygones correspondent toujours deux pôles pour l'autre polygone, situés avec le précédent sur deux droites passant l'une par le pôle commun externe, et l'autre par le pôle commun interne de similitude des deux polygones.

Toute droite menée par le pôle de similitude sera un axe de similitude, et un point quelconque étant pris sur cet axe pour pôle de l'un des polygones, on en conclura un pôle conjugué pour l'autre polygone. Deux pôles conjugués de similitude sont toujours placés sur une même droite passant par le centre (n° 260), c'est-à-dire sur un axe de similitude. Enfin sur un même axe D, les pôles conjugués p et p' sont d'autant plus éloignés l'un de l'autre qu'ils sont plus distants du point o, car on a toujours

$$pp' : op' :: aa' : oa \quad \text{d'où} \quad \frac{pp'}{op'} = \text{constante}$$

par conséquent pp' croît avec op' et dans le même rapport.

262. Si l'on fait mouvoir la figure $p'a'b'c'$..... (*fig.* 181 et 182) parallèlement à elle-même jusqu'à ce que le point p' coïncide avec le point p, les pôles conjugués p et p' ainsi réunis deviendront un pôle commun de similitude des deux polygones dans leurs nouvelles positions relatives, et ce sera un pôle de même espèce que le pôle o, c'est-à-dire un pôle externe lorsque les deux pôles p et p' sont du

même côté du point o, et un pôle interne lorsque ces deux pôles sont de part et d'autre du point o.

Si les polygones $abcd$...., $a'b'c'd'$.... sont plans, les figures $pabcd$...., $pa'b'c'd'$.... sont des pyramides semblables et semblablement placées. Dans tous les cas, le point o peut être considéré comme le sommet d'un angle polyèdre sur le contour duquel sont tracés les polygones $abcd$...., $a'b'c'd'$. Deux polygones semblables ne peuvent en général être situés que sur le contour d'un angle polyèdre, mais ils peuvent être situés en même temps sur le contour de deux angles polyèdres quand ils ont deux pôles communs de similitude, c'est-à-dire quand ils ont un centre (n° 260).

On conclut de ce qui précède que deux polygones semblables peuvent toujours être placés dans l'espace de telle manière que les droites qui unissent leurs sommets homologues concourent en un même point; mais la réciproque n'est pas vraie, à moins que l'on n'ajoute que les distances des sommets homologues à ce point de concours sont proportionnelles, ou que les côtés homologues des polygones sont proportionnels, ou que les polygones ont leurs angles égaux, etc.

263. Les propositions précédentes sont indépendantes du nombre et de la grandeur des côtés des deux polygones, elles seront donc applicables à deux courbes, puisque une courbe peut être rigoureusement considérée comme un polygone *infinitésimal;* mais il est nécessaire d'ajouter quelque explication; et en effet, comment doit-on entendre que deux courbes ont des côtés parallèles et proportionnels (n° 254)? Puisque la tangente à une courbe n'est que le prolongement d'un élément de cette courbe, on doit entendre par deux courbes qui ont leurs éléments ou côtés parallèles, deux courbes telles que les tangentes de l'une soient parallèles aux tangentes correspondantes de l'autre. Quant à la seconde condition, remarquons que de la proportionnalité et du parallélisme des côtés des deux polygones, il est facile de conclure le parallélisme des diagonales ou de deux droites homologues quelconques, et d'établir que les diagonales homologues sont dans le même rapport que les côtés; or, dans une courbe, tout point peut représenter un sommet du polygone infinitésimal, par lequel on peut remplacer cette courbe; si donc, par deux points homologues des deux courbes, on mène des cordes parallèles entre elles, les cordes parallèles doivent être dans un rapport constant.

Les courbes peuvent être directement semblables et avoir un pôle de similitude externe o (*fig.* 184), ou être inversement semblables et avoir un pôle de similitude interne o (*fig.* 185). Enfin les deux courbes peuvent être telles qu'un point de l'une d'elles soit à la fois l'homologue de deux points de l'autre; elles ont

alors deux pôles communs de similitude o et o' (*fig.* 186), l'un externe et l'autre interne. Dans ce dernier cas, les droites ag, bh, ci,..... unissant deux points, ayant pour homologues les deux points, a' ou g'', b' ou h'', c' ou i'',..... se coupent toutes en un point p (n° 256) qui divise chacune d'elles en deux parties égales; les droites homologues dans l'autre courbe se coupent en un point p', et les quatre points o, o', p, p' sont en ligne droite. Les points p et p' sont les centres des courbes proposées, et ces courbes sont telles que les tangentes menées aux extrémités d'une corde ou *diamètre* passant par leur centre sont parallèles entre elles.

264. Toute droite D menée par un pôle commun de similitude de deux courbes semblables C et C' (*fig.* 174 et 185) est un axe de similitude de ces courbes (n° 261); et si l'on prend un point p sur cet axe, qu'on l'unisse avec tous les points de la courbe C, qu'ensuite, par les points homologues de la courbe C', on mène des parallèles à ces droites, elles concourront toutes en un point p' du même axe D, et les points p et p' seront les pôles conjugués des deux courbes. En effet, les droites D et pa déterminent un plan contenant la droite aa' : donc, si du point a' on mène une parallèle à ap, elle sera tout entière dans ce plan, et rencontrera par conséquent D en un point p', mais les droites $a'c'$ et $a'p'$ étant respectivement parallèles à ac et ap, les plans $(p'a'c')$ et (pac) sont parallèles. Donc, si de c' on mène une parallèle à cp, elle sera tout entière dans le plan $(p'a'c')$ et aussi dans le plan $(c'cpp')$, elle rencontrera donc encore la droite D au point p'. On fera voir de même que la parallèle à ep, menée du point e', rencontre D au point p, et ainsi des autres, ce qui démontre le théorème énoncé. Nous remarquerons encore que les pôles conjugués p et p' sont du même côté du point o, si ce point est un pôle externe de similitude, et de côtés différents, si ce point est un pôle interne de similitude. Dans le cas où les deux courbes ont deux pôles communs de similitude (*fig.* 186), la droite oo', qui unit ces pôles, est à la fois un axe de similitude externe et un axe de similitude interne; les centres p et p' des deux courbes sont deux pôles conjugués (n° 257); et un point quelconque x, considéré comme un pôle de l'une des courbes C, aura toujours deux pôles y et y' qui lui correspondront pour l'autre courbe C', et qui seront situés avec x sur deux droites passant, l'une par le pôle externe de similitude o, l'autre par le pôle interne o'. Toute droite menée par un pôle commun de similitude, est un axe de similitude. Enfin, sur un même axe, les pôles conjugués sont d'autant plus éloignés l'un de l'autre qu'ils sont plus distants du pôle commun.

265. Si l'on fait mouvoir la figure (p', C') (*fig.* 184 et 185) parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que le point p' soit venu coïncider avec le point p, ce point deviendra un pôle commun de similitude externe ou interne des courbes dans leur

nouvelle position, suivant que le point o sera lui-même un pôle commun de similitude externe ou interne.

Si les courbes C et C′ ne sont pas situées dans un même plan avec l'axe de similitude D, les figures (p, C) et (p', C′) sont deux surfaces coniques, semblables et semblablement placées, en supposant les rayons vecteurs indéfiniment prolongés; ces deux surfaces seront alors identiques, car après avoir transporté le point p' en p, évidemment elles coïncideront, d'où l'on conclut que deux courbes semblables peuvent toujours être placées sur une infinité de surfaces coniques, puisque le sommet o est entièrement arbitraire.

Mais pour une position donnée des courbes semblables ou semblablement placées C et C′, lorsqu'elles sont gauches et dès lors non situées dans un même plan, ou lorsqu'elles sont planes et non situées dans un même plan, les droites qui unissent les points homologues forment une surface conique qui contient à la fois les deux courbes, et qui a son sommet au pôle commun de similitude. Les courbes C et C′ ne peuvent donc en général être situées en même temps que sur une seule surface conique, et les deux courbes se trouvent sur la même nappe, si elles sont directement semblables, et chacune sur des nappes différentes, si elles sont inversement semblables. Mais dans le cas où les courbes ont deux pôles communs de similitude, elles peuvent être situées en même temps sur deux surfaces coniques dont l'une les contient sur la même nappe et l'autre sur des nappes différentes. Il ne faut pas oublier que ce cas a lieu pour des courbes qui possèdent un centre (n° 259), c'est-à-dire un point qui est le milieu de toutes les cordes qui y passent, parce que cette remarque nous sera utile dans la théorie des sections coniques. Ajoutons que, dans le cas des courbes planes, ce centre est évidemment sur le plan de la courbe.

266. Réciproquement, si l'on coupe une surface conique par deux plans parallèles, les sections sont des courbes semblables; en effet elles ont toutes leurs tangentes homologues, parallèles entre elles, et leurs cordes homologues, parallèles et proportionnelles entre elles, et leur *rapport constant* est celui des distances des plans sécants au sommet du cône.

Si, par le sommet du cône on mène une droite quelconque, elle coupera les deux plans sécants en deux points qui sont des pôles conjugués des deux courbes, car les distances de ces deux points aux points homologues des deux sections sont proportionnelles, et toutes ces droites sont deux à deux parallèles. Si l'on fait mouvoir le plan de l'une des courbes parallèlement à lui-même, son pôle parcourant l'axe de similitude jusqu'à ce qu'il soit venu coïncider avec le pôle de l'autre courbe, ce point sera le pôle commun ou le centre de similitude des deux courbes dans leur nouvelle position.

Si, au lieu de couper un cône par divers plans parallèles, on suppose que le cône se meuve parallèlement à lui-même, les intersections de ce cône avec un plan fixe seront des courbes semblables et semblablement placées, ayant pour pôle commun de similitude la trace sur le plan fixe de la droite parcourue par le sommet du cône.

267. Il résulte de ce qui précède un moyen très-simple de construire par points une courbe semblable à une courbe donnée.

1° Soient donnés la courbe C (*fig.* 184 et 186) et deux points a' et b' homologues des points a et b, de sorte que $a'b'$ soit parallèle à ab, en joignant aa' et bb' par des droites qui se croisent au point o, ce point sera le pôle commun de similitude des deux courbes : on mènera donc les rayons vecteurs oc, od, oe,..... de la courbe donnée C; puis les cordes ac, ad, ae,..... et les parallèles $a'c'$, $a'd'$, $a'e'$,..... à ces cordes; les points a', b', c', d', e',..... appartiendront à la courbe cherchée C′ qui sera directement ou inversement semblable à C, suivant que le point o se trouvera situé au delà des points homologues a et a', ou situé entre ces deux points.

2° Si l'on ne donne que le point a', on mènera la droite aa', et si le pôle commun de similitude n'est pas fixé, on le placera en un point quelconque de cette droite aa'; et, par les mêmes constructions (que ci-dessus), on obtiendra une infinité de courbes semblables à C et passant toutes par le même point a', et dont les unes seront directement et les autres inversement semblables à cette courbe C.

3° Si l'on donne le pôle o et le rapport des rayons vecteurs, on en conclura le point a', tel que oa et oa' soient dans le rapport donné. Mais si l'on donnait simplement le pôle commun o, on pourrait choisir le point a' arbitrairement, et, par conséquent, on aurait une infinité de courbes semblables et semblablement placées entre elles, ayant toutes le point o pour pôle commun de similitude. Dans tous les cas, on peut prendre le point a' du même côté que le point a par rapport au point o, ou du côté opposé, et l'on obtient ainsi des courbes directement ou inversement semblables à la courbe proposée.

268. *Les projections de deux courbes semblables sur un même plan sont des courbes semblables.* En effet, les sections parallèles de la surface cylindrique projetant l'une des courbes sont des courbes identiques (n° 232), de sorte que si le plan de projection ne passe pas par le pôle commun de similitude o des courbes proposées C et C′, on pourra par ce point lui mener un plan parallèle, et les projections de courbes sur ce nouveau plan, que nous supposerons horizontal pour fixer les idées, seront identiques aux projections de ces courbes sur le plan primitif.

Cela posé, si l'on considère une série de points a, b, c,..... de la courbe C, et

leurs homologues $a', b', c',\ldots$ de la courbe C', les perpendiculaires abaissées des points homologues sur le plan horizontal seront dans un même plan vertical passant par le point o, de sorte que a^h et a'^h, b^h et b'^h, c^h et $c'^h,\ldots$ sont sur des droites concourant au point o : de plus les triangles semblables aa^ho et $a'a'^ho$, bb^ho et $b'b'^ho$, cc^ho et $c'c'^ho,\ldots$ donnent les séries de proportions

$$ao : a'o :: a^ho : a'^ho, \quad bo : b'o :: b^ho : b'^ho, \quad co : c'o :: c^ho : c'^ho, \ldots$$

mais les courbes C et C′ étant semblables et ayant pour pôle commun de similitude le point o, on a la suite de rapports égaux $oa : oa' :: ob : ob' :: oc : oc' :: \ldots$ donc aussi $oa^h : oa'^h :: ob^h : ob'^h :: oc^h : oc'^h :: \ldots$ et, par conséquent, les courbes C^h et C'^h sont semblables et ont pour pôle commun de similitude le point o. Si l'on reporte cette construction sur l'ancien plan de projection, le pôle commun de similitude des projections C^h et C'^h sera alors la projection o^h du pôle commun de similitude o des courbes C et C′.

On voit facilement que le point o^h sera un pôle commun de similitude externe ou interne des courbes C^h et C'^h, selon que le point o sera lui-même un pôle commun de similitude externe ou interne des courbes projetées C et C′.

269. Deux courbes C′, C″ (*fig.* 183), semblables à la même courbe C, sont semblables entre elles, et leur pôle commun de similitude o'' est sur la droite D, qui unit les pôles communs de similitude o et o' des courbes C et C′, C et C″. En effet :

1° Les points a' et a'' étant les homologues du même point a et les points b', b'' étant les homologues du même point b, les cordes $a'b'$ et $a''b''$ sont parallèles entre elles; il en est de même des cordes $a'c'$ et $a''c''$, $b'c'$ et $b''c''$ et de toutes les autres, donc les courbes C′ et C″ sont semblables et semblablement placées (n° 254).

2° Les droites oa, $o'a$, qui se croisent au point a sont dans un même plan qui contient la droite D et la droite $a'a''$; de même les droites ob et $o'b$ sont dans un même plan contenant encore la droite D et la droite $b'b''$: donc les droites $a'a''$ et $b'b''$ sont dans deux plans ayant pour intersection commune la droite D, et comme elles se coupent au point o'' pôle commun de similitude des courbes C′ et C″, ce pôle o'' ne peut être que sur la droite D.

Cette démonstration suppose que les courbes C, C′, C″ ne sont pas planes, mais si elles étaient planes on pourrait concevoir une courbe à double courbure C_1 dont C serait la projection, et considérant le cône qui aurait cette courbe C_1 pour directrice et son sommet en o, les verticales élevées des points $a', b', c',\ldots$ de C′ seraient parallèles aux verticales élevées par les points $a, b, c,\ldots$ de C, et cou-

peraient les génératrices du cône en des points qui formeraient une courbe à double courbure C_1' ayant pour projection C', et qui serait semblable à la courbe C_1 dont C est la projection, le point o étant leur pôle commun de similitude. De même les courbes C et C'' seraient les projections de deux courbes semblables ayant o' pour pôle commun de similitude, et, par suite, C' et C'' seraient les projections de deux courbes semblables, ayant leur pôle commun de similitude o'' situé sur la droite D; les deux courbes C' et C'' seraient aussi semblables (n° 264) et auraient pour pôle commun de similitude ce même point o'' de la droite D laquelle passe par les centres de similitude o et o' des courbes C et C', C et C''. La droite D est un *axe commun de similitude* des trois courbes, et c'est le seul qu'elles aient, tant que ces courbes n'ont deux à deux qu'un pôle commun de similitude.

Si l'on pose :

$$\frac{oa}{oa'} = p, \quad \frac{o'a}{o'a''} = q,$$

on aura :

$$\frac{o''a'}{o''a''} = \frac{q}{p}$$

En effet, on a les proportions :

$$a'o : oa :: a'b' : ab :: 1 : p, \quad o'a : o'a'' :: ab : a''b'' :: q : 1$$

d'où, en multipliant terme à terme,

$$oa' \times o'a : oa \times o'a'' :: a'b' : a''b'' :: q : p, \text{ mais } o''a' : o''a'' :: a'b' : a''b'', \text{ donc } o''a' : o''a'' :: p : q$$

d'où

$$\frac{o''a'}{o''a''} = \frac{q}{p}$$

270. Il est facile de reconnaître que si o et o' sont deux pôles communs de similitude externe, le point o'' sera encore un pôle de similitude externe (*fig.* 187), car dans ce cas les courbes C' et C'' sont toutes deux du même côté que C par rapport à l'axe commun D et par conséquent une droite telle que $a'a''$, par exemple, qui unit deux points homologues ne peut couper D qu'au delà des deux courbes.

Si les deux points o et o' étaient deux pôles internes, le point o'' serait encore un pôle externe, car alors chacune des courbes C' et C'' étant du côté opposé de C par rapport à D, elles seront encore situées du même côté de cet axe D.

Mais si les pôles communs de similitude o et o' sont l'un externe et l'autre interne,

le point o'' sera un pôle interne, car alors l'une des courbes C' est du même côté que C par rapport à l'axe D et l'autre C'' est du côté opposé, ou *vice versâ*, de sorte que D est un axe interne par rapport aux courbes semblables C' et C'', donc aussi le point o'' est un pôle interne de similitude.

En résumé si les courbes C' et C'' sont toutes les deux directement semblables ou toutes les deux inversement semblables à la courbe C, elles sont directement semblables entre elles; si des deux courbes C' et C'' l'une est directement semblable et l'autre inversement semblable à la courbe C, elles sont inversement semblables entre elles.

271. Si les courbes C et C' ont deux pôles communs de similitude, elles auront chacune un centre (n° 259), et par conséquent C'' en aura un aussi, de sorte que C et C'' auront aussi deux pôles communs de similitude; donc C' et C'' qui sont des courbes semblables possédant un centre auront aussi deux pôles communs de similitude; et l'on voit facilement par ce qui précède que les six pôles communs de similitude $o, o', o'', \omega, \omega', \omega''$, sont sur un même plan et trois à trois en ligne droite, (nous indiquons par o, o', o'' les pôles externes, et par $\omega, \omega', \omega''$ les pôles internes de similitude), ainsi on aura les quatre droites $oo'o''$, $o\omega'\omega''$, $o'\omega\omega''$, $o''\omega\omega'$, qui sont quatre axes communs de similitude des trois courbes proposées. Si les courbes C, C', C'' sont trois circonférences de cercles, les points o, o', o'' seront les intersections des tangentes communes et extérieures à C et C', C et C'', C' et C'' et les points $\omega, \omega', \omega''$ sont les points d'intersection des tangentes communes et intérieures à ces mêmes circonférences. Ayant donc mené ces six couples de tangentes communes et obtenu leurs six points d'intersection, nous en conclurons que les trois points extérieurs sont en ligne droite et que de même chaque point extérieur est en ligne droite avec les deux points intérieurs correspondants aux deux autres combinaisons de circonférences.

Cette proposition nous fait encore voir que si l'on mène à deux circonférences de cercles les quatre tangentes communes possibles, les deux tangentes extérieures et les deux tangentes intérieures se couperont en deux points qui seront sur la ligne des centres des deux circonférences données.

272. Si l'on considère une quatrième courbe C''' semblable à C, et dont le pôle commun de similitude soit en un point ω non situé sur la droite D, cette droite D et le point ω déterminent un plan P; or les courbes C' et C''' sont semblables et ont leur pôle commun de similitude ω' sur la droite $o\omega$ et par conséquent sur le plan P, les courbes C'' et C''' sont semblables et ont leur pôle commun de similitude ω'' sur la droite $o'\omega$ et par conséquent sur le plan P, donc les six pôles communs de similitude de quatre courbes semblables et semblablement placées sont sur un même plan P, auquel je crois qu'on peut donner le nom de *plan de similitude;* tant

que les quatre courbes n'ont deux à deux qu'un pôle commun de similitude, elles n'auront aussi qu'un plan commun de similitude.

En considérant les courbes C″ et C‴ comme étant semblables à C′, leur pôle commun de similitude ω' devra se trouver sur la droite $o''\omega'$, mais il se trouve aussi sur $o'\omega$, donc à l'intersection de ces deux droites. De même, le pôle commun de similitude de C′ et C‴ se trouve à l'intersection de $o''\omega''$ et de $o\omega$. En résumé, les pôles communs de similitude o, o', o'' des courbes C, C′, C″, ceux o, ω, ω' des courbes C, C′, C‴, ceux o, ω, ω'' des courbes C, C″, C‴, et ceux o'', ω', ω''' des courbes C′, C″, C‴, sont en ligne droite; ou, en d'autres termes, les six pôles communs de similitude $o, o', o'', \omega, \omega', \omega''$, des quatre courbes C, C′, C″ et C‴, sont trois à trois sur une même droite.

273. Si les pôles communs de similitude o, o', ω de la courbe C, avec chacune des autres courbes, sont des pôles externes, les trois autres pôles o'', ω', ω'' sont aussi des pôles externes (n° 266), et le plan P peut être dit plan externe de similitude.

Si, les pôles communs o et o' étant externes, le pôle ω était interne, le pôle o'' serait externe et les deux pôles ω' et ω'' internes; si, le pôle o étant externe, les deux pôles o' et ω sont internes, le pôle ω'' sera externe et les pôles o'' et ω' internes; enfin, si les trois pôles o, o', ω'' sont internes, les trois autres o'', ω', ω'' seront externes. C'est-à-dire que si les trois pôles communs de similitude o, o', ω de la courbe C avec chacune des trois courbes C′, C″, C‴ sont de même espèce, les pôles communs de ces trois courbes C′, C″, C‴ (combinées deux à deux) sont externes; si, des trois premiers pôles, deux sont d'une espèce et l'autre de la seconde espèce, réciproquement des trois derniers pôles, deux seront de cette seconde espèce et un de la première; de sorte que trois pôles communs de similitude sont toujours externes, et les trois autres sont en même temps externes ou internes. Et des quatre axes de similitude, l'un est toujours externe par rapport aux trois courbes qui lui correspondent et les trois autres sont de même nature entre eux.

274. Dans ce qui précède, nous avons supposé des courbes n'ayant deux à deux qu'un pôle commun de similitude; mais si la courbe C a un centre p, les courbes C′, C″, C‴ auront nécessairement aussi des centres p', p'', p'''. Alors les quatre courbes auront deux à deux deux pôles communs de similitude; nous aurons donc en tout six pôles communs de similitude directe et situés trois à trois sur quatre droites et six pôles de similitude inverse situés deux à deux en ligne droite avec un pôle de similitude directe, les trois pôles provenant d'un système de trois courbes. Les six pôles de similitude directe seront sur un même plan et nous aurons en outre une série de plans passant par trois pôles de similitude directe et

trois pôles de similitude inverse, en combinant ces pôles comme si les courbes ne possédaient qu'une espèce de similitude (n° 269).

De la similitude des surfaces.

275. Les points $a, b, c, d, \ldots..$ (*fig.* 181) et leurs homologues $a', b', c', d', \ldots..$ peuvent former deux surfaces; si par deux points homologues quelconques de ces surfaces on fait passer deux plans parallèles, ils les couperont suivant des courbes semblables et semblablement placées par rapport au point o, et dont les tangentes seront par conséquent parallèles; si l'on fait passer par les mêmes points deux autres plans également parallèles, les courbes d'intersection auront encore leurs tangentes parallèles; on peut donc énoncer le théorème suivant : *les plans tangents en deux points homologues de deux surfaces semblables et semblablement placées sont parallèles et le point* 0 *de concours des droites qui unissent deux à deux les points homologues des deux surfaces est leur centre ou pôle commun de similitude.*

276. Il est évident que si un rayon vecteur oa est tel qu'il soit tangent à l'une des surfaces en un point a, il sera tangent à l'autre surface en un point a' (les points a et a' étant deux points homologues) ; alors la droite oa se trouvera à la fois dans les plans tangents aux deux surfaces aux points homologues a et a', mais ces plans sont parallèles (n° 259), donc ils se confondent.

Si l'on fait mouvoir le rayon vecteur oa autour du point o de manière qu'il reste toujours tangent à la première surface, il sera aussi toujours tangent à la seconde surface et dans chacune de ses positions il correspondra à une position d'un plan qui sera tangent à la fois à l'une et à l'autre surface; d'où l'on conclut que *si l'on fait rouler un plan de manière qu'il reste toujours tangent à deux surfaces semblables et semblablement placées, il passe toujours par un point fixe qui est le pôle commun de similitude des deux surfaces, et les deux courbes de contact sont situées sur une même surface conique ayant son sommet en ce point.* En effet, cette surface conique n'est autre que celle engendrée par le mouvement du rayon vecteur oa; d'ailleurs les points de contact de chaque plan avec les deux surfaces sont des points homologues.

277. Si l'on considère une droite quelconque B, un plan P tangent à la première surface S et parallèle à la droite B, un plan P′ tangent à la seconde surface S′ et parallèle à la droite B, si l'on fait rouler respectivement les plans P et P′ sur les surfaces S et S′ de manière que ces plans restent toujours parallèles entre eux et à la droite B, les courbes de contact C et C′ seront encore sur une surface conique ayant son sommet au pôle commun o de similitude des deux surfaces S et S′, car ces deux courbes sont les lieux géométriques de points homologues de ces deux surfaces.

278. Toute droite menée par le point o sera un axe de similitude des systèmes de points a, b, c, d..... et a', b', c', d'....., c'est-à-dire des deux surfaces S et S′, et les points p et p' (n° 254) seront deux pôles conjugués de ces surfaces. Si le rayon vecteur pa de la surface S est tangent à cette surface au point a, le rayon vecteur conjugué $p'a'$ de l'autre surface S′ sera tangent à cette surface au point a' et ils seront situés sur les plans tangents en a et a' aux deux surfaces, lesquels plans sont parallèles (n° 259). Si l'on fait mouvoir le rayon vecteur pa de manière qu'il reste tangent à la surface S et le rayon $p'a'$ de manière qu'il soit toujours parallèle au rayon pa et par conséquent tangent à la surface S′, dans toutes leurs positions conjuguées ces rayons vecteurs seront situés sur des plans parallèles et tangents aux deux surfaces, d'où l'on peut conclure que *si l'on fait rouler un plan* P *sur l'une des surfaces* S, *de manière qu'il passe toujours par un point* p, *et si en même temps on fait rouler sur l'autre surface* S′ *un plan* P′ *parallèle à* P, *le plan* P′ *dans toutes ses positions passera par un même point* p′ *et les trois points* o, p, p′ *seront en ligne droite.* Il est évident que les courbes C et C′ contact des deux surfaces S et S′ et des deux cônes engendrés par les plans P et P′ sont deux courbes semblables et semblablement placées par rapport au pôle commun o, et qu'elles ont pour pôles conjugués de similitude les deux points p et p'.

279. Les systèmes de points homologues qui forment deux surfaces semblables et semblablement placées peuvent avoir deux pôles communs de similitude, ou être en même temps directement et inversement semblables; il y a alors deux manières de faire rouler un plan tangent à la fois aux deux surfaces, et par conséquent ces surfaces peuvent être enveloppées par deux cônes ayant leurs sommets aux deux pôles communs, tandis qu'en général elles ne peuvent l'être que par un seul.

Les propriétés générales démontrées pour les cas où les points homologues forment des courbes peuvent encore s'établir lorsque ces points forment des surfaces, de sorte que dans le cas qui nous occupe, les droites qui unissent les points de chaque surface pour lesquels les plans tangents sont parallèles, se coupent toutes en un même point et en deux parties égales: ce point sera donc un centre. Ainsi deux surfaces semblables, qui n'ont pas de centre, n'ont qu'un pôle commun de similitude; deux surfaces semblables, qui ont un centre, ont deux pôles communs de similitude; ces deux pôles et les deux centres sont en ligne droite.

280. Deux surfaces S′, S″, semblables à une même surface S, sont semblables entre elles, et les trois pôles communs de similitude sont en ligne droite. Si les surfaces S′ et S″ sont directement ou inversement semblables à S, elles sont directement semblables entre elles; mais si l'une est directement et l'autre inversement semblable à S, elles sont inversement semblables entre elles. Enfin si l'une

des surfaces a un centre, il en sera de même des deux autres; ces trois surfaces donneront alors six pôles communs de similitude, trois internes et trois externes, distribués trois à trois sur quatre droites contenant un ou trois pôles externes, et situées toutes les quatre sur un même plan.

281. Si l'on a quatre surfaces semblables et dépourvues de centre, elles donneront lieu à six pôles communs de similitude qui seront tous externes, ou dont trois seront externes et trois internes, et ces six pôles seront situés sur un même plan; si les quatre surfaces ont des centres, elles fourniront douze pôles communs, six externes et six internes, les six externes seront sur un même plan; trois pôles externes et trois internes convenablement choisis formeront des groupes de six pôles et chacun de ces groupes sera situé dans un même plan, et ainsi les douze pôles seront distribués six à six sur cinq plans.

CHAPITRE VI.

DES SECTIONS CONIQUES.

---

282. Problème 1. *Couper un cylindre de révolution par un plan.* On peut toujours, par des changements de plans de projection, se ramener au cas où le plan horizontal est perpendiculaire aux génératrices du cylindre, et le plan vertical perpendiculaire au plan sécant P. Cela posé, le plan sécant P ne peut avoir que deux positions distinctes : 1° il coupe toutes les génératrices de la surface; la section est alors une courbe fermée; 2° il coupe la surface suivant deux génératrices situées à distance finie l'une de l'autre, ou infiniment petite, et dans ce dernier cas le plan sécant n'est autre qu'un plan tangent au cylindre.

Le second cas n'a pas pas besoin d'être examiné. Dans le premier il est évident que la courbe de section E a pour projection horizontale E^h (*fig.* 189) qui n'est autre que la base même du cylindre (n° 25), c'est-à-dire un cercle C et pour projec-

tion verticale E^v qui est précisément la partie $a^v\ b^v$ de la trace V^p comprise entre les génératrices extrêmes du cylindre par rapport au plan vertical de projection.

La tangente T en un point *m* de la section E se projette évidemment en T^h tangente à E^h ou au cercle C (nº 217) et en T^v, droite qui se confond avec V^p.

On se propose ordinairement de construire la section E en véritable grandeur; pour cela on pourrait la rabattre sur le plan horizontal en faisant tourner son plan P autour de H^p, ou sur le plan vertical en faisant tourner son plan P autour de V^p; mais puisque le plan P est perpendiculaire au plan vertical de projection, ce second procédé revient à considérer le plan P comme un nouveau plan horizontal de projection, la trace V^p étant prise pour nouvelle ligne de terre. Mais on donnera à la figure une disposition plus symétrique en faisant tourner le plan P autour de l'axe *cd* perpendiculaire au plan vertical, jusqu'à ce qu'il soit venu en P' parallèle au plan horizontal.

Les points *a* et *b* viendront en a' et b'; les points *c* et *d* seront invariables, un point quelconque *m* viendra en m', et la courbe E prendra la position E', et elle sera donnée en véritable grandeur par sa projection horizontale E'^h (nº 56, 1°). La tangente T rencontre l'axe *cd* au point *s* qui reste invariable; le point de contact *m* est transporté en m', donc elle viendra prendre la position T'.

Remarquons que la projection horizontale avant le rabattement, est indépendante de l'inclinaison du plan P, par conséquent, la tangente T ira toujours rencontrer *cd* au même point *s*, quelque position que l'on donne au plan P, en le faisant tourner autour de cet axe *cd*.

283. La droite *ab* divise la courbe E en deux parties symétriques; car il est évident que toutes les cordes perpendiculaires au plan vertical sont coupées en deux parties égales par le plan M (nº 251, 1°), de sorte que si l'on pliait la figure le long de *ab*, la partie antérieure irait exactement s'appliquer sur la partie postérieure. La droite *cd* divise aussi la courbe en deux parties symétriques; car, de part et d'autre de cette droite, les cordes qui lui sont parallèles et à égale distance, sont égales. Par cette raison *ab* et *cd* sont dites *les axes* de la courbe E (*); ces droites étant données en véritable grandeur en $a^v b^v$ et en $c^h b^h$, il est évident que *ab* est $>$ *cd*, c'est pourquoi on nomme *ab* le grand axe et *cd* le petit axe de la courbe E. La droite *ab* est évidemment plus grande que toutes les cordes qui lui sont parallèles, de même la droite *cd* est plus grande que toutes les cordes qui lui sont parallèles, de plus *ae* étant une ligne de plus grande pente du plan P, et *cd*

(*) Étant donnée une courbe plane quelconque, on appelle diamètre de la courbe la droite qui divise en deux parties égales un système de cordes parallèles entre elles, et ce diamètre prend le nom d'axe lorsqu'il est perpendiculaire aux cordes.

une horizontale, et toutes les cordes qui passent par le point *o* intersection de ces droites *ab* et *cd* ayant évidemment le point *o* pour point *milieu* et ayant des projections horizontales égales (puisque ces projections sont les diamètres d'un même cercle), *ab* sera la plus grande et *cd* la plus petite d'entre elles. On donne le nom de diamètres à toutes les cordes passant par le point *a*, lequel est dit *centre* de la section E (*).

284. Problème 2. *Couper un cône de révolution par un plan.* On peut toujours, par des changements de plans, se ramener au cas où le plan horizontal est perpendiculaire à l'axe du cône et le plan vertical perpendiculaire au plan sécant. Cela posé, le plan sécant peut affecter trois positions distinctes. En effet, si par le sommet du cône on mène un plan Q parallèle au plan sécant P : 1° ce plan Q peut n'avoir que le sommet de commun avec la surface, il coupe alors toutes les génératrices droites et laisse une nappe du cône d'un côté et l'autre nappe de l'autre côté par rapport à lui, donc le plan P coupera aussi toutes les génératrices droites du cône et ne coupera qu'une nappe de la surface, la section est alors une courbe fermée; 2° le plan Q peut être tangent à la surface, il laisse encore les deux nappes de côtés différents par rapport à lui; le plan P ne rencontrera donc encore qu'une nappe et il coupera toutes les génératrices droites du cône, excepté celle qui est sur le plan Q, ou mieux il coupera celle-ci à l'infini et les voisines à des distances d'autant plus grandes du sommet qu'elles sont plus près de la génératrice de contact; la courbe de section s'étend donc à l'infini et d'un seul côté; 3° enfin, le plan Q peut couper la surface suivant deux génératrices; il laisse alors les deux nappes du cône, partie d'un côté, partie de l'autre, le plan P rencontrera donc les deux nappes et coupera toutes les génératrices, excepté les deux situées dans le plan Q; la section est alors formée de deux branches infinies et séparées.

Dans les trois cas, la projection verticale de la section est sur la partie de V^v, comprise dans l'intérieur des deux angles supplémentaires formés par les projections verticales des génératrices extrêmes du cône par rapport au plan vertical de projection.

On peut obtenir la projection horizontale de la courbe de section par deux méthodes : 1° en cherchant pour chaque génératrice droite G du cône le point où elle perce le plan P, point dont la projection verticale est l'intersection de G^v et de V^v; 2° en cherchant pour chaque *parallèle* Δ les points où il perce le plan P, points dont les projections verticales sont à l'intersection de Δ^v et de V^v. Il est évident qu'on doit employer la première méthode pour les génératrices dont la

(*) Une courbe plane quelconque a un *centre*, lorsqu' il existe sur son plan un point tel qu'il est le milieu de toutes les cordes qui passent par lui.

projection horizontale fait avec la ligne de terre un angle de 45° ou un angle plus petit; et la seconde, lorsque cet angle est plus grand que 45°, parce que les points sont alors déterminés par des lignes qui se coupent sous un angle d'au moins 45°. La seconde méthode peut seule fournir les points situés sur les génératrices dont les projections sont perpendiculaires à la ligne de terre. Il sera facile avec ces indications de construire la projection horizontale de la section, pour les trois positions du plan sécant.

Si l'on veut mener la tangente en un point *m* de la section, on remarquera que cette tangente est évidemment dans le plan P de la courbe, et dans le plan tangent à la surface conique au point *m* (n° 203), donc elle est l'intersection de ces deux plans.

On peut encore se proposer de construire la section dans sa véritable grandeur, pour cela on rabat le plan P sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de H^p (qui est perpendiculaire au plan vertical), alors le point *m* de la courbe de section vient en *m'*, la tangente T rencontre H^p en un point *a* invariable pendant le rabattement, on aura donc en *am'* la position T' de la tangente T rabattue.

On peut aussi rabattre le plan P autour de V^p, mais comme ce plan P est perpendiculaire au plan vertical, cette opération revient à changer de plan horizontal en prenant ce plan P lui-même pour nouveau plan horizontal de projection, et par conséquent V^p pour nouvelle ligne de terre L'T'; on trouvera donc facilement les différents points du rabattement de la section, et la tangente à cette section rabattue pour le point qui est le rabattement du point *m*.

285. Le plan méridien M parallèle au plan vertical coupe le plan P suivant une droite qui divise la courbe en deux parties symétriques et que l'on nomme *axe principal* de la courbe.

286. Dans le cas où la section possède des branches infinies, on peut demander de construire les tangentes dont le point de contact est à l'infini, tangentes qui prennent alors le nom d'*asymptotes* de la courbe, et qui sont les intersections du plan P de la courbe avec les plans tangents au cône en ces points situées à l'infini; comme ces points sont sur les génératrices parallèles au plan P, il faut mener des plans tangents suivant ces génératrices et chercher leurs intersections avec le plan P; lorsque le plan Q est tangent à la surface conique, alors les deux plans dont il faut trouver l'intersection sont parallèles entre eux, donc la section conique formée d'une seule branche infinie n'a pas d'asymptote. Mais quand le plan Q coupe la surface suivant deux génératrices droites, les plans tangents menés au cône suivant ces génératrices ne sont plus parallèles au plan P, et par conséquent la section conique formée de deux branches infinies a *deux asymptotes*.

Il est évident que dans tous les systèmes de projection, la projection d'une asymptote d'une courbe est une asymptote de la projection de cette courbe.

287. THÉORÈME. *La section plane du cylindre de révolution est une courbe telle que la somme des distances d'un quelconque de ses points à deux points fixes situés sur le grand axe est constante et égale à ce grand axe.* Soit un cylindre de révolution coupé par le plan P (*fig.* 189) suivant une courbe E, concevons le plan méridien M perpendiculaire au plan P, il coupera le cylindre suivant les génératrices G_1 et G_2 et le plan P suivant une droite B qui est le grand axe de la courbe E (n° 282); construisons dans le plan M, de part et d'autre de B, deux cercles C et C′ tangents à cette droite B et aux génératrices G_1 et G_2, faisons tourner ces cercles en même temps que les génératrices G_1 et G_2 autour de l'axe A du cylindre, ils engendreront des sphères S et S′ tangentes au cylindre le long des *parallèles* Δ et Δ', et au plan P aux points f et f'. Par la seule loi de symétrie, il est évident que les sphères S et S′ sont égales, et que $af = bf'$. Cela posé, pour un point quelconque x de la courbe E, je dis que l'on a : $xf + xf' = \text{const.} = ab$.

En effet, menons la génératrice G qui passe par le point x, elle est tangente aux sphères S et S′ aux points m et m' où elle rencontre les *parallèles* Δ et Δ', on a donc $xf = xm$, $xf' = xm'$ comme tangentes à une même sphère et issues d'un même point extérieur à cette sphère, d'où :

$$xf + xf' = xm + xm' = mm' = \text{constante}$$

puis on a :

$$mm' = pp' = ap + ap' = af + af' = ab$$

La courbe qui jouit de cette propriété a reçu le nom d'*ellipse;* les points f et f' en sont les *foyers*, les extrémités a, b, c, d des deux axes sont les *sommets*, le point o est le *centre*, la distance ff' est la distance *focale*, le rapport $\frac{ff'}{ab}$ de cette distance au grand axe est nommé en astronomie *excentricité*, les distances xf et xf' sont les *rayons vecteurs* du point x.

Les plans des *parallèles* Δ et Δ' coupent la droite B en les points e et e', et si l'on élève par ses points les droites D et D′ perpendiculaires sur B, ces droites sont dites les *directrices* de l'ellipse, et elles jouissent de cette propriété, savoir : *que le rapport des distances d'un point quelconque de l'ellipse au foyer et à la directrice correspondant à ce foyer est constant.* En effet, faisons passer par x le *parallèle* K, dont le plan coupe le plan P suivant la droite xg perpendiculaire à B, on aura : $ph = xm = xf$ et $g'h' = xm' = xf'$; eg et $e'g$ seront les distances du point x aux droites D et D′, puis les triangles semblables eap, ahg donnent $pa : ea :: ah : ag$,

d'où $ph : ge :: pa : ea$; mais quel que soit le point x; le triangle eap est constant, donc le rapport $ph : ge$ ou $xf : ge$ est constant; de même $xf' : ge'$ est un rapport constant. Donc les distances de chaque point de l'ellipse à la droite D et au foyer f voisin de D (ou de la directrice D correspondant au foyer f) ou à la droite D' et au foyer f' voisin de D' sont dans un rapport constant, qui est celui de $ae : af$ ou de $be' : bf'$.

Nous reviendrons plus loin sur les propriétés de cette courbe, nous ajouterons seulement que la propriété fondamentale qui précède s'énonce en disant que : *l'ellipse est une courbe dont la somme des rayons vecteurs de chaque point est constante et égale au grand axe.*

288. *Réciproquement une ellipse donnée peut toujours se placer sur une surface cylindrique de révolution.* En effet, soient E'^h l'ellipse donnée (*fig.* 188), $a'^h b'^h$ son grand axe, $c^h d^h$ son petit axe, o^h son centre; considérons cette ellipse comme la projection horizontale d'une ellipse identique E' située dans un plan P' parallèle au plan horizontal, et prenons le plan vertical LT parallèle au grand axe $a'b'$; décrivons sur le petit axe $c^h d^h$ un cercle que nous prendrons pour base d'un cylindre vertical de révolution; enfin faisons tourner le plan P' autour de cd jusqu'à ce que le point a' soit venu en a sur G_1, en même temps par la symétrie de la figure le point b' sera venu en b sur G_2 et le plan P' aura pris la position d'un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection, lequel coupe le cylindre suivant une ellipse E (n° 286) dont : $ab = a'b'$ et cd sont les axes; mais deux ellipses qui ont les mêmes axes sont évidemment identiques, donc l'ellipse E intersection du plan P et du cylindre, n'est autre que l'ellipse proposée E'^h.

Remarquons qu'il n'existe qu'un seul cylindre de révolution sur lequel cette ellipse puisse être placée.

Il résulte de là : 1° qu'un cercle peut toujours être considéré comme la projection d'une infinité d'ellipses tracées sur le cylindre de révolution dont il serait la base; 2° qu'il existe toujours un plan sur lequel la projection d'une ellipse est un cercle.

289. Théorème. *La section faite dans un cône de révolution par un plan coupant toutes les génératrices est une ellipse.* En effet, soit un cône de révolution coupé par un plan P (*fig.* 190) suivant la courbe fermée E, conduisons un plan méridien M parallèle au plan vertical de projection et perpendiculaire au plan P et qui coupe le cône suivant les génératrices G_1 et G_2 et le plan P suivant une droite B, laquelle divise évidemment la courbe E en deux parties symétriques.

Cela posé, construisons dans le plan M deux cercles C et C' tangents à la fois aux trois droites B, G_1, G_2, et faisons-les tourner autour de l'axe A du cône, ils

engendreront deux sphères S et S′ tangentes au cône le long des *parallèles* Δ, Δ' et au plan P aux points f et f', qui seront les foyers de l'ellipse E. Pour le démontrer prenons un point quelconque x de E, menons par ce point la génératrice G qui touchera les sphères S et S′ aux points m et m' des *parallèles* Δ et Δ'; on aura donc

$$xf=xm\,,\ xf'=xm' \quad \text{d'où} \quad xf+xf'=xm+xm'=mm'=\text{constante}$$

puis on a :

$$xf+xf'=pp'=qq'$$

mais

$$pp'=ap+ap'=af+af'=2af+ff'\,,\quad qq'=bq+bq'=bf+bf'=2bf'+ff'$$

Et puisque

$$pp'=qq'$$

on aura :

$$af=bf'$$

par suite :

$$pp'=af+af'=bf'+af'=ab \qquad \text{et} \qquad xf+xf'=ab$$

Donc la section E est une ellipse dont f et f' sont les foyers, et ab le grand axe.

290. Les plans des *parallèles* Δ et Δ' coupent la droite B aux points e et e' qui sont tels que l'on a : $ae=be'$, car $ap=af=bf'=bq'$ et $pp'=qq'$; puis les droites parallèles ep et $p'e'$ donnent $pp':ee'::ap:ae$, de même les droites parallèles eq et $e'q'$ donnent $qq':ee'::bq':be'$, les trois premiers termes de ces proportions sont égaux, donc $ae=be'$, ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé, si par les points e et e' on mène les droites D et D′ perpendiculaires à la droite B, ce seront les directrices de l'ellipse (n° 287). En effet, par le point x faisons passer un *parallèle* K coupant le plan M suivant le diamètre hh', et le plan P suivant la droite xg perpendiculaire à B, de sorte que ge et ge' seront les distances du point x aux droites D et D′. Les triangles semblables ahg, aep donnent hp, ou xm, ou $xf:ge::ap:ae$; de même les triangles semblables gbh', $bq'e'$ donnent $h'q'$, ou xm', ou $xf':ge'::bq':be'::ap:ae$; donc les distances d'un point quelconque de la courbe E à un même foyer et à la droite D ou D′ correspondant à ce foyer, sont dans un rapport constant. Donc enfin D et D′ sont les directrices de l'ellipse E.

Si par le sommet s du cône on mène la droite sl parallèle à la droite $q'e'$, les triangles $bq'e'$ et sbl sont semblables et donnent $bq':be'::bs:bl$, l'angle $\widehat{sbl}$ est plus grand que $\widehat{asb}$, donc si du point b on menait une parallèle à la génératrice G, elle passerait dans l'intérieur de l'angle $\widehat{sbl}$ et couperait la droite sl en un point i, tel

que l'on aurait $\overline{bi}=\overline{bs}$, mais la droite $\overline{bl}$ est plus grande que la droite $\overline{bi}$, donc enfin $\overline{bl}$ est plus grand que $\overline{bs}$; d'où il résulte qu'un point quelconque x de l'ellipse est plus près du foyer que la directrice qui correspond à ce foyer (en se rappelant que la directrice et le foyer qui lui correspond sont toujours situés d'un même côté par rapport au centre de l'ellipse).

291. Théorème. *Tout point de la section conique, composée d'une seule branche infinie, est également éloigné du foyer et de sa directrice.*

Soit P (*fig.* 191) la section faite par un plan parallèle au plan tangent mené au cône par la génératrice G_1, le plan méridien (A, G_1) ou M sera perpendiculaire au plan sécant et le coupera suivant une droite B, qui sera l'axe de la courbe P et qui sera parallèle à G_1. Cela posé, inscrivons dans l'angle $\widehat{h'sh}$, situé dans le plan M, un cercle tangent aux trois droites G_1, G_2, B, son centre sera sur l'axe A du cône et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{sag}$, laquelle est perpendiculaire à l'axe A; si l'on suppose que ce cercle tourne autour de A, il engendrera une sphère S tangente à la surface conique de révolution le long du *parallèle* Δ et au plan de la section conique en f, point qui sera le foyer de la courbe P; le plan du *parallèle* Δ coupe la droite B en un point e; par ce point e, élevant la droite D perpendiculaire à B, on aura en cette droite D la directrice de la courbe P.

Prenons maintenant un point quelconque x sur la courbe P, par ce point faisons passer un *parallèle* K, son plan coupe le plan de la courbe P suivant une droite xg perpendiculaire au méridien M, et par conséquent perpendiculaire à la droite B située dans ce plan M; la droite xg est donc parallèle à D, et par conséquent $\overline{ge}$ mesure la distance du point x à la directrice D. Je dis que l'on a : $ge=xf$; en effet, par le point x passe une génératrice G du cône, laquelle est tangente à la sphère S au point m, point en lequel cette génératrice G coupe le *parallèle* Δ, on a donc $xf=xm=ph=pa+ah$, mais à cause que la droite B est parallèle à la droite G_1, les deux triangles pae et gah sont isocèles et donnent $pa=ae$, $ah=ag$, l'on a donc $xf=ge$.

Cette courbe P a reçu le nom de *parabole*, le point a en est le *sommet*, et l'on a évidemment $af=ae$. La droite B est dite *axe infini* de la courbe.

292. Théorème. *La différence des distances d'un point quelconque de la section conique, composée de deux branches infinies, à deux points fixes situés sur son axe transverse est constante et égale à la longueur de cet axe.*

Soient (H, H') les deux branches infinies de la section faite par un plan parallèle à deux génératrices (*fig.* 182), coupons le cône par un plan méridien M parallèle au plan vertical de projection et perpendiculaire au plan sécant; inscrivons deux cercles C et C', tangents aux droites B, G_1, G_2, situées dans le plan M; supposons

que ces cercles tournent autour de l'axe A et engendrent les sphères S et S′ tangentes au cône le long des *parallèles* Δ et Δ′ et au plan de la section aux points f *et* f'.

Prenons un point quelconque x sur la courbe (H, H′), menons xf et xf', je dis que $xf' - xf = \text{const.} = ab$. En effet, par le point x passe une génératrice G tangente aux sphères S et S′ aux points m et m', où elle rencontre les *parallèles* Δ et Δ′; on a donc

$$xf = xm\,,\quad xf' = xm'$$

d'où

$$xf' - xf = xm' - xm = mm' = \text{constante}$$

puis

$$mm' = pp' = qq'$$

mais

$$pp' = ap' - ap = af' - af = ab + bf' - af\,,\ qq' = bq - bq' = bf - bf' = ab + af - bf'$$

donc

$$bf' - af = af - bf'$$

d'où

$$2bf' = 2af \qquad \text{et} \qquad bf' = af$$

par conséquent pp', ou

$$xf' - xf = af' - bf' = ab$$

Cette courbe a reçu le nom d'*hyperbole*, les points a et b en sont les *sommets*, f et f' les *foyers*, et le point o, milieu de ab, en est le *centre ;* si par lo point o on élève une perpendiculaire à ab, on a la droite désignée en analyse sous le nom d'axe *imaginaire* de l'hyperbole, et la droite $\overline{ab}$ est dite *axe réel* ou *transverse* de l'hyborbole.

293. Les plans des *parallèles* Δ et Δ′ coupent l'axe B aux points e et e', et ces points sont tels que l'on a $ae = be'$. En effet, les triangles semblables ebq, $bq'e'$ et aep, $ae'p'$ donnent $be' : bq' :: ee' : qq'$ et $ae : ap :: ee' : pp'$, mais $bq' = bf' = af = ap$, $qq' = pp'$, donc $be' = ae$, ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé, si des points e et e' on élève les droites D et D′ perpendiculaires à la droite B, ce seront les directrices de l'hyperbole, qui jouissent de cette propriété, savoir : *que les distances d'un point quelconque de l'hyperbole à un foyer et à la directrice voisine sont dans un rapport constant.* En effet, par le point x faisons passer un *parallèle* K, son plan coupera le plan de la courbe (H, H′) suivant une droite xy perpendiculaire au plan méridien M, et perpendiculaire par conséquent à la droite B, et dès lors parallèle aux directrices D et D′, donc ge et ge' sont les distances du point x à ces directrices D et D′, et les triangles semblables hag, aep donnent

$hp : ge :: ap : ae$; mais $hp = xm = xf$, donc $xf : ge :: ap : ae$, de même les triangles semblables bgh', $be'q'$ donnent $h'q' : ge' :: bq'\ b'e'$; mais $h'q' = xm' = xf'$, $bq' = ap$, $be = ae$, donc $xf' : ge' :: ap : ae$, ce qu'il fallait démontrer.

L'angle $\widehat{eap}$ est plus petit que $\widehat{psq}$, donc si par le point a on mène une parallèle à la génératrice G_2 du cône et rencontrant pe en i, on aura $ai = ap$ et la droite ae passera dans l'intérieur de l'angle $\widehat{pai}$, l'on aura donc $\overline{ae}$ plus petit que $\overline{ap}$.

Dès lors, pour l'hyperbole un point quelconque de la courbe est plus éloigné du *foyer* que de la *directrice* correspondante à ce foyer.

294. Un cône de révolution ne pouvant être coupé par un plan que suivant une ellipse, une parabole, ou une hyperbole, ces trois courbes ont reçu le nom commun de sections coniques, on les nomme aussi courbes du second degré parce que leurs équations sont du second degré. L'ellipse comprend le cercle, comme cas particulier, et l'ellipse devient un cercle lorsque la distance focale est nulle, ou que ses deux axes sont égaux.

294 *bis*. Concevons un cône de révolution Δ dont l'axe de rotation A se trouve placé dans le plan vertical de projection et perpendiculaire au plan horizontal de projection. Désignons par s le sommet de ce cône et coupons-le par une suite de plans P, P', P'', etc., parallèles entre eux et perpendiculaires au plan vertical de projection qui sera un plan méridien M du cône Δ.

Ce plan M coupera la surface Δ suivant deux génératrices droites G et G_1 et les plans P, P', P'', etc., suivant des droites parallèles entre elles, et qui ne seront autres que les traces ~~verticales~~ V^p, $V^{p'}$, $V^{p''}$, de ces plans, lesquels couperont le cône Δ suivant des sections coniques semblables E, E', E'', etc. (qui seront toutes des ellipses, ou des paraboles, ou des hyperboles, ~~suivant~~ la direction donnée aux plans sécants P, P', P'', etc.).

Traçons dans le plan M des cercles C, C', C'', etc., tangents aux droites G et G_1 et aux droites V^p, $V^{p'}$, $V^{p''}$, etc. Ces cercles toucheront les traces V^p, $V^{p'}$, $V^{p''}$, etc., respectivement en des points f, f', f'', etc., qui seront les foyers homologues des sections coniques E, E', E'', etc.

Cela posé :

Je dis que le sommet s du cône et les divers foyers homologues f, f', f'', etc., sont en ligne droite.

Et en effet, *fig.* 192 *bis*.

Les rayons of, $o'f'$, $o''f''$, etc., des cercles C, C', C'', etc., seront parallèles entre eux, comme perpendiculaires aux tangentes parallèles entre elles V^p, $V^{p'}$, $V^{p''}$, etc.

De même les rayons op, $o'p'$, $o''p''$, etc., seront parallèles entre eux comme

perpendiculaires à la droite G, qui est une tangente commune aux cercles C, C′, C″, etc.

On aura donc :

$$so : so' : so'' : \text{etc.} :: op : o'p' : o''p'' : \text{etc.}$$

ou

$$so : so' : so'' : \text{etc.} :: of : o'f' : o''f'' : \text{etc.}$$

proportions qui démontrent que le point *s* et les points *f*, *f′*, *f″*, etc., sont en ligne droite.

Si donc deux ellipses, ou deux paraboles, ou deux hyperboles étant semblables et semblablement placées, le *pôle* de similitude est le foyer de l'une des courbes, il sera en même temps le foyer de la seconde courbe.

295. Une section conique quelconque peut toujours être placée sur une infinité de cônes de révolution, dont les sommets sont les différents points d'une autre section conique, comme nous allons le démontrer :

1° Soit donnée une ellipse E (*fig.* 193), dont *ab* et *cd* sont les axes, *f* et *f′* les foyers; considérons le plan de la courbe E comme horizontal, et par l'un des foyers *f* élevons la verticale *fr* sur laquelle nous prendrons un point *r* quelconque; de ce point *r*, comme centre, et avec le rayon *fr* décrivons un cercle C dans le plan vertical M passant par le grand axe *aff′b* de l'ellipse E; puis des points *a* et *b* menons des tangentes à ce cercle, elles se couperont en un point *s*, qui sera le sommet d'un cône de révolution Δ ayant *sr* pour axe, *sa* et *sb* pour génératrices droites situées dans le plan M. Sur ce cône Δ est placée l'ellipse E; en effet, cette surface conique Δ sera coupée par le plan horizontal suivant une ellipse ayant même axe *ab*, et mêmes foyers *f* et *f′* que E, car en comparant la figure actuelle avec la figure 190, on voit que le cercle C est précisément celui qui par son point de contact *f* avec *ab* donnerait le foyer de la section; mais deux ellipses ayant même axe et mêmes foyers sont évidemment identiques, donc l'ellipse E est placée sur la surface conique Δ que nous venons de considérer.

En choisissant un autre point *r′* sur la verticale, on obtiendra une autre surface conique Δ′, ayant pour sommet un point *s′*; on pourrait aussi élever la verticale par le second foyer *f′*, et l'on obtiendrait ainsi une série de sommets *s*, *s′*, etc., tous situés sur une courbe (H, H′), que je dis être une hyperbole ayant pour sommets les foyers *f* et *f′* de l'ellipse E, et pour foyers, les sommets *a* et *b* de cette ellipse. En effet, on a évidemment d'après la figure, pour un point quelconque *s* de cette courbe (H, H′) :

$$sb - sa = sq + qb - sp - pa = bq - ap = bf - af = bf - bf' = ff'$$

296. De ce qui précède on peut conclure différentes propriétés de l'hyperbole. On voit d'abord que si l'on construit un cercle C de rayon quelconque tangent à l'axe transverse de l'hyperbole (H, H′) au sommet f, et que des foyers a et b on mène des tangentes à ce cercle, ces tangentes vont se couper en un point s de l'hyperbole situé sur la branche qui passe par le sommet f, ce qui fournit un moyen de construire par points une hyperbole dont on connaît les sommets et les foyers. Réciproquement si l'on mène les rayons vecteurs sa, sb d'un point quelconque s de l'hyperbole, et que l'on inscrive un cercle dans le triangle asb, ce cercle touchera l'axe transverse au sommet f de la branche d'hyperbole sur laquelle est situé le point s.

Les points de contact des cercles ainsi construits et des rayons vecteurs aboutissant au même foyer a sont sur une circonférence de cercle décrite de ce foyer comme centre et avec la distance af pour rayon. Car pour tous ces cercles on a : $ap = af$ comme tangentes issues d'un même point.

297. Si l'on suppose que le cercle C tourne autour de l'axe sr, il engendrera une sphère tangente à la surface conique le long du *parallèle* Δ, dont le plan coupera l'axe ab de l'ellipse E en un point e appartenant à la directrice D de cette courbe (n° 289), on aura donc pour un point quelconque x de E la proportion $xf : ge :: af : ae$. Si l'on prend un autre sommet s, sur la même branche H de l'hyperbole, qu'on fasse les mêmes constructions par rapport au nouveau cône, le plan du *parallèle* de contact Δ coupera ab en un point, que je désigne pour un instant par e_1, et l'on aura $xf : ge_1 :: af : ae_1$; de ces deux proportions on tire $ge : ae :: ge_1 : ae_1$, d'où $ge - ae : ae :: ge_1 - ae_1 : ae_1$; mais $ge - ae = ag = ge_1 - ae_1$, donc $ae = ae_1$. Donc tous les plans de *parallèles* de contact tels que Δ coupent le plan de l'ellipse E suivant la même droite D et ne déterminent ainsi qu'une seule directrice de cette courbe E. Si l'on considère les cônes ayant leurs sommets sur l'autre branche H′ on obtiendra de la même manière la seconde directrice D′ de l'ellipse E.

298. On démontre par l'*analyse* appliquée à la géométrie que la tangente à l'hyperbole divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs du point de contact ; or, l'axe sr du cône de révolution divise l'angle $\widehat{asb}$ en deux parties égales, donc il est tangent à l'hyperbole (H, H′) au point s. D'où l'on déduit cette propriété que *les axes des cônes de révolution sur lesquels on peut placer une ellipse sont tangents à la courbe lieu de leurs sommets.* Mais cette propriété se trouvera démontrée par la *géométrie descriptive* sans avoir besoin de recourir à l'*analyse* ; car plus loin nous démontrerons directement la propriété suivante, savoir : *la normale en un point d'une section conique divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs ayant le point considéré pour sommet.*

En augmentant le rayon *fr*, les tangentes *ab* et *bq* approchent du parallélisme; lorsque ces droites seront parallèles, le sommet *s* sera transporté à l'infini, et le cône se transformera en un cylindre. On aurait un second cylindre en décrivant un cercle égal et tangent au point *f'*, mais il est facile de reconnaître que ces deux cylindres sont superposables et qu'ainsi on peut placer sur un cylindre (n° 287) de révolution l'ellipse proposé E, de deux manières différentes, cette courbe E affectant dès lors sur le cylindre deux positions que l'on obtient (*fig.* 188) en faisant tourner le plan P de l'ellipse E autour de *cd* d'un côté ou d'autre et d'un même angle.

Dans le cas que nous considérons, l'axe du cylindre passe par le centre *o* (*fig.* 193) de E et par le point de l'hyperbole (H, H') situé à l'infini, donc il sera l'asymptote de cette hyperbole, car nous démontrerons plus loin que les asymptotes de l'hyperbole passent par le centre.

299. 2° Soit donnée une parabole P (*fig.* 194), dont *a* est le sommet et *f* le foyer; considérons le plan de P comme horizontal, et par le foyer élevons la verticale *fr* sur laquelle nous prendrons un point quelconque *r* pour centre d'un cercle C tangent à l'axe infini de la parabole et au point *f*, puis ayant prolongé *fr* jusqu'en *q*, menons par les points *a* et *q* des tangentes à C, elles se couperont en un point *s*, qui sera le sommet d'un cône de révolution ayant *fr* pour axe, *sa* et *sq* pour génératrices droites, et sur lequel est placée la parabole P. En effet, le plan horizontal, parallèle à la génératrice *sq*, coupe cette surface conique suivant une parabole ayant même sommet *a* et même foyer *f* que la courbe donnée P (n° 290), donc ces deux paraboles sont identiques. Donc, enfin, la parabole P est placée sur la surface conique que nous venons de considérer.

En prenant d'autres centres *r* sur la verticale élevée au point *f*, on trouvera une infinité d'autres surfaces coniques, sur lesquelles sera également placée la parabole P, et je dis que les sommets *s* sont les différents points d'une parabole P' ayant son sommet en *f* et son foyer en *a*. En effet, la figure montre évidemment que pour un point quelconque *s* de P' on a :

$$sa = sp + pa = sp + af = sp + fe' = sq + ql = sl$$

300. On voit par ce qui précède que si l'on construit un cercle C d'un rayon quelconque et tangent à l'axe infini d'une parabole P' au sommet *f*, que l'on mène une tangente à ce cercle C par le foyer *a* et une autre tangente à ce même cercle, mais parallèle à l'axe infini, ces deux tangentes se rencontrent en un point *s* de la parabole P', ce qui fournit un moyen de construire par points une parabole dont on connaît le sommet et le foyer. Réciproquement, si par un point quelconque *s* de la parabole P' on mène le rayon vecteur et une parallèle à l'axe infini

et extérieurement à la courbe P′, le cercle tangent à ces trois droites touchera l'axe infini de la parabole P′ au sommet de cette courbe P′.

Les points de contact des cercles ainsi construits et des rayons vecteurs sont sur une circonférence de cercle décrite du foyer comme centre et avec la distance *af* pour rayon, car pour tous ces cercles on a $ap = af$.

301. Si l'on suppose que le cercle C tourne autour de l'axe *sr*, il engendrera une sphère tangente à la surface conique le long d'un *parallèle* Δ dont le plan coupe le plan de la parabole P suivant la directrice D (n° 290), de sorte que l'on a $ae = af$; pour tout autre sommet *s*, on trouvera un autre *parallèle* Δ dont le plan devra couper le plan de la parabole suivant la même droite D, puisque *af* est constant.

302. Par l'*analyse* appliquée à la géométrie on démontre que la tangente à la parabole divise en deux parties égales l'angle du rayon vecteur et du diamètre, donc l'axe *sr* est tangent à la parabole P′, on en conclut évidemment que la sous-tangente est double de l'abscisse, car on a $nf = qs$; mais nous démontrerons directement cette proposition (n° 324), et ensuite nous démontrerons que cette même propriété existe pour l'ellipse et l'hyperbole en la faisant passer de la parabole sur ces deux courbes.

303. A mesure que le sommet *s* s'éloigne sur la parabole P′, le rayon *fr* du cercle augmente indéfiniment, de sorte que le cône ne pourrait dégénérer en cylindre qu'en supposant *fr* infini, c'est-à-dire qu'une parabole P ne peut jamais être placée sur un cylindre de révolution. Donc aussi un cylindre de révolution ne peut pas être coupé par un plan suivant une parabole.

304. 3° Soit donnée une hyperbole (H, H′) (*fig.* 195) dont *a* et *b* sont les sommets, *f* et *f′* les foyers; considérons le plan de (H, H′) comme plan horizontal, et par l'un des foyers *f* élevons la verticale *fr* et d'un centre quelconque *r* décrivons le cercle C tangent en *f* à l'axe réel ou transverse *ab*, par les sommets *a* et *b* menons des tangentes à ce cercle, elles se couperont en un point *s* qui sera le sommet d'un cône de révolution ayant *sr* pour axe, *sa* et *sb* pour génératrices droites et sur lequel sera située l'hyperbole (H, H). En effet, cette surface conique sera coupée par le plan horizontal suivant une hyperbole ayant mêmes sommets *a* et *b* et mêmes foyers *f* et *f′* que l'hyperbole proposée, et qui par conséquent sera identique avec elle.

Mais en choisissant un autre point *r*, on trouvera par la même construction un autre sommet *s* d'un cône de révolution sur lequel sera située l'hyperbole proposée (H, H′); le lieu de ces sommets est une ellipse E ayant pour sommets les foyers *f* et *f′* de l'hyperbole (H, H′) et pour foyers les sommets *a* et *b* de cette hyper-

bole; en effet, pour l'un quelconque de ces sommets s, on a évidemment :

$$sa + sb = sp + pa + qb - sq = ap + bq = af + bf = bf' + bf = ff'$$

305. Nous voyons par ce qui précède que si l'on décrit un cercle d'un rayon quelconque tangent au grand axe d'une ellipse E et en son sommet; que si des foyers a et b on mène des tangentes à ce cercle, elles vont se couper en un point s de l'ellipse E; ce qui fournit un moyen de décrire par points une ellipse dont on connaît les sommets et les foyers. Réciproquement, si l'on décrit un cercle tangent : 1° au grand axe d'une ellipse E, 2° à l'un des rayons vecteurs mené à un point x de cette ellipse et 3° au prolongement de l'autre rayon vecteur mené au même point x, le point de contact avec l'axe sera au sommet de la courbe E.

Les points de contact des cercles ainsi construits et des rayons vecteurs aboutissant au même foyer a sont sur une circonférence décrite de ce foyer comme centre et avec la distance af pour rayon, car pour chacun de ces points on a toujours $af = ap$.

306. Si l'on suppose que le cercle C tourne autour de l'axe sr, il engendrera une sphère tangente à la surface conique le long d'un *parallèle* Δ, dont le plan coupera le plan horizontal suivant une droite D, directrice de l'hyperbole (H, H') (n° 292).

Si l'on construit donc des cônes ayant leurs sommets en chaque point de l'ellipse E et les sphères correspondantes, tous les plans des *parallèles* de contact se couperont suivant la même droite D.

307. On démontre par l'*analyse* appliquée à la géométrie que la tangente à l'ellipse divise en deux parties égales l'angle supplémentaire des rayons vecteurs menés au point de contact. Or, l'axe sr du cône remplit cette condition, donc il doit être tangent à l'ellipse.

Plus loin nous démontrerons directement cette propriété, en démontrant que la normale en un point d'une ellipse divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs passant par ce point.

Si le point s est au sommet du petit axe de l'ellipse, l'axe sr du cône est parallèle à ab, ce qui est évident, car alors les angles $\widehat{sab}$, $\widehat{sba}$ sont égaux, par suite la bissectrice de l'angle extérieur est parallèle à la base, donc dans ce cas particulier il est démontré que l'axe du cône est tangent à l'ellipse.

En augmentant encore le rayon fr, le sommet s se rapproche de f', et jamais le cône ne dégénère en cylindre; donc une hyperbole ne peut jamais être placée sur

un cylindre de révolution. Donc aussi un cylindre de révolution ne peut jamais être coupé par un plan suivant une hyperbole.

308. **Problème III.** — *Placer une section conique donnée sur un cône de révolution donné.* 1° Si la section conique est une ellipse E (*fig.* 193) en prenant un point quelconque de l'hyperbole (H, H′) on voit que l'angle $\widehat{asb}$ peut varier de 180° à 0°, donc on pourra placer la courbe E sur le cône donné quel que soit son angle au sommet; et pour placer la courbe E sur le cône, ayant mené un plan méridien de ce cône, il suffira d'inscrire dans l'angle des génératrices extrêmes une droite *ab* égale au grand axe de l'ellipse, ou autrement ayant construit comme ci-dessus (n° 294) la courbe (H, H′), puis sur *ab* et dans le plan de cette hyperbole (H, H′) ayant décrit un segment capable de l'angle $\widehat{asb}$ (formé par les génératrices extrêmes du cône donné), ce segment coupera l'hyperbole en deux points symétriquement placés, les unissant l'un et l'autre aux points *a* et *b* on aura deux triangles identiques; soit *sab* l'un d'eux, on coupera le cône donné par un plan méridien et l'on portera respectivement sur les deux génératrices qui y seront contenues les distances *sa*, *sb*, puis conduisant par les deux points ainsi obtenus un plan perpendiculaire au plan méridien, il coupera le cône suivant une ellipse identique à la courbe proposée.

2° Si la section conique donnée est une parabole P (*fig.* 194), on construira encore la parabole P′ (n° 298); du sommet *a*, on mènera une droite faisant avec l'axe infini de la courbe P′ un angle supplément de l'angle au sommet du cône proposé, cette droite coupera P′ en un point *s*, portant la distance *as* sur une génératrice du cône, et par le point ainsi obtenu menant une parallèle à la génératrice opposée du cône, puis par cette droite un plan perpendiculaire au plan méridien correspondant, il coupera le cône suivant une parabole identique à la courbe proposée. Il est évident que cette construction est possible quel que soit l'angle au sommet du cône proposé. Donc une parabole quelconque peut être placée sur un cône quelconque de révolution, c'est-à-dire : quel que soit l'angle au sommet de ce cône.

3° Si la section conique donnée est une hyperbole (H, H′) (*fig.* 195), ayant construit l'ellipse E (n° 303), on décrira sur *ab*, et dans le plan de cette ellipse, un segment capable du supplément de l'angle au sommet du cône donné, il coupera E en un point *s*; prenant alors deux génératrices opposées du cône donné et sur ces génératrices, mais dans des nappes différentes pour l'une et l'autre, portant les distances *sa*, *sb*; menant ensuite par *ab* un plan perpendiculaire au plan méridien correspondant, il coupera le cône donné suivant une hyperbole identique à la courbe proposée. Il est évident que le segment décrit sur $\overline{ab}$ ne coupera pas tou-

jours l'ellipse E, il faut que l'angle au sommet du cône soit plus grand que le supplément de l'angle des rayons vecteurs menés du sommet du petit axe de l'ellipse E. Donc une hyperbole quelconque ne peut pas toujours être placée sur un cône quelconque de révolution, elle ne peut se trouver que sur un cône dont l'angle au sommet est au moins égal au supplément de celui d'un triangle isocèle ayant pour base l'axe transverse ab et pour côté la demi-distance des foyers of de cette hyperbole.

Des focales des sections coniques.

309. Dans l'ellipse chaque foyer peut être remplacé par un point quelconque de la branche d'hyperbole (n° 294) qui y passe et la propriété fondamentale de cette courbe (savoir : que la somme des rayons vecteurs menés à un point quelconque de la courbe est constante) est encore satisfaite. En effet, prenons les points s et s' (*fig.* 193) respectivement situés sur les deux branches de l'hyperbole (H, H') et considérons un point x quelconque de l'ellipse E; les génératrices sx et $s'x$ rencontrent les *parallèles* Δ et Δ' en les points t et t' et l'on a $st=sp$, $s't'=s'p'$, $xt=xf$, $xt'=xf'$ comme tangentes à une même sphère et issues d'un même point; donc l'on a :

$$sx+s'x=st+tx+s't'+t'x=sp+s'p'+xf+xf'=ab+sp+s'p'=\text{constante}$$

Donc ces points s et s' pourraient aussi être nommés foyers de l'ellipse E et sous ce point de vue, l'hyperbole (H, H') est le lieu des foyers de l'ellipse E, ce qui lui a fait donner le nom de *focale de l'ellipse.*

Il est évident que si l'on prend les deux foyers sur la même branche de l'hyperbole (H, H'), on trouvera que c'est la différence des rayons vecteurs qui est constante et non leur somme, car on aurait dans l'expression de chaque rayon vecteur le terme xf ou xf', que l'on ne pourrait faire disparaître que par soustraction; et, en effet, en considérant le même foyer f, on voit que $(xf+xf)$ n'est plus constant, mais bien $(xf-xf)$, puisque l'on a $xf-xf=0$.

310. Si de même pour la parabole P on remplace le foyer f (*fig.* 194) par un point quelconque s de la parabole P' (n° 298), et si l'on prend en même temps au lieu de la directrice D, une parallèle à cette droite et menée par le point où af est coupée par une parallèle à qp passant par le point s, on voit de suite qu'un point quelconque de la parabole P sera encore également distant du foyer s et de la directrice correspondante. En effet, on a :

$$xs=xt+ts=xf+sq=xg+gg''=xg''$$

La parabole P′ est donc le lieu des foyers de la parabole P, elle est dite pour cela la *focale* de cette courbe.

311. Enfin, si l'on remplace les foyers de l'hyperbole (H, H′) (*fig.* 195) par deux points quelconques s, s' de l'ellipse E (n° 303), la différence des distances d'un point quelconque de l'hyperbole à ces deux points sera encore constante. En effet, considérons deux points m et m' de l'hyperbole situés l'un sur une branche et l'autre sur l'autre branche de l'hyperbole, on sait que si la courbe E est le lieu des sommets des cônes de révolution sur lesquels on peut placer l'hyperbole (H, H′), réciproquement la courbe (H, H′) sera le lieu des sommets des cônes de révolution sur lesquels on peut placer l'ellipse E (n°s 294 et 303), donc la courbe (H, H′) sera la focale de la courbe E (n° 308) et l'on aura :

$$sm + sm' = s'm + s'm' \quad \text{d'où} \quad ms - ms' = m's' - m's = \text{constante}$$

Si l'on prend deux points m et m'' sur une même branche de l'hyperbole, on aura (n° 308) :

$$ms - m''s = ms' - m''s' \quad \text{d'où} \quad m''s - m''s' = ms - ms' = \text{constante}$$

Donc l'ellipse E est la focale de l'hyperbole (H, H′).

Le mode de démonstration que j'ai employé pour obtenir les propriétés des foyers et des focales des sections coniques a été exposé pour la première fois par MM. Dandelin et Quételet (*).

Diverses propriétés de l'ellipse.

312. Nous avons vu (n° 286) qu'une surface cylindrique de révolution est coupée suivant une ellipse par un plan incliné à l'axe de ce cylindre, de sorte qu'en supposant cet axe vertical, la projection horizontale de l'ellipse sera un cercle. Cela posé, si l'on conçoit que toutes les droites tracées sur le plan horizontal soient les projections de droites tracées sur le plan de l'ellipse, il est évident que les cordes du cercle sont les projections de cordes de l'ellipse; que le milieu de la corde du cercle est la projection du point milieu de la corde de l'ellipse; que deux droites parallèles sur le plan du cercle sont les projections de deux droites parallèles sur le plan de l'ellipse; qu'une tangente au cercle est la projection d'une tangente à l'ellipse; que deux droites qui se coupent dans le plan du cercle sont les projections de deux droites qui se coupent dans le plan

(*) *Voyez* les Mémoires de l'Académie royale des sciences de Bruxelles.

de l'ellipse. Mais l'angle des projections de deux droites n'est pas égal à l'angle des droites projetées, à moins que ces droites ne soient l'une une horizontale et l'autre une ligne de plus grande pente du plan de l'ellipse, auquel cas ces droites dans l'espace et leurs projections sur le plan du cercle sont également perpendiculaires entre elles.

313. D'après cela nous conclurons facilement ce qui suit :

1° Nommant *diamètre* d'une courbe une ligne qui divise en deux parties égales un système de cordes parallèles, les diamètres du cercle sont des droites, donc les *diamètres d'une ellipse sont des droites.*

2° Tous les diamètres d'un cercle passent par le centre et y sont coupés en deux parties égales; donc *les diamètres d'une ellipse concourent en un point, qui est leur milieu commun et qu'on nomme centre de l'ellipse.*

3° Les diamètres d'un cercle sont perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales; mais il n'en sera pas de même dans l'ellipse, excepté toutefois pour le diamètre dirigé suivant une ligne de plus grande pente du plan et pour le diamètre horizontal. Ces deux derniers diamètres sont nommés les *axes de l'ellipse.*

4° De deux droites, qui ont des projections égales, la plus grande est celle qui fait avec le plan de projection le plus grand angle; or, tous les diamètres du cercle sont égaux, donc le plus grand diamètre de l'ellipse est celui qui est dirigé suivant la ligne de plus grande pente de son plan, et le plus petit est le diamètre horizontal; c'est-à-dire que *les axes d'une ellipse sont ses diamètres maximum et minimum.*

5° On nomme *diamètres conjugués* deux diamètres, dont chacun est parallèle aux cordes divisées par l'autre en deux parties égales; dans le cercle les diamètres conjugués sont perpendiculaires entre eux; mais il n'en sera pas de même dans l'ellipse, excepté pour les axes, qui forment le seul système de diamètres conjugués de l'ellipse perpendiculaires entre eux.

6° Les diamètres du cercle qui font des angles égaux avec la projection de l'un des axes sont les projections de diamètres égaux de l'ellipse, car ils sont également inclinés sur le plan horizontal et ont des projections égales; mais ces diamètres ne sont conjugués qu'autant qu'ils font avec la projection de l'un des axes des angles demi-droits; donc il n'y a dans l'ellipse qu'un seul système de diamètres conjugués égaux.

7° La tangente au cercle est parallèle au diamètre conjugué de celui qui passe par le point de contact; donc aussi la tangente à l'ellipse est parallèle au diamètre conjugué de celui qui passe par le point de contact; et par conséquent les tangentes aux extrémités d'un même diamètre sont parallèles.

8° On nomme *cordes supplémentaires* deux cordes qui partant d'un même point de la courbe aboutissent aux extrémités d'un même diamètre; or, dans le cercle les cordes supplémentaires sont perpendiculaires entre elles et par conséquent parallèles à deux diamètres conjugués; donc aussi dans l'ellipse les cordes supplémentaires sont parallèles à deux diamètres conjugués, mais les cordes supplémentaires parallèles aux axes sont seules perpendiculaires entre elles.

9° Dans le cercle des tangentes aux extrémités d'une corde concourent en un point du diamètre conjugué de cette corde, c'est-à-dire en un point du diamètre qui passe par le milieu de la corde qui unit les points de contact; donc aussi dans l'ellipse les tangentes aux extrémités d'une corde concourent en un point du diamètre conjugué de cette corde; et par conséquent si l'on mène des tangentes aux extrémités de tant de cordes parallèles que l'on voudra, ces tangentes concourront deux à deux en des points situés sur le diamètre conjugué de ces cordes parallèles.

10° Si d'un point extérieur à l'ellipse on mène deux tangentes à cette courbe, ensuite la corde qui unit les points de contact, et enfin une parallèle à cette corde, les portions de cette parallèle comprises entre les tangentes et la courbe sont égales entre elles (c'est évident d'après la figure).

314. Il résulte de ce qui précède les constructions graphiques de plusieurs problèmes, qu'il est utile de savoir résoudre lorsqu'une ellipse est donnée par *son tracé*.

1° Pour trouver le centre d'une ellipse E il suffit de mener deux cordes parallèles C et C', de construire leur diamètre conjugué D qui passe par les points *d* et *d'* milieux de ces cordes C et C' et de prendre le milieu du diamètre D.

2° Pour trouver les axes d'une ellipse E, on construit un de ses diamètres D quelconque, sur lequel, comme diamètre, on décrit une circonférence de cercle B, laquelle coupe l'ellipse en un point *m* que l'on unit aux extrémités du diamètre D; on a deux cordes supplémentaires rectangulaires entre elles et auxquelles les axes de l'ellipse sont par conséquent parallèles (n° 313, 8°).

3° Les diamètres conjugués égaux sont parallèles aux cordes supplémentaires menées d'une extrémité d'un axe aux extrémités de l'autre axe.

4° Pour construire la tangente en un point *m* d'une ellipse E, on mène le diamètre D qui passe au point *m*, ensuite une corde C parallèle à D, enfin on unit les milieux des droites C et D par une droite D' à laquelle la tangente demandée est parallèle (n° 313, 7°), car D et D' sont deux diamètres conjugués.

5° On peut aussi construire la tangente de la manière suivante: on mène le diamètre D qui passe au point *m*, ensuite une corde C parallèle à D, enfin la corde C' supplémentaire de C, et la tangente au point *m* est parallèle à la corde C' (n° 31 7° et 8°).

6° Les mêmes opérations graphiques s'appliquent à la construction de la tan-

gente parallèle à une droite donnée, car on obtient le point de contact en menant un diamètre parallèle à la droite donnée, puis son conjugué.

315. *La projection horizontale d'une droite est égale à la droite projetée multipliée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec sa projection ;* car la droite *ab* (*fig.* 196) est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont la projection ou une parallèle $\overline{ac}$ à cette projection est un côté de l'angle droit ; on a donc : $ac = ab \times \cos\alpha$.

La même relation existe entre la surface ou *aire* d'une figure plane quelconque et la surface ou *aire* de sa projection. En effet, soit 1° un triangle *abc* (*fig.* 197) ayant un côté *ab* sur le plan de projection, nous avons en représentant l'aire du triangle *cab* par Δ et l'aire de sa projection *abd* par Δ^h :

$$\Delta = \tfrac{1}{2} ab \times ce, \quad \Delta^h = \tfrac{1}{2} ab \times ed, \quad \text{mais } ed = ce \times \cos\alpha$$

donc

$$\Delta^h = \tfrac{1}{2} ab \times ce \times \cos\alpha = \Delta \times \cos\alpha$$

2° Soit le triangle *abc* (*fig.* 198) ayant un seul sommet *a* sur le plan de projection, prolongeons le côté opposé *bc* et sa projection *de* jusqu'à leur rencontre en *f* et joignons par la droite *af* les deux points *a* et *f* ; nous aurons

$$abc = afc - abf, \quad ade = afe - afd, \quad \text{mais } afe = afc \times \cos\alpha, \quad afd = afb \times \cos\alpha$$

donc

$$ade = abc \times \cos\alpha$$

On peut toujours se ramener à ce dernier cas, en menant par l'un des sommets un plan parallèle au plan de projection.

Une autre figure plane peut toujours se décomposer en triangles de grandeur finie ou infiniment petite, et par conséquent la proposition précédente lui serait applicable. Donc, si en général on représente l'aire d'une figure plane par K, par K^h l'aire de sa projection et par α l'angle que fait son plan avec le plan de projection, on aura $K^h = K \cdot \cos\alpha$. On peut donc énoncer ce qui suit :

316. 1° Les quarrés circonscrits au cercle sont égaux, donc les parallélogrammes circonscrits à l'ellipse, dont ils sont les projections, sont équivalents entre eux.

2° Les rectangles inscrits au cercle ont pour diagonales des diamètres ; donc les diagonales des parallélogrammes inscrits à l'ellipse sont aussi des diamètres.

3° Les quarrés inscrits au cercle sont égaux et leurs diagonales sont des diamètres conjugués ; donc les parallélogrammes inscrits à l'ellipse et dont les diagonales sont des diamètres conjugués, sont tous équivalents entre eux.

4° Nommant E l'aire de l'ellipse, α l'angle que son plan fait avec le plan du

cercle C projection de l'ellipse E, et R le rayon de ce cercle C, on a $\pi R^2 = E.\cos\alpha$; et si A et B sont le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse, on aura : $R = B = A\cos\alpha$, et par suite $\pi.A.B.\cos\alpha = E.\cos\alpha$; donc, enfin, $E = \pi AB$. Ainsi l'aire de l'ellipse est égale à celle d'un cercle dont le diamètre serait moyen proportionnel entre les deux axes de l'ellipse.

317. Dans deux cercles concentriques les cordes sous-tendues par des angles égaux sont entre elles comme les rayons de ces cercles, et par conséquent proportionnelles entre elles. Si donc on considère ces deux cercles comme les projections de deux ellipses tracées sur un même plan, ces ellipses seront concentriques et jouiront de cette propriété, à savoir que leurs diamètres homologues et leurs cordes homologues sont proportionnels; donc les axes de ces ellipses sont proportionnels et on dit que ces ellipses sont des *ellipses semblables*, *semblablement placées et concentriques*.

On pourrait transporter l'une de ces ellipses parallèlement à elle-même dans son plan, ou dans un plan parallèle; elle aurait toujours pour projection un cercle et resterait semblable et semblablement placée par rapport à l'autre ellipse.

Je dis que *deux ellipses situées dans un même plan, ou dans deux plans parallèles, et qui ont pour projections des cercles, sont semblables et semblablement placées*. En effet, soient R et R′ les rayons des deux cercles projections; A et B deux diamètres de l'une des ellipses; A′ et B′ les diamètres qui dans l'autre ellipse sont respectivement parallèles aux diamètres A et B; les droites A et A′ feront avec le plan horizontal un même angle α, et aussi les droites B et B′ feront avec le plan horizontal un même angle β, et par conséquent on aura

$$R = A\cos\alpha = B\cos\beta, \quad R' = A'\cos\alpha = B'\cos\beta$$

d'où $A : B :: A' : B'$; donc les deux ellipses sont semblables et semblablement placées.

318. Pour mener la tangente au cercle C (*fig.* 199) par un point extérieur *a* on décrit sur *oa* comme diamètre un cercle C′ qui coupe le cercle C aux points de contact *b* et *c* des tangentes *ab* et *ac*, et si par le point *a* on mène une sécante quelconque, la partie *df* comprise dans le cercle C est coupée en deux parties égales en *e* par le cercle C′, car si l'on joint *oe* l'angle $\widehat{oca}$ est droit. Donc pour mener la tangente à l'ellipse, dont le cercle C serait la projection, par un point projeté en *a*, il faudra exécuter les constructions suivantes (pour abréger le discours nous nommerons les projections au lieu des lignes projetées), sur *oa* comme diamètre homologue de *gh*, nous décrirons une ellipse C′ semblable à l'ellipse C et semblablement placée, elle coupera l'ellipse C en deux points *b* et *c*, qui seront les points

de contact des tangentes *ab* et *ac*, et si l'on mène une sécante quelconque, la partie *df* comprise dans l'ellipse C est coupée en deux parties égales en *c* par l'ellipse C'.

319. Ce qui a été dit (nº 281), conduit à la méthode suivante pour mener la tangente en un point *m* d'une ellipse E. On construira le petit axe de l'ellipse E et sur ce petit axe comme diamètre on décrira un cercle C. Du point *m* on abaissera sur ce petit axe une perpendiculaire qui coupera le cercle C en *n*; on mènera la tangente en *n* au cercle C, elle coupera le petit axe prolongé en *s*; joignant les points *s* et *m*, on aura la tangente demandée.

On peut décrire le cercle sur le grand axe et opérer de la même manière; mais auparavant il faut démontrer qu'un cylindre oblique est coupé par un plan suivant une ellipse, et que par suite un cercle se projette suivant une ellipse; c'est ce que nous verrons plus loin.

320. Si dans un cercle C (*fig.* 200) on inscrit un hexagone dont les côtés *de*, *ef* soient respectivement parallèles aux côtés opposés *ab*, *bc*, je dis que les autres côtés *cd* et *af* sont parallèles; en effet, les angles $\widehat{abc}$ et $\widehat{def}$ sont égaux comme ayant les côtés parallèles et dirigés en sens contraires; donc les arcs *afedc* et *fabcd* qu'ils sous-tendent sont égaux; donc leurs suppléments à la circonférence entière *fed* et *abc* sont égaux; si l'on prend les milieux *g* et *h* des arcs restants *af* et *cd*, on aura aussi l'arc *gabh* = l'arc *gfdh*, donc *gh* est un diamètre perpendiculaire aux deux cordes *af* et *cd*, donc *af* et *cd* sont parallèles. Il en résulte que si *dans l'ellipse*, dont le cercle C serait la projection, *on inscrit un hexagone dont deux côtés soient parallèles à leurs opposés, les deux autres côtés seront parallèles entre eux.*

321. Problème 4. *Par un point extérieur mener une tangente à une ellipse donnée par ses axes.* Soient *ab* et *cd* (*fig.* 201) les axes d'une ellipse E et un point *m* par lequel il faut lui mener une tangente. Prenons le plan de l'ellipse pour plan horizontal et le grand axe *ab* pour ligne de terre, sur le petit axe *cd* décrivons un cercle C que nous considérerons comme la base d'un cylindre Δ vertical et de révolution; le plan du cercle restant fixe, supposons que le plan de l'ellipse tourne autour de *cd* jusqu'à ce que l'ellipse soit placée sur le cylindre Δ (nº 287) en E', le point *m* entraîné dans ce mouvement viendra en *m'*, puisqu'il est sur le plan P' qui contient l'ellipse E'; menant de *m'^h* une tangente à E'^h, puis ramenant le point *x'* en *x* par un mouvement en sens contraire, et joignant *xm*, nous aurons la tangente demandée. On construirait de même la tangente parallèle à une droite donnée, etc.... en ramenant toujours les constructions à s'effectuer par rapport au cercle C décrit sur le petit axe (cercle qui est la projection de l'ellipse E'), puis ensuite en reportant les points sur le plan de cette courbe E'.

La même opération graphique fera connaître les points d'intersection d'une droite et d'une ellipse donnée par ses axes ; car, ayant amené l'ellipse donnée dans la position E′ et la droite D en D′, D″ coupera E″ en deux points que l'on ramènera sur le plan horizontal par un mouvement contraire; ils appartiendront à D et seront les points demandés.

Diverses propriétés de la parabole.

322. Les propriétés de l'ellipse qui ne sont pas une conséquence de ce que la courbe est fermée s'appliquent également à la parabole, on peut les faire passer de l'une de ces courbes sur l'autre par la construction suivante : soient un cône de révolution (*s*, B) (*fig.* 202), et P une parabole donnée par un plan sécant parallèle au plan T′ tangent au cône le long de la génératrice *sn*′. En un point quelconque *m* menons la tangente Θ et le plan tangent T le long de la génératrice *sm*; par le point *s* menons une droite D parallèle au plan Θ, elle sera située dans le plan T et par conséquent tout entière hors de la surface conique, et un plan R perpendiculaire au plan tangent T conduit par D n'aura que le sommet *s* de commun avec le cône; si donc par Θ on mène à ce plan R un plan parallèle Q, ce plan Q coupera le cône suivant une ellipse E, qui aura aussi pour tangente Θ. Cela posé, il est évident que si l'on fait passer des plans par le sommet *s* et par une série de cordes de l'ellipse parallèle à Θ, ces plans couperont le plan de la parabole P suivant une série de cordes de cette courbe et toutes parallèles à Θ et le plan passant par le sommet *s* et par le milieu des cordes de l'ellipse passera aussi par les milieux des cordes de la parabole. Donc les diamètres de la parabole sont des droites.

Si par la droite D on construit un second plan tangent à la surface conique, il sera parallèle au plan de la parabole, car le plan T′ tangent le long de *sn*′ et le plan de la parabole P étant parallèles entre eux sont coupés par le plan T suivant deux droites parallèles, mais l'une des intersections est Θ, donc l'autre est parallèle à Θ, et comme elle passe par le sommet *s*, elle n'est autre que D; la génératrice *sn*′ coupe l'ellipse en *m*′ et le plan T′ coupe le plan de l'ellipse E suivant une tangente Θ′ parallèle à D et par conséquent parallèle à Θ; donc *mm*′ est le diamètre de l'ellipse conjugué de la tangente Θ; la génératrice *sn*′ étant parallèle à *pq*, le plan *snn*′ coupe le plan de la parabole P suivant une parallèle à *sn*′ ou *pq*, donc le diamètre de la parabole passant par *m* est parallèle à l'axe *pq*. En menant la tangente Θ par un autre point de la parabole, on arrivera à des conséquences semblables; donc tous les diamètres de la parabole sont parallèles à l'axe infini de cette courbe. Donc la parabole n'a pas de centre, ou, ce qui exprime la même idée, le centre de la parabole est situé à une distance infinie.

Par ce qui précède, on voit de suite que la tangente à l'extrémité d'un diamètre est parallèle aux cordes divisées par ce diamètre en deux parties égales.

Si on mène la tangente Θ au point p, elle sera horizontale, car les plans tangents au cône suivant les génératrices sp et sn' ont leurs traces horizontales parallèles et se coupent par conséquent suivant une horizontale, cette tangente Θ serait donc perpendiculaire à l'axe pq ; dans tout autre cas la tangente fait avec le diamètre conjugué un angle différent d'un droit; donc l'axe de la parabole est le seul diamètre perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales.

On voit de suite : 1° que puisque les diamètres sont infinis, de deux cordes supplémentaires l'une est toujours parallèle à l'axe, et 2° que les tangentes aux extrémités d'une corde se croisent sur le diamètre conjugué de cette corde.

323. De là on conclut que pour trouver l'axe d'une parabole (donnée par son *tracé*), il suffit de mener deux cordes parallèles, d'unir leurs milieux par une droite qui sera un diamètre de la parabole, de mener une corde perpendiculaire à ce diamètre et par le milieu de cette corde une parallèle au premier diamètre, et cette parallèle sera l'axe.

Pour mener la tangente à la parabole en un point m, on peut construire le diamètre D qui passe au point m, ensuite deux autres diamètres D′ et D″ également distants de D, puis unissant les points m' et m'' (en lesquels ces diamètres coupent la parabole) par une corde, elle sera divisée par D en deux parties égales et par conséquent cette corde sera parallèle à la tangente cherchée; la tangente demandée s'obtiendra donc en menant par le point m une parallèle à cette corde.

324. *Dans la parabole la sous-tangente est double de l'abscisse.* En effet, ayant construit (*fig.* 194) la focale P′ de la parabole P et la tangente T au point m, si l'on abaisse l'ordonnée mn, que l'on dérive de a comme centre et du rayon an un cercle qui coupe la focale en s, ce point s sera le sommet d'un cône dont sn est l'axe; élevant la verticale fq, qui coupe sn en r, puis décrivant le cercle C du centre r et du rayon rf, il sera tangent en même temps à l'axe an, à la droite as et à la génératrice sl parallèle à l'axe. Le plan tangent au cône suivant la génératrice sm a pour trace horizontale T et pour trace verticale se'', et comme il est aussi tangent à la sphère engendrée par le cercle C tournant autour de sn et qu'il est par conséquent perpendiculaire au rayon qui passe par le point de contact (lequel point de contact se projette verticalement sur rs), la droite se'' est perpendiculaire sur la droite sr ou parallèle à gpe, donc les triangles ape et ase'' sont semblables et comme $ae = ap$, on a

$$ae'' = as = an\,, \quad \text{d'où} \quad \overline{ne''} = \overline{2an}$$

Mais les triangles égaux nrf et rqs donnent $sq = fn$, donc ns est tangente à la

courbe P′ (n° 302), donc la tangente à la parabole divise en deux parties égales le supplément de l'angle du rayon vecteur et du diamètre, et par conséquent la normale divise en deux parties égales l'angle du rayon vecteur et du diamètre.

Il résulte de là un moyen de construire une parabole dont on connaît l'axe A (*fig.* 203), le sommet a et un point m; car abaissant l'ordonnée mp, prenant $aq=ap$, mq sera tangente à la parabole; donc le diamètre A′ et le rayon vecteur R doivent faire avec mq, ou avec la normale N, des angles égaux; R vient couper l'axe A au foyer f, prenant $as=af$, et menant D perpendiculaire à A, ce sera la directrice; connaissant alors le foyer f et la directrice D, on peut facilement construire la courbe par points, ou par un mouvement continu.

Diverses propriétés de l'hyperbole.

325. Parmi les surfaces coniques en nombre infini sur lesquelles on peut placer une hyperbole donnée, il y en a une dont l'axe est parallèle au plan de la courbe, c'est celle dont le sommet est placé à l'extrémité de l'axe vertical de la focale (n° 306).

Nous considérerons donc une hyperbole sur cette surface conique particulière et nous déduirons les diverses propriétés qui appartiennent à l'hyperbole de celles que nous avons précédemment reconnues appartenir à l'ellipse, en d'autres termes nous ferons passer les propriétés de l'ellipse sur l'hyperbole et de la manière suivante :

1° Soient (*fig.* 204) s le sommet et B la base d'un cône de révolution coupé par un plan P mené parallèlement au plan vertical de projection, la section sera une hyperbole K, rencontrant le plan horizontal en a et b et dont l'un des sommets se projette horizontalement en p^h; pour avoir p^v, nous ramènerons la génératrice G_1 qui contient le sommet p en G'_1 dans le plan méridien M (parallèle au plan vertical de projection), p^h viendra en p'^h; on en conclura p'^v, puis on reviendra de là à p^v.

2° Le plan P étant parallèle aux génératrices G'_1 et G_2, les asymptotes de l'hyperbole K seront les intersections du plan P et des plans tangents T et T_1 menés suivant ces génératrices; or, ces plans sont perpendiculaires au plan vertical, et leurs traces verticales passent par s^v centre de l'hyperbole K^v; donc les asymptotes de l'hyperbole passent par le centre de cette courbe. (L'hyperbole K^v étant identique avec l'hyperbole K, les propriétés de l'une appartiendront à l'autre.)

3° En un point m menons une tangente Θ à l'hyperbole, puis par cette droite faisons passer un plan Q perpendiculaire au plan vertical de projection, il coupera la surface conique suivant une ellipse E passant par m et qui aura la même droite Θ

pour tangente en ce point, mais le grand axe de E^h est sur H^u et parallèle à Θ^h, donc m^h est l'extrémité du petit axe et o^h le centre de la courbe E^h ; donc o^h est le milieu de la droite $c^h d^h$ et par suite o^v ou m^v est le milieu de $c^v d^v$, donc le point de contact divise en deux parties égales la portion de chaque tangente à l'hyperbole comprise entre les asymptotes.

4° Soit une corde C de l'ellipse et parallèle à Θ, elle rencontre cette courbe aux points e et g, et l'on sait que $e^v m^v = m^v g^v$; si par les génératrices G_3 et G_4 qui passent en ces points on conduit un plan, il coupera le plan P suivant une droite A parallèle à Θ et à C, et passant par les points k et l de l'hyperbole où elle est coupée par G_3 et G_4. Cela posé, menant la droite G^v par s^v et m^v elle coupe A^v en r^v, et puisque $e^v m^v = m^v g^v$, on a aussi $k^v r^v = r^v l^v$, donc G^v passe par les milieux de toutes les cordes parallèles à Θ^v ; c'est donc un diamètre de la courbe. Donc les diamètres de l'hyperbole sont des droites qui passent par son centre.

5° Les tangentes aux extrémités d'un diamètre sont parallèles aux cordes qu'il divise en deux parties égales.

6° L'axe transverse est le seul diamètre perpendiculaire à ses cordes conjuguées (les cordes coupant une seule branche de l'hyperbole). Si l'on mène des cordes coupant les deux branches de l'hyperbole, leurs milieux sont encore en ligne droite et l'on obtient ainsi d'autres diamètres, parmi lesquels un seul est perpendiculaire à ses cordes conjuguées, c'est celui qui fait un angle droit avec l'axe transverse.

7° Des diamètres conjugués de l'hyperbole un seul coupe la courbe, l'autre ne la rencontre jamais.

8° Chaque asymptote forme à elle seule un système de deux diamètres conjugués, car l'angle de deux diamètres conjugués diminue indéfiniment à mesure que le point m s'éloigne, et cet angle finit par devenir nul quand ce point est transporté à l'infini sur l'une des branches de l'hyperbole.

9° Les cordes supplémentaires de l'hyperbole sont parallèles à deux diamètres conjugués.

10° Les tangentes aux extrémités d'une corde concourent en un point de son diamètre conjugué.

11° Revenons aux cordes C et A, nous avons $c^v m^v = m^v d^v$, donc $n^v r^v = r^v q^v$, mais $k^v r^v = r^v l^v$, donc $n^v k^v = l^v q^v$. Donc les parties d'une corde interceptées entre l'hyperbole et ses asymptotes sont égales.

326. D'après ce qui précède, lorsqu'une hyperbole est donnée par son tracé :

1° Pour avoir le centre, il suffit de mener deux cordes parallèles et d'unir leurs milieux, puis de mener deux autres cordes parallèles et d'unir leurs milieux, on a ainsi deux diamètres qui se coupent au centre de l'hyperbole.

2° Pour avoir les axes, on construit un diamètre transverse quelconque D, sur

lequel on décrit comme diamètre une circonférence, laquelle coupe l'hyperbole en un second point que l'on unit à chacune des extrémités du diamètre D, et l'on a un système de cordes supplémentaires rectangulaires entre elles et auxquelles les axes sont parallèles.

3° Pour construire la tangente en un point *m* de l'hyperbole, on mène le diamètre D qui passe au point *m*, ensuite une corde C parallèle à ce diamètre, on unit les milieux de ces droites et l'on a un second diamètre auquel la tangente est parallèle. Lorsque les asymptotes sont construites, désignant par *o* le point en lequel elles se coupent (et ce point *o* est le centre de la courbe), on peut par le point *m*, situé sur l'hyperbole, mener une parallèle à l'une des asymptotes, elle rencontre la seconde asymptote en un point *n*, qui doit être un point milieu entre le point *o* et le point *p* en lequel cette seconde asymptote est coupée par la tangente. Il est donc facile de construire le point *p* et par suite la tangente au point *m*.

On peut aussi employer les cordes supplémentaires.

Les mêmes constructions servent à mener une tangente parallèle à une droite donnée, car menant une corde parallèle à la droite donnée et construisant le diamètre conjugué de cette corde, ce diamètre coupe l'hyperbole au point du contact. On voit de suite que ce problème a deux solutions quand la corde ne rencontre qu'une branche de l'hyperbole et qu'il n'a pas de solution quand la corde rencontre les deux branches de l'hyperbole.

4° Lorsqu'on connaît les asymptotes d'une hyperbole et un point *m* de la courbe, on trouve tant d'autres points de la courbe que l'on veut en menant par ce point *m* des droites B, B′, B″, ... coupant les asymptotes et prenant sur chacune de ces droites B un second point *n* dont la distance à une asymptote et comptée sur cette droite B, soit égale à la distance du point *m* à l'autre asymptote.

5° L'hyperbole étant tracée, et connaissant son axe transverse et ses foyers, pour avoir ses asymptotes il faut sur la distance des foyers, comme diamètre, décrire une circonférence de cercle C′, élever au sommet de l'hyperbole des perpendiculaires à l'axe transverse, ces perpendiculaires vont couper la circonférence C′ en des points appartenant aux asymptotes. En effet, choisissant toujours pour le cône de révolution passant par l'hyperbole donnée, celui dont l'axe est parallèle au plan de l'hyperbole, soit *s* (*fig.* 205) le sommet de ce cône; prenons pour plan vertical de projection le plan méridien M perpendiculaire au plan sécant P, de sorte que V^{e} soit parallèle à l'axe du cône, l'asymptote A sera parallèle à la génératrice droite G suivant laquelle le cône est coupé par le plan méridien M; soit C le cercle qui donne le foyer *f*, et concevons au sommet *a* une perpendiculaire à l'axe *ab* de l'hyperbole. Cela posé, si l'on rabat les plans M et P sur le plan vertical en les faisant tourner autour de leurs traces verticales respectives, les droites parallèles G et

A se rabattront suivant des droites parallèles entre elles G' et A' dont la première est tangente au cercle C ; cela posé, les triangles *ops* et *acs* sont égaux comme rectangles en *p* et *c* et ayant un côté égal chacun à chacun, savoir : $op = sc$ et l'angle $\widehat{osp} = \widehat{sac}$; donc $sa = os = cf$, mais $cm' = sa$, donc $cm' = cf$. Donc le point m' est l'intersection de l'asymptote, du cercle décrit du centre *c* avec le rayon *ef*, et de la perpendiculaire menée par le point *a* sur l'axe de l'hyperbole.

327. *Si de divers points de l'hyperbole on mène des parallèles à ses asymptotes, on forme des parallélogrammes qui ont tous même aire, propriété qui est exprimée par l'équation* $xy = constante$. En effet, soit le cône (*s*, B) (*fig.* 206), dont l'axe est parallèle au plan de l'hyperbole K (n° 304), prenons pour plan vertical de projection le plan méridien *sab* parallèle au plan de l'hyperbole, cette courbe se projettera suivant une hyperbole identique K^v (n° 56, 1°) ayant pour asymptotes les génératrices *sa*, *sb* ; si l'on coupe le cône par deux plans perpendiculaires à l'axe, on obtiendra deux cercles C et C' rencontrant l'hyperbole K en des points *m*, *n* et m', n', dont les projections sont les intersections de K^v par C^v et C'^v. Cela posé, on a dans le cercle C, $(nn^v)^2 = cn^v \times dn^v$, et dans le cercle C', $(n'n'^v)^2 = c'n'^v \times d'n'^v$, mais $nn^v = n'n'^v$, donc $cn^v \times dn^v = c'n'^v \times d'n'^v$, ou $cn^v : c'n'^v :: d'n'^v : dn^v$, mais si l'on mène n^ve et n'^ve parallèles à *sa*, on aura les quatre triangles *csd*, $c's'd'$, dn^ve, $d'n'^ve'$ qui seront semblables, et l'on en conclura les proportions :

$$cn^v : se :: n^vd : de :: n'^vd' : d'e' :: c'n'^v : se'$$

donc

$$cn^v : c'n'^v :: se : se' :: d'n'^v : dn^v :: e'n'^v : en^v$$

ou

$$se : se' :: e'n'^v : en^v \qquad \text{d'où} \qquad se \times en^v = se' \times e'n'^v$$

ce qui conduit à l'équation $xy = $ constante.

328. On conclut de ce qui précède que si l'on a plusieurs paraboles P, P', P'',..... etc. (*fig.* 207), les abscisses des points ayant même ordonnée sont dans un rapport constant. C'est-à-dire que si, après avoir placé toutes les paraboles de manière à ce qu'elles aient même axe A et même sommet *a* (ce qui est évidemment toujours possible), l'on mène des droites B, C, etc...... parallèles à l'axe A, lesquelles couperont les paraboles en les points *m*, m', m'',..... et *n*, n', n'',..... etc., et que l'on abaisse les ordonnées de ces points, on aura

$$ap : ap' : ap'' : \ldots\ldots :: aq : aq' : aq'' : \ldots\ldots$$

En effet, toute parabole pouvant être placée sur un cône quelconque de révo-

lution (n° 307, 2°) on peut concevoir les paraboles P, P′, P″, ... comme obtenues par des sections parallèles faites dans un même cône de révolution (*fig.* 208); si l'on coupe ensuite le cône par des plans parallèles au plan méridien *scb*, ils détermineront les hyperboles B, C,..... qui rencontrent les paraboles en des points *m*, *m′*,..... *n*, *n′*,... . en abaissant de ces points des perpendiculaires sur les axes A, A′,..... elles seront en même temps perpendiculaires au plan méridien *csb*, par conséquent les pieds *p*, *q*,..... *p′*, *q′*,..... etc.,..... seront sur les projections des hyperboles B, C,..... dont *sc* et *sb* sont les asymptotes, on aura donc (n° 327)

$$sa \times ap = sa' \times a'p' = \text{etc.....} \qquad \text{et} \qquad sa \times aq = sa' \times a'q' = \text{etc.}$$

Si l'on divise membre à membre ces deux séries d'égalités, on aura

$$\frac{ap}{aq} = \frac{a'p'}{a'q'} = \text{etc.....} \qquad \text{ou} \qquad ap : aq :: a'p' : a'q' :: \text{etc.....}$$

D'autres hyperboles donneraient des suites semblables liées entre elles par des antécédents communs, on aurait donc enfin

$$ap : a'p' : a''p'' : \ldots\ldots :: aq : a'q' : a''q'' : \ldots\ldots$$

Il est facile de reconnaître que la figure 207 nous offre la projection de la figure 208 sur un plan perpendiculaire à la génératrice *sb*, et qui est par conséquent perpendiculaire au plan méridien *csb* et aux plans des hyperboles, de sorte que ces courbes se projettent suivant des droites.

Les asymptotes de l'hyperbole se croisent en son centre.

328 *bis*. Nous avons précédemment démontré que les asymptotes de l'hyperbole passaient par le centre de cette courbe, et cela en plaçant cette courbe sur le cône de révolution qui avait son axe de rotation parallèle au plan de l'hyperbole; démontrons maintenant que, quel que soit le cône de révolution sur lequel l'hyperbole se trouve placée, les asymptotes se croisent toujours au centre de la courbe.

Mais au préalable, démontrons que 1° l'on peut toujours mener à l'ellipse deux tangentes parallèles à une droite donnée, quelle que soit la direction de cette droite dans le plan de la courbe;

2° On ne peut mener à la parabole qu'une tangente parallèle à une droite donnée, quelle que soit la direction de cette droite dans le plan de la courbe;

3° Que l'on peut mener à l'hyperbole deux tangentes parallèles à une droite donnée, mais que le problème n'est possible qu'autant que la droite affecte certaines directions dans le plan de la courbe.

1° *Solution du problème pour l'ellipse.*

Soit donné un cône de révolution Δ dont l'axe A est vertical, ayant le point *s* pour sommet et le cercle B pour base ou trace horizontale; coupons ce cône par un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection et de manière à avoir pour section une ellipse E, plaçons dans le plan P une droite D quelconque, D^v ne sera autre que V^p et D^h sera quelconque (c'est-à-dire qu'elle aura une position arbitraire par rapport à la ligne de terre LT).

Cela posé (*fig.* 208 *bis*) :

Pour construire à la section E une tangente T parallèle à la droite D, il faudra mener par le sommet *s* du cône Δ une droite K parallèle à D, et dès lors K sera parallèle au plan P; on aura donc K^v parallèle à D^v ou V^p et passant par le point s^v et K^h parallèle à D^h et passant par le point s^h. Comme le plan P coupe toutes les génératrices du cône Δ (puisque la section E est une ellipse), la droite K sera extérieure au cône et telle que l'on pourra mener par elle deux plans tangents Θ et Θ' au cône Δ.

Le problème a donc deux solutions, puisque, quelle que soit la direction de la droite D et par suite celle de la droite K, cette droite K étant toujours extérieure au cône Δ, les deux plans tangents existeront toujours.

Et les tangentes demandées T et T' seront données par l'intersection du plan P avec les deux plans tangents Θ et Θ'.

2° *Solution du problème pour la parabole.*

Soit donné un cône de révolution Δ ayant son axe A perpendiculaire au plan horizontal de projection, ayant un point *s* pour sommet et pour base ou trace horizontale un cercle B.

Coupons ce cône par un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection et de manière à avoir pour section une parabole E. Le plan méridien M parallèle au plan vertical de projection coupera le cône Δ suivant deux génératrices droites G et G_1 dont l'une G sera parallèle au plan P. Ainsi V^p sera parallèle à G^v et H^p sera perpendiculaire à G^h.

Cela posé (*fig.* 208 *ter*) :

Si l'on place sur le plan P une droite D quelconque, on aura D^h quelconque et D^v qui ne sera autre que V^p, et si l'on mène par le sommet *s* une droite K parallèle à la droite D on aura K^v qui ne sera autre que G^v et K^h qui, passant par le point s^h, sera parallèle à D^h.

Or, par la droite K on pourra mener deux plans tangents au cône Δ, savoir : Θ

et Θ′, mais l'un d'eux Θ, par exemple, sera tangent au cône Δ suivant la droite G′ et sera dès lors parallèle au plan P, et cela aura lieu quelle que soit la direction de la droite D dans le plan P, le plan Θ sera donc toujours le même; il n'y aura que le plan Θ′ qui variera de position dans l'espace avec les changements de position de la droite D sur le plan P.

Par conséquent, des deux tangentes à la parabole E parallèles à la droite D, l'une existe toujours, c'est celle qui est l'intersection du plan P et du plan tangent Θ′, l'autre est tout entière située à l'infini, puisqu'elle est l'intersection de deux plans parallèles P et Θ.

3° *Solution du problème pour l'hyperbole.*

Soit donné un cône de révolution Δ ayant son axe A perpendiculaire au plan horizontal de projection et ayant le point *s* pour sommet et le cercle B pour base sur le plan horizontal.

Coupons les deux nappes de ce cône par un plan P, nous aurons pour section une hyperbole E; si nous prenons le plan P perpendiculaire au plan vertical de projection, une droite D située dans ce plan P (et y ayant une direction arbitraire) aura sa projection D^h quelconque, et sa projection D^v ne sera autre que V^p: si par le sommet *s* on mène une droite K parallèle à D, la droite K sera dans un plan Q parallèle au plan P; or, le plan Q coupera le cône Δ suivant deux génératrices droites G et G′ parallèles au plan P, et les plans R et R′, tangents au cône Δ, l'un suivant G et l'autre suivant G′, couperont le plan P suivant deux droites X et X′ qui seront les asymptotes de l'hyperbole E.

Cela posé (*fig.* 208 *quater*) :

Il pourra arriver trois cas, ou que 1° la droite K soit située dans l'intérieur du cône Δ, et alors les plans Θ et Θ′ menés par la droite K tangentiellement au cône Δ ne pourront exister, et le problème sera impossible; ou que 2° la droite K soit située hors du cône Δ, et alors les deux plans tangents Θ et Θ′ existeront, et le problème aura deux solutions; ou que 3° la droite K soit située sur le cône Δ, auquel cas cette droite K ne sera autre que la génératrice G, ou ne sera autre que la génératrice G′, et dès lors il n'y aura qu'une seule solution.

On voit de suite que si par le point *x* en lequel se coupent les asymptotes X et X′ on mène une droite D′ parallèle à la droite D, il pourra arriver trois cas : ou 1° la droite D′ coupera l'hyperbole E, et alors le problème sera impossible; ou 2° la droite D′ se confondra avec X ou X′, et alors le problème n'aura qu'une solution; ou 3° la droite D′ ne coupera pas l'hyperbole E, et alors le problème aura deux solutions.

328 *ter*. Démontrons maintenant que, quel que soit le cône de révolution sur lequel se trouve placée une hyperbole E (et par conséquent quelle que soit la di-

rection du plan de la courbe par rapport à l'axe du cône), les deux asymptotes se croisent toujours au centre de la courbe E.

Soit donné un cône de révolution Δ, dont l'axe A se trouve dans le plan vertical de projection et perpendiculaire à la ligne de terre, coupons les deux nappes de ce cône (*fig.* 208, *a*) par un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection.

L'axe transverse de l'hyperbole sera en *ad* sur le plan vertical, et le centre de l'hyperbole sera en *r* milieu de *ad;* unissons le point *r* et le sommet *s* par une droite K, puis menons par le point *a* un plan Q perpendiculaire au plan vertical de projection et parallèlement à la droite K, on aura dès lors V^q parallèle à K et H^q perpendiculaire à LT.

Le plan Q coupera le cône Δ suivant une ellipse ε, et si nous construisons à cette ellipse ε deux tangentes T et T′ parallèles à K, la droite qui unira les points *m* et *m′* contact de ε avec T et T′ sera un diamètre qui passera par le centre *o* de la courbe ε.

Or, il est évident que les droites T et T′ seront parallèles au plan vertical de projection, puisque K est parallèle à ce plan, par conséquent les points *m* et *m′* se projetteront sur le plan vertical au point *o* milieu de *ab*, car *ab* est le grand axe de la courbe ε.

Les plans Θ et Θ′ tangents au cône Δ et menés par la droite K et qui, par leur intersection avec le plan Q, déterminent les tangentes T et T′, auront pour génératrices de contact avec le cône Δ, les droites G et G′ qui se projetteront verticalement suivant la droite $\overline{so}$.

Démontrons maintenant, qu'en vertu des constructions précédentes, la droite $\overline{so}$ est parallèle à V^q.

En effet :

La droite *ab* a été menée parallèle à K, et la droite K passe par le milieu *r* de *ad*, donc l'on a : $\overline{ds}=\overline{sb}$.

Le point *o* est le milieu de *ab*, donc l'on a : $\overline{oa}=\overline{ob}$; donc *so* est parallèle à $\overline{ad}$, donc le quadrilatère *rsoa* est un parallélogramme.

De ce qui précède on doit conclure que le plan des deux droites G et G′ est parallèle au plan P; les plans tangents Θ et Θ′ coupent donc le plan P suivant les asymptotes X et X′ de l'hyperbole E; mais les plans Θ et Θ′ passent tous deux par la droite K, donc X et X′ se croisent au point *r* centre de l'hyperbole E.

Dans les sections coniques la tangente fait des angles égaux avec les rayons vecteurs.

328 *quater*. On démontre facilement, ainsi qu'on l'a vu précédemment (n° 324), que la normale en un point d'une parabole divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs en ce point, et nous avons démontré l'existence de cette propriété dont jouit la parabole, en nous servant de sa *focale*. Plus loin, nous démontrerons la même propriété sans recourir à la *focale*. Toutefois, voyons si la même propriété subsiste pour l'ellipse et l'hyperbole; voyons s'il ne nous est pas possible de faire passer la propriété de la parabole et sur l'ellipse et sur l'hyperbole.

Concevons un cône de révolution Δ ayant son sommet en un point *s*, et pour axe une droite A et pour base un cercle C (*fig.* 208 *b*).

Coupons ce cône Δ par un plan P donnant pour section une ellipse E.

Désignons par *f* et *f* les foyers de cette courbe E.

Prenons un point *m* sur la courbe E; faisons passer par ce point *m* une génératrice G du cône Δ, laquelle percera le cercle C en un point *p*.

Désignons par Θ le plan tangent au cône Δ le long de la génératrice G.

Désignons par X le plan méridien passant par la génératrice G et l'axe A du cône Δ.

Si du foyer *f* de l'ellipse E, on mène une perpendiculaire N au plan P de cette courbe, cette normale coupera l'axe A en un point *q* qui sera le centre de la sphère Σ tangente au plan P en le point *f* et au cône Δ suivant un *parallèle* ∂ qui passera par le point *n* de la génératrice G, point que l'on obtiendra en abaissant du centre *q* une perpendiculaire R sur cette droite G.

Ainsi, on a $\overline{fq} = \overline{qn}$, et la droite $\overline{qn}$ ou R est perpendiculaire au plan tangent Θ.

Si par le point *m* de l'ellipse E et par la normale $\overline{fq}$ ou N, on fait passer un plan Y, ce plan coupera le plan X suivant une droite L, passant par les points *m* et *q*, et cette droite L jouira de la propriété suivante, savoir : si d'un point quelconque de la droite L, on abaisse deux perpendiculaires sur les plans P et Θ, ces perpendiculaires seront égales entre elles, et de plus leurs pieds sur les plans P et Θ seront situés, pour le plan Θ sur la droite G, et sur le plan P sur la droite $\overline{fm}$.

Cela posé :

On pourra toujours construire une infinité de cônes de révolution tangents au cône Δ suivant la génératrice G, et dont les axes seront situés dans le plan X.

Les plans des cercles ou *parallèles* de ces divers cônes de révolution étant assujettis à passer par la tangente θ au point *p* du cercle C seront tous perpendiculaires au plan X, et leurs centres seront situés sur une demi-circonférence 6 tracée dans

le plan X et sur la partie $\overline{so}$ de l'axe A du cône Δ comprise entre le sommet s de ce cône Δ et le centre o de la base C.

Cela posé :

Si par le sommet s du cône Δ on mène une droite F_1 parallèle au rayon vecteur $\overline{fm}$ de l'ellipse E ; et si par cette droite F_1 on mène un plan P_1 parallèle au plan P de l'ellipse E ; et si par le point s on mène dans le plan X une droite L_1 parallèle à la droite L, cette droite L_1 jouira de la même propriété par rapport aux plans P_1 et Θ, dont jouissait la droite L par rapport aux plans P et Θ.

Cela posé :

Si du second foyer f' de l'ellipse E, on mène une droite N′ perpendiculaire au plan P, elle coupera l'axe A du cône Δ en un point q', et si l'on abaisse de ce point q' une perpendiculaire R′ sur le plan Θ, cette droite R′ percera le plan Θ en un point n' situé sur la droite G, et l'on aura en q' le centre de la sphère Σ′ tangente au plan P en le point f' et au cône Δ suivant un cercle ou *parallèle* δ′ passant par le point n', et l'on aura : $\overline{q'f'} = \overline{q'n'}$.

Cela posé :

Si l'on unit les points m et q' par une droite D, elle coupera la droite L_1 en un point q_1 ; et si de ce point q_1 on mène deux perpendiculaires, l'une N_1 au plan P et l'autre R_1 au plan Θ, les pieds de ces perpendiculaires seront sur le plan P en un point f_1 et sur le plan Θ en un point n_1 ; et ces points f_1 et n_1 seront évidemment situés, savoir : le point n_1 sur la génératrice G et le point f_1 sur la droite mf' prolongée.

Cela posé :

La droite L_1 pourra être considérée comme l'axe d'un cône de révolution Δ_1 ayant le point s pour sommet et pour génératrices droites les droites F_1 et G, et pour plans tangents les plans P_1 tangent suivant la droite F_1 et Θ tangent suivant la droite G.

Or, comme la droite F_1 est parallèle au plan P, puisqu'elle est parallèle à la droite $\overline{mf}$ de ce plan, il s'ensuit que le plan P coupera le cône Δ_1 suivant une parabole γ passant par le point m et ayant même tangente en ce point m que l'ellipse E.

Et si l'on mène par l'axe L_1 du cône Δ_1 et par sa génératrice F_1 un plan Y_1 (lequel, en vertu de ce qui précède, sera parallèle au plan Y), ce plan Y_1 coupera le plan P suivant une droite D parallèle à la droite F_1 et à la droite $\overline{mf}$, et cette droite D sera l'axe infini de la parabole γ ; cette droite D passera donc par le foyer de cette parabole γ.

Cela posé :

On sait que pour déterminer le foyer de la parabole γ il faut chercher sur l'axe

L_1 du cône Δ_1 un point tel que ses distances au plan P et à la droite G (génératrice de contact des deux cônes Δ et Δ_1) soient égales entre elles.

Or, nous avons vu précédemment que le point q_1 était précisément ce point, et de plus il est facile de voir que le point f_1 est situé à l'intersection des deux droites D et mf' prolongée. Ce point f_1 sera donc le foyer de la parabole γ.

Cela posé :

La parabole γ ayant son foyer f_1 situé sur le rayon vecteur $\overline{mf'}$ de l'ellipse E, et ayant son axe infini D parallèle au second rayon vecteur $\overline{mf}$ de cette ellipse E et étant tangente au point m à cette ellipse E, il s'ensuit que les droites $\overline{mf}$ et $\overline{mf'}$ sont aussi les rayons vecteurs de cette parabole γ, et sa normale (qui sera en même temps celle de l'ellipse E), divisant en deux parties égales l'angle $\widehat{mf, mf'}$ de ses rayons vecteurs, il se trouve démontré que : pour un point quelconque d'une *ellipse* sa normale divise aussi en deux parties égales l'angle de ses rayons vecteurs en ce point.

La même démonstration s'appliquerait mot pour mot à l'*hyperbole*.

328 *quint.* Nous avons vu ci-dessus que l'on pouvait toujours construire une parabole P tangente en un point m d'une ellipse E ou d'une hyperbole H, cette parabole étant telle que son axe infini serait parallèle à l'un des rayons vecteurs de la courbe E ou H et passant par le point m, et que son foyer serait situé sur l'autre rayon vecteur passant par le même point m.

Démontrons maintenant que pour l'ellipse E (*fig.* 208 *c*) toutes les paraboles tangentes en m et ayant chacune leur foyer f_1 sur le rayon vecteur $\overline{mf}$, ne pourront provenir de l'intersection d'un cône de révolution par le plan de l'ellipse E donnée, qu'autant que ce foyer f_1 sera au delà du foyer f de l'ellipse par rapport au point m.

En effet :

L'hyperbole (H, H') focale de l'ellipse donnée E se projette sur le plan de cette ellipse en les deux portions de droites indéfinies $\overline{fb}$ et $\overline{f'a}$ (marquées par un *trait fort* sur la figure).

Le cône de révolution qui sera coupé par le plan de l'ellipse E suivant une parabole P tangente en m à cette ellipse E devra donc avoir son sommet z situé sur la focale (H, H'), et par conséquent z^h sera sur la droite H^h.

Il est donc dès lors évident que le foyer f de l'ellipse E sera le dernier point qui, situé sur le rayon vecteur $\overline{mf}$, pourra être le foyer de la parabole tangente en m à l'ellipse E.

On aura deux séries de paraboles tangentes en m à l'ellipse E, la première série comprendra les paraboles P ayant leurs foyers situés sur le rayon vecteur mf, la

seconde série comprendra les paraboles P_1 ayant leurs foyers situés sur le rayon vecteur mf', ainsi que l'indique la figure.

Démontrons maintenant que pour l'hyperbole les foyers des paraboles tangentes en un point m de cette courbe, seront situés entre le point m et le foyer f de l'hyperbole et sur le rayon vecteur $\overline{mf}$, ou entre le point m et le foyer f' de l'hyperbole et sur le rayon vecteur $\overline{mf'}$.

Et en effet (*fig.* 208 *d*) :

La focale de l'hyperbole H est une ellipse E qui se projette sur le plan de cette hyperbole suivant la droite $\overline{ff'}$, le sommet z du cône de révolution qui doit être coupé par le plan de l'hyperbole H suivant une parabole tangente en m à cette courbe H, devra donc être situé sur la focale E, et par suite z^h sera sur la droite $\overline{ff'}$.

La figure démontre que le foyer f_1 de la parabole P tangente en m doit être situé sur le rayon vecteur mf et entre les points m et f.

On aurait encore comme pour l'ellipse deux séries de paraboles tangentes au point m, les unes ayant leurs foyers situés sur le rayon vecteur mf et leurs axes infinis parallèles entre eux et au second rayon vecteur mf' ; les autres ayant leurs foyers situés sur le rayon vecteur mf' et leurs axes infinis parallèles entre eux et au premier rayon vecteur mf.

Théorème. 328 *sexto. La tangente en un point d'une section conique fait des angles égaux avec les rayons vecteurs passant par ce point.*

Dans ce qui précède, nous avons démontré la propriété dont jouit toute section conique, savoir *que sa tangente en un point* (et par suite que sa normale en ce point) *fait des angles égaux avec les deux rayons vecteurs passant par ce point*, et cela, en nous servant de la *focale* de la section conique (n° 328 *quater*) ; maintenant démontrons directement cette propriété remarquable, et ainsi, sans avoir besoin de recourir à la *focale*.

Soit donné un cône de révolution Σ (*fig.* 208 x) ayant le point s pour sommet, la droite A pour axe et coupée par un plan méridien M suivant les deux génératrices droites G et G'. Coupons ce cône Σ par un plan P suivant une ellipse E et soit ab son grand axe ; construisant deux sphères, l'une S tangente au plan P en le point f et au cône Σ suivant le cercle ou *parallèle* δ et l'autre S' tangente au plan P en le point f' et au cône Σ suivant le cercle ou *parallèle* δ'.

Cela posé :

Nous savons que les points f et f' situés sur le grand axe ab sont les foyers de l'ellipse de section E, et que si nous considérons sur cette ellipse un point m (quelconque) la génératrice droite G_1 du cône Σ passant par ce point m touche la sphère S en un point p situé sur le *parallèle* δ et la sphère S' en un point p' situé sur le *parallèle* δ'.

Nous savons encore que l'on a $\overline{mp}=\overline{mf}$ et $\overline{mp'}=\overline{mf'}$, car les droites mp et mf, mp' et mf', sont des tangentes issues d'un même point extérieur, les premières à la sphère S et les secondes à la sphère S'.

Cela posé :

Menons le plan Θ tangent au cône Σ suivant la génératrice G_1, ce plan Θ coupera le plan P suivant une droite θ tangente en m à l'ellipse E et cette droite θ coupera le grand axe ab (situé dans le plan M) en un point q.

Abaissons du point f une perpendiculaire sur θ et la coupant au point d, joignons les points p et d par une droite pd, cette droite pd sera perpendiculaire à θ. La droite fd sera dans le plan P et la droite pd sera dans le plan Θ.

Les deux triangles pmd et fmd seront égaux et rectangles en d.

Si du point f' on abaisse une perpendiculaire sur θ et la coupant au point d' et si l'on joint les points p' et d' par une droite $p'd'$, cette droite $p'd'$ sera perpendiculaire sur θ.

La droite $f'd'$ sera dans le plan P et la droite $p'd'$ sera dans le plan Θ.

Les deux triangles $p'md'$ et $f'md'$ seront égaux et rectangles en d'.

Cela posé :

Il est évident par la figure que les angles $\widehat{pmd}$ et $\widehat{p'md'}$ (opposés par le sommet et donnés par les droites G_1 et θ situées dans le plan tangent Θ) sont égaux ; dès lors les angles $\widehat{fmd}$ et $\widehat{f'md'}$ sont égaux. Donc, etc.

Il est évident que l'on démontrerait de la même manière que la propriété subsiste pour l'hyperbole, puisque l'hyperbole a deux foyers et que l'on aurait encore à considérer deux sphères S et S' tangentes en même temps et au cône de révolution Σ et au plan sécant P.

Mais pour la parabole l'un des foyers est transporté à l'infini, et dès lors il n'existe réellement qu'un seul foyer et une seule sphère tangente à la fois et au cône de révolution Σ et au plan sécant P.

Soit donné un cône de révolution Σ, ayant le point s pour sommet et la droite A pour axe (*fig.* 208 y), et coupons ce cône d'abord par un plan méridien M suivant deux génératrices droites opposées G et G_1, et ensuite par un plan P perpendiculaire au plan M et parallèle à la droite G ; la section sera une parabole E.

Imaginons la sphère S tangente au cône Σ suivant un cercle ou *parallèle* δ et au plan P en un point f qui sera le *foyer* de la parabole de section E.

Cela posé :

Prenons un point m quelconque sur la courbe E, et traçons la génératrice droite

G (du cône Σ) passant par ce point m, elle coupera le *parallèle* δ en un point p, et nous savons que l'on a :

$$\overline{mp} = \overline{mf}.$$

Menons le plan Θ tangent au cône Σ suivant la génératrice G_1, ce plan Θ coupera le plan P suivant une droite θ qui sera tangente en m à la parabole E et cette tangente θ coupera l'axe infini ab de la parabole en un point q.

Joignons les points p et q par une droite pq.

Abaissons du point f une perpendiculaire sur la droite θ et la coupant au point d.

Joignons les points p et d par une droite pd.

La droite fd sera dans le plan P, et la droite pd sera dans le plan Θ.

Les deux triangles pmd et fmd (tous deux rectangles en d) seront égaux, puisque l'on a : $\overline{pm} = \overline{fm}$, les deux droites pm et fm étant égales comme tangentes à une même sphère et issues d'un même point extérieur.

Par suite les deux triangles pmq et fmq sont égaux.

Cela posé :

Menons par le point m, d'abord une droite mr qui, située dans le plan sécant P, soit parallèle à l'axe infini ab de la parabole E ; ensuite une droite mr' qui, située dans le plan tangent Θ, soit parallèle à pq.

Si nous faisons tourner le plan Θ autour de la tangente θ comme charnière, pour le rabattre sur le plan P, le point p viendra se superposer sur le point f, et dès lors les droites pq et fq, mr' et mr se superposeront.

Or pour le point m les rayons vecteurs de la parabole E sont précisément mf et mr, puisque f est le foyer et que la droite mr est parallèle à l'axe infini ab, de la parabole E.

Si donc l'on démontre que les droites pq et pm sont égales entre elles, on aura démontré que le triangle fmq est isocèle, et l'on aura dès lors démontré que les angles $\widehat{fmq}$ et $\widehat{fqm}$ sont égaux et par suite que les angles $\widehat{fmq}$ et $\widehat{qmr}$ sont aussi égaux ; ou *vice versâ*, si l'on démontre que les angles $\widehat{fqm}$ et $\widehat{fmq}$ sont égaux on aura démontré que le triangle fmq est isocèle. Or pour démontrer qu'en effet $\overline{pq} = \overline{pm}$, concevons un plan T tangent au cône Σ suivant la génératrice G. Ce plan T sera parallèle au plan sécant P, dès lors il coupera le plan Θ (tangent au cône Σ tout le long de la génératrice G_1) suivant une droite $\overline{sx}$ parallèle à la tangente θ.

Les angles $\widehat{xsm}$ et $\widehat{smq}$ seront donc égaux et aussi les angles $\widehat{Gsx}$ et $\widehat{fqm}$.

Mais le plan Δ du *parallèle* δ coupe le plan T suivant une tangente ξ à ce cercle δ et au point r en lequel ce plan Δ coupe la génératrice droite G, et ce même plan

Δ coupe la génératrice G_1 au point p et le plan Θ suivant une droite ξ' tangente en p au cercle δ; or il est évident que ces deux tangentes ξ et ξ' vont se couper en un point k situé sur la droite $\overline{sx}$; et que l'on aura : $\overline{kr}=\overline{kp}$.

Les deux triangles srk et skp seront égaux et dès lors les angles $\widehat{rsk}$ et $\widehat{ksp}$ sont égaux.

On a donc :

$$\widehat{rsk}=\widehat{ksp}=\widehat{smq}=\widehat{fmq}$$

et

$$\widehat{rsk}=\widehat{fqm}$$

donc

$$\widehat{fmq}=\widehat{fqm}$$

donc, le triangle fmq est isocèle, donc $\overline{fm}=\overline{fq}$.
Donc, etc.

Des sections coniques considérées comme le LIEU *des points également distants d'un point fixe et d'un cercle.*

328 *septi.* I. Étant donnés une ellipse E et ses foyers f et f' (*fig.* 208. *e*), si du foyer f' comme centre et avec un rayon égal à R on décrit un cercle C'; si d'un point m quelconque de l'ellipse on mène les deux rayons vecteurs mf et mf' et qu'on prolonge le rayon vecteur mf' jusqu'au cercle C', on aura les deux points n' et q'.

Cela posé, désignant par A le grand axe de l'ellipse E, on aura :

$$mf+mf'=A$$

d'où

$$mf=A-mf'$$

et

$$mn'=R-mf'$$

et

$$mq'=R+mf'$$

d'où l'on déduit :

$$1^\circ \qquad mn'-mf=R-A$$

et

$$2^\circ \qquad mq'+mf=R+A$$

Si $R = A$, on aura :

$$1^\circ \qquad mn' = mf$$

et

$$2^\circ \qquad mq' + mf = 2A$$

On peut donc énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. Étant donnés un cercle C′ ayant pour centre un point f' et un rayon égal à A, et un point f situé dans l'*intérieur* au cercle C′, le *lieu* des points également distants du cercle C′ et du point fixe f sera une ellipse E ayant les points f et f' pour foyers et son grand axe égal au rayon A du cercle C′.

Ce théorème est pour l'ellipse l'analogue de celui qui existe pour la parabole, savoir : que, ***un point de la parabole est également distant du foyer et de la directrice droite.***

Théorème 2. Étant donnés un cercle C′ ayant pour centre un point f' et un rayon égal à A, et un point f *intérieur* au cercle C′, le *lieu* des points dont la *différence* des distances au cercle C′ et au point fixe f sera constante et égale au diamètre 2A du cercle C′, sera une ellipse E dont les points f et f' seront les foyers et dont le grand axe sera agal au rayon A du cercle C′.

II. Étant donnés une ellipse E et ses foyers f et f', si de chacun des foyers comme centre et avec des rayons R et R′, on trace les cercles C et C′ (*fig.* 208. *e*) et que par un point m quelconque on conçoive les rayons vecteurs mf et mf', lesquels prolongés seront tels que 1° le rayon mf coupera le cercle C en les points h et p et le cercle C′ en les points h' et p'; et 2° le rayon mf' coupera le cercle C en les points n et q et le cercle C′ en les points n' et q'.

On aura :

$$\begin{aligned} mn' &= R' - mf' \\ mq' &= R' + mf' \\ mh &= R - mf \\ mp &= R + mf \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad mn' + mh = R + R' - (mf + mf') = R + R' - A = \text{constante} \\ &2^\circ \quad mq' + mp = R + R' + (mf + mf') = R + R' + A = \text{constante} \\ &3^\circ \quad mn' + mq' = 2R' \\ &4^\circ \quad mh + mp = 2R \end{aligned}$$

Si $R = R' = A$, on aura :

$$\begin{aligned} mn' + mh &= A \\ mq' + mp &= 3A \\ mn' + mq' &= mh + mp = 2A \end{aligned}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si de chacun des foyers d'une ellipse, comme centre, et avec un rayon égal au grand axe de cette ellipse, on décrit un cercle, la somme des distances d'un point quelconque de l'ellipse aux deux cercles décrits sera constante.

Et cette somme sera encore constante lorsque les rayons des cercles seront inégaux entre eux et plus grands ou plus petits que le grand axe de l'ellipse.

Et lorsque ces rayons sont nuls, ou en d'autres termes lorsqu'ils ont une longueur égale à *zéro*, on retombe sur la propriété connue des foyers, savoir : *que la somme des rayons vecteurs est constante et égale au grand axe de l'ellipse* (*).

328 *octavo*. I. Étant donnés une hyperbole H (*fig*. 208. *h*) et ses deux foyers f et f', si du foyer f' comme centre et avec un rayon égal à R on décrit un cercle C'; si d'un point m quelconque pris sur la branche qui a pour foyer le point f' on mène les deux rayons vecteurs mf et mf' et qu'on prolonge le rayon vecteur mf' jusqu'au cercle C', on aura les deux points n' et q'.

Cela posé, désignant la longueur de l'axe transverse de l'hyperbole par A, on aura :

$$nf - mf' = A$$

d'où

$$mf = mf' + A$$

et

$$mn' = R - mf'$$

et

$$mq' = R + mf'$$

d'où l'on déduit :

$$1^{\circ} \qquad mn' + mf = R + A$$

et

$$2^{\circ} \qquad mq' - mf = R - A$$

Si R = A, on aura :

$$1^{\circ} \qquad mn' + mf = 2A$$

et

$$2^{\circ} \qquad mq' = mf$$

On peut donc énoncer les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. Étant donnés un cercle C' ayant pour centre un point f' et un rayon égal à A, et un point f *extérieur* au cercle C', le *lieu* des points dont la *somme* des distances au cercle C' et au point fixe f sera constante et égale au diamètre 2A du cercle C', sera une hyperbole H dont les points f et f' seront les foyers et dont l'axe transverse sera égal au rayon A du cercle C'.

(*) On a fondé sur cette propriété la construction d'un compas à ellipse.

Théorème 2. Étant donnés un cercle C′ ayant pour centre un point f' et un rayon égal à A, et un point f situé en *dehors* du cercle C′, le *lieu* des points également distants du cercle C′ et du point fixe f, sera une hyperbole H ayant les points f et f' pour foyers et son axe transverse égal au rayon A du cercle C′.

Ce théorème est pour l'hyperbole l'analogue de celui qui existe pour la parabole, savoir : que tout point de la parabole est également distant du foyer et de la directrice droite. Pour la parabole, la directrice droite est un cercle de rayon infini, puisque son centre n'est autre que le second foyer qui est situé à l'infini (*).

II. Étant donnés une hyperbole H et ses deux foyers f et f', si de chacun des foyers comme centre et avec des rayons R et R′ on trace les cercles C et C′ (*fig.* 208. *i*), et que pour un point m quelconque on conçoive les rayons vecteurs mf et mf', lesquels prolongés seront tels que le rayon mf coupera le cercle C aux points n et p et que le rayon mf' coupera le cercle C′ aux points n' et p', on aura :

$$mn' = R' - mf'$$
$$mp' = R' + mf'$$
$$mn = mf - R$$
$$mp = mf + R$$

d'où l'on tire :

1° $\quad mn' + mp' = 2R'$

2° $\quad mn' + mn = R' - R + (mf - mf') = R' - R + A = \text{constante}$

3° $\quad mp - mn = 2R$

4° $\quad mp' - mn = R' + R - A = \text{constante}$

Si $R = R' = A$, on aura :

$$mn' + mp' = mp - mn = 2A$$
$$mp' - mn = A$$
$$mn' + mn = A$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si de chacun des foyers d'une hyperbole comme centre, et avec un rayon égal à l'axe transverse de cette hyperbole, on décrit un cercle, la différence des distances d'un point quelconque de l'hyperbole aux deux cercles décrits sera constante et égale à l'axe transverse lorsque les foyers seront l'un et l'autre entre le point et les cercles, et l'on aura au contraire la somme des distances égale à l'axe transverse lorsque l'un des foyers seulement sera entre le point et le cercle correspondant, l'autre foyer étant au delà du point par rapport à son cercle.

(*) Sur cette propriété de l'hyperbole on a fondé la construction d'un compas destiné à tracer cette courbe.

Si l'on suppose que les rayons des cercles sont nuls, alors on retombe sur la propriété connue des foyers, savoir : que la différence des rayons vecteurs est égale à l'axe transverse de l'hyperbole (*).

De la courbe lieu des perpendiculaires abaissées d'un foyer sur les tangentes à une section conique.

328 *nono.* 1° *Si chacun des foyers d'une ellipse on abaisse une perpendiculaire sur chacune des tangentes à cette courbe, le lieu des pieds de ces perpendiculaires sur les droites tangentes sera un cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.*

Soient donnés une ellipse E ayant son centre en o et pour grand axe $\overline{aa'}$ et pour petit axe $\overline{bb'}$ (*fig.* 208 *k*) et ses foyers en f et f'. Prenons un point m sur la courbe E et traçons la tangente mp en m à cette courbe E.

La normale mq divisant en deux parties égales l'angle fmf' des rayons vecteurs menés au point m (n° 328 *quater*), il s'ensuit que si l'on prolonge le rayon vecteur mf d'une quantité $mg = mf'$ en unissant les points f et g on aura une droite fg perpendiculaire à la tangente mp, et le point n en lequel les droites fg et mp se coupent sera le milieu de fg.

(*) On voit donc que si l'on a deux points f et o (*fig.* 208 A), et que du point o on décrive avec un rayon op un cercle C, le point m également distant du cercle C et du point f sera sur une ellipse E dont les points f et o seront les foyers et dont le grand axe sera égal au rayon op du cercle C, car l'on a : $cd = oa = op$.

Si l'on mène la droite pf, et que du point m on abaisse une droite mq perpendiculaire à pf, cette droite mq sera la tangente en m à l'ellipse E : et en effet, puisque l'on a $mp = mq$ et que les deux triangles pmq et fmq sont tous les deux rectangles, les angles $\widehat{pmq}$ et $\widehat{qmf}$ seront égaux. Or, les droites mf et mo sont les rayons vecteurs de l'ellipse E pour le point m, donc, etc.

On pourrait, d'après ce qui précède, construire un compas à *ellipse* qui jouirait d'une propriété fort utile et qui n'a point encore été réalisée.

Tous les compas à ellipse construits jusqu'à ce jour ne permettent pas de diriger le bec du tire-ligne dans le plan de la tangente à la courbe. Par le procédé suivant, on obtiendrait ce résultat.

Soient trois règles A, B, D, fendues dans leur longueur ; A et B tourneront autour des points f et o (*fig.* 208 B), le point p placé sur la règle B à une distance fixe op du pivot-centre o, pourra glisser dans la rainure pratiquée dans la règle A.

La règle D portera un pivot q qui pourra glisser dans la rainure de la règle A, mais la règle D sera tellement ajustée sur la règle A, qu'elle lui sera toujours perpendiculaire.

Le tire-ligne m glissera carrément dans la rainure pratiquée sur la règle D et portera un pivot qui pourra glisser dans la rainure pratiquée sur la règle B.

Par ce moyen, en faisant tourner la droite B autour du pivot-centre o, le point p décrira un cercle C, la règle A tournera autour de son pivot-centre f et le tire-ligne m, dont le bec aura son plan toujours parallèle à la règle D, décrira l'ellipse E.

Or le point o est le milieu de ff', donc la droite on sera parallèle à $f'g$ et de plus on aura :

$$\overline{on} = \frac{1}{2}.\overline{f'g}$$

Or

$$\overline{fg} = \overline{f'm} + \overline{fm} = \overline{aa'}$$

Donc $\overline{on}$ = le demi grand axe de l'ellipse E.

Quel que soit le point m que l'on considère sur l'ellipse E, on arrivera toujours au même résultat.

Ainsi le point n est sur un cercle C décrit sur le grand axe $\overline{aa'}$ de l'ellipse E comme diamètre.

2° *Si de chacun des foyers d'une hyperbole on abaisse une perpendiculaire sur chacune des tangentes à cette courbe, les pieds des diverses perpendiculaires abaissées sur ces tangentes, seront sur un cercle décrit sur l'axe transverse de l'hyperbole pris pour diamètre.*

Soit donnée une hyperbole E (*fig.* 208 *l*) ayant le point o pour centre, les points f et f' pour foyers et dont aa' sera l'axe transverse.

Prenons un point m sur la courbe; la droite mp étant la tangente en ce point m, cette droite mp divise en deux parties égales l'angle $\widehat{fmf'}$ des deux rayons vecteurs menés en ce point m.

Abaissons du foyer f' une perpendiculaire sur la tangente mp; cette perpendiculaire coupera la tangente mp en n' et le rayon vecteur mf en g.

Or, il est évident que $mg = mf'$.

Donc $fg = mf - mf'$ = l'axe transverse $\overline{aa'}$ de l'hyperbole donnée.

Le point n' est le milieu de la droite gf'.

Le point o est le milieu de la droite ff'.

Donc la droite on' est parallèle à fg et égale à la moitié de fg et par conséquent égale à la moitié de l'axe transverse $\overline{aa'}$ de l'hyperbole donnée. Or quel que soit le point m, le résultat obtenu sera le même; donc les points n' seront sur un cercle C décrit du point o comme centre et sur l'axe transverse $\overline{aa'}$ comme diamètre.

3° *Si du foyer d'une parabole on abaisse une perpendiculaire sur chacune des tangentes à cette courbe, les pieds des diverses perpendiculaires abaissées sur ces tangentes seront sur une droite tangente au sommet de la parabole.*

Soit donnée une parabole E ayant le point f pour foyer, le point s pour sommet et la droite D pour directrice. Menons en un point m de la courbe E une tangente mp (*fig.* 208 *m*) à cette courbe.

Abaissons du foyer f une perpendiculaire sur cette tangente mp, elle coupera la

droite mp en un point n et la droite mq (parallèle à l'axe infini $\overline{sf}$ de la parabole) en un point g.

On aura : $\overline{mg}=\overline{mf}$ et le point n sera le milieu de $\overline{fg}$.

Or la droite D étant la directrice de la parabole, on a : $\overline{mq}=\overline{mf}$; donc les points g et q se confondent, et comme $\overline{sf}=\overline{sr}$ et que le point n est le milieu de fq, on en conclut que le point n est situé sur la droite C menée par le sommet s de la parabole et parallèlement à la directrice D.

Et comme quel que soit le point m pris sur la parabole, on arrivera toujours au même résultat, on doit en conclure que les pieds des perpendiculaires abaissées sur les tangentes sont sur la droite C, tangente au sommet s de la parabole.

Propriété remarquable du tore irrégulier ou excentrique.

328 *déci.* Étant donné un cercle C sur le plan horizontal menons par un point p situé en dedans ou en dehors du cercle C une verticale Y; menons par la droite Y un plan M coupant le cercle C en un point q, et traçons dans ce plan M un cercle δ ayant le point q pour centre et $\overline{pq}$ pour rayon; en faisant tourner le plan M autour de l'axe Y et supposant que le cercle δ varie de rayon et que son centre parcoure le cercle C, ce cercle δ mobile (et variable de grandeur suivant une loi donnée) décrira une surface Σ qui, en vertu de son mode de génération, sera coupée par tout plan passant par l'axe Y suivant deux cercles δ_1 et δ'_1 de rayons inégaux, ayant leurs centres sur le cercle C et étant tangents l'un à l'autre au point p. La surface Σ affectera la forme d'un tore qui sera dit : *irrégulier* ou *excentrique*.

Je dis que cette surface Σ peut encore être coupée par une seconde série de plans suivant des cercles.

Premier cas. Supposons que le point p est situé dans l'intérieur du cercle C, unissons le point p et le centre o du cercle C par une droite coupant (*fig.* 208 *p.*) ce cercle C en les deux points a et a', portons sur le diamètre $\overline{aa'}$ une longueur $\overline{a'p'}=\overline{ap}$ et regardons les deux points p et p' comme les foyers d'une ellipse E ayant son centre en o et la droite $\overline{aa'}$ pour grand axe.

Faisons passer par la droite aa' un plan R perpendiculaire au plan horizontal sur lequel se trouvent tracées les courbes C et E, et traçons dans ce plan R la *focale* de l'ellipse E, on aura une hyperbole (H, H') ayant les points p et p' pour sommets et les points a et a' pour foyers (n° 309).

Cela posé :

On sait 1° que si l'on prend un point x sur l'ellipse E et qu'on le regarde comme le sommet d'une cône X ayant l'hyperbole H pour directrice, ce cône X est de révolution.

2° Que si l'on prend un point z sur l'hyperbole H et qu'on le regarde comme le sommet d'un cône Z ayant l'ellipse E pour directrice, ce cône Z est de révolution.

3° Que si l'on mène les tangentes θ en x à la courbe E et T en z à la courbe H, ces tangentes seront respectivement les axes de rotation des surfaces coniques X et Z ; ainsi θ sera l'axe du cône X et T l'axe du cône Z.

Cela posé :

Si du point p foyer de l'ellipse E, on mène un plan M perpendiculaire à la tangente θ, ce plan M coupera le cône X suivant un cercle δ qui aura son centre au point q en lequel le plan M coupe la droite θ, et ce cercle δ aura pour rayon la droite $\overline{pq}$.

En considérant une suite de plans M, on aura une série de cercles δ qui détermineront la surface Σ précédente et désignée par le nom de *tore irrégulier*.

Cela posé :

Construisons une sphère S tangente au cône Z et au plan de l'ellipse E au foyer p ; le cône Z touchera la sphère S suivant un cercle ϵ. Et si l'on considère les divers points z, z', z'', etc., de l'hyberbole H, on aura une suite de cônes Z, Z', Z'', etc., et par suite une série de cercles ϵ, ϵ', ϵ'', etc.

Tous ces cercles ϵ, ϵ', ϵ'', etc., engendreront une surface qui ne sera autre que la surface Σ précédente, et en effet :

Considérons la génératrice droite zx du cône X, cette droite coupe le cercle ϵ en un point n et l'on a $\overline{xn}=\overline{xp}$, or tous les points du cercle δ sont distants du sommet x d'une quantité égale à $\overline{xp}$; le point n est donc un point du cercle δ.

Si l'on considère un second cercle ϵ' tracé sur un cône ayant le point z' pour sommet, la génératrice xz' du cône X couperait le cercle ϵ' en un point n' et l'on aurait $\overline{xn'}=\overline{xp}$; ainsi le point n' sera sur le cercle δ.

On trouverait de même que les divers cercles δ, δ', δ'', etc., coupent respectivement, et chacun en un point, les divers cercles ϵ, ϵ', ϵ'', etc. Ainsi les cercles ϵ, ϵ', ϵ'', etc., sont situés sur la surface Σ formée par les cercles δ, δ', δ'', etc.

Deuxième cas. Supposons que le point p est situé hors du cercle C.

Menons par le point p et le centre o du cercle C une droite B, et par cette droite B un plan M perpendiculaire au plan du cercle C ; cette droite B coupera le cercle C en deux points (*fig.* 208 q) a et a'.

Portons $\overline{o'p'}=ap$ et traçons : 1° dans le plan M une ellipse E ayant les points p et p' pour sommets et les points a et a' pour foyers, et 2° dans le plan du cercle C une hyperbole (H, H′) ayant les points p et p' pour foyers et les points a et a' pour sommets, la surface engendrée par le cercle mobile δ, dont le centre parcourt le cercle C et dont le plan méridien M passe toujours par la droite Y menée perpendiculairement au plan du cercle C par le point m, sera coupée par des plans perpendiculaires au plan de l'ellipse E et normaux aux tangentes de cette ellipse suivant d'autres cercles ϵ, ϵ', ϵ'', ...

Troisième cas. Supposons qu'au lieu d'un cercle, on se donne une droite C (*fig.* 208 *s*) et ensuite un point p; si l'on mène par ce point p une suite de divergentes coupant la droite C en des points o, o', o'',..... et si l'on considère chaque point o comme le centre d'un cercle δ situé dans un plan perpendiculaire au plan (p, C) et ayant $\overline{op}$ pour rayon, la surface engendrée par les cercles δ, δ', δ'',..... pourra être coupée suivant une seconde série de cercles ϵ, ϵ', ϵ'', ... Et en effet : abaissons du point p une perpendiculaire sur la droite C, on aura le point s; construisons dans le plan (p, C) une parabole P ayant le point s pour sommet et le point p pour foyer; puis par la droite ps menons un plan M perpendiculaire au plan (p, C), et traçons dans ce plan M une parabole P′ ayant le point p pour sommet et le point s pour foyer.

La courbe P′ sera la focale de P, et l'on trouvera, par des raisonnements analogues à ceux employés dans le premier cas, que les plans de cercles ϵ, ϵ', ϵ'',.... seront perpendiculaires au plan M et normaux aux tangentes de la parabole P.

La propriété dont jouit chacune de ces trois espèces de surfaces, d'être doublement *circulaire,* nous permet de construire avec facilité le plan tangent en un point de chacune d'elles.

En effet : étant donné un point m de cette surface, on mènera par ce point et par l'axe Y un plan, et l'on aura le cercle δ, et en menant par le point m et par la droite D par laquelle passent tous les plans des cercles ϵ (n°s 299, 301 et 306 ; *fig.* 193, 194 et 195) un plan sécant, on aura le cercle ϵ. Les tangentes aux deux cercles δ et ϵ se croisant au point m, détermineront le plan tangent en ce point m.

Lorsque le point p est précisément le centre du cercle C, alors la droite Y est précisément l'axe du cercle C, et dans ce cas on a pour surface le *tore régulier,* surface qui est de révolution et engendrée par un cercle δ de rayon constant et égal à celui du cercle C; dans ce cas, la surface est coupée suivant une seconde série de cercles ϵ par des plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'axe Y.

Or, l'axe Y est la *focale* de cercle C, on voit donc que l'*analogie* subsiste entre

les quatre surfaces que nous avons examinées, savoir : les *trois tores irréguliers* et le *tore régulier* (*).

Du pôle et de la polaire d'une section conique.

329. Dans toute section conique, si l'on trace une série de cordes parallèles et qu'on mène les tangentes aux extrémités de chaque corde, elles concourent en des points qui sont tous situés sur le diamètre conjugué de ces cordes. Réciproquement si par tous les points d'un diamètre d'une section conique on mène des tangentes à cette courbe, les cordes qui unissent les points de contact des tangentes issues d'un même point sont toutes parallèles au diamètre conjugué du diamètre donné (n[os] 312, 9°; 321; 324).

330. Soient une section conique E (*fig.* 209) et une droite quelconque P, qui la coupe en deux points *q* et *r*, les tangentes en ces points concourent en un point *p*, et je dis que si *par un point quelconque* x *de* P, *on mène les tangentes* xy *et* xz *à la section conique* E, *la corde* yz *prolongée passera par le point* p. En effet, soit *s* un point de la focale de la conique E, prenons-le pour sommet d'un cône Δ de révolution sur lequel la courbe E soit placée, joignons *sp* et *sx* et menons les génératrices droites *sq*, *sr*, *sy*, *sz* du cône Δ. La droite *sp* étant tout entière hors de la surface conique, un plan Z qui lui sera parallèle coupera toutes les génératrices du cône et donnera par conséquent pour section une *ellipse* E'; pour simplifier la figure nous tracerons cette ellipse à part (*fig.* 210), les points *q'*, *r'*, *y'*, *z'* sont les intersections de ce plan Z avec les génératrices *sq*, *sr*, *sy*, *sz*; cela posé, les plans tangents (*srp*) et (*spq*) coupent le plan Z qui contient la courbe E', suivant des tangentes à E' en les points *r'* et *q'* et parallèles à *sp*, donc *q'r'* est un diamètre de E', et comme il est dans le plan (*sqr*) qui contient la droite *sx*, il coupera cette droite en un point *x'*; puis les plans tangents (*sxy*) et (*sxz*) coupent le plan Z aussi suivant les droites *y'x'* et *z'x'* tangentes à la courbe E' et aux points *y'* et *z'*, et ces tangentes concourent aux points *x'*, intersection des trois plans Z, (*sxy*) et (*sxz*); donc la corde (*y'z'*) est parallèle à *sp*, elle rencontre le plan horizontal en un point *p'* situé sur la droite *yz* puisqu'elle est dans le plan (*syz*), et comme ce plan (*syz*) contient aussi *sp*, la droite *yz* passe nécessairement par le point *p*.

Réciproquement *si par un point* p (*fig.* 209) *extérieur à une section conique on mène les deux tangentes* pq *et* pr *et tant de sécantes* py *que l'on voudra ; qu'aux inter-*

(*) Plus loin, nous verrons que l'on peut transformer les quatres *tores circulaires* en des *tores elliptiques ;* ces nouvelles surfaces jouissent de la propriété d'être coupées par une suite de plans passant par l'axe Y, suivant des *ellipses*, et par une suite de plans passant par la droite D, suivant d'autres *ellipses*.

séctions y *et* z *de chaque sécante et de la courbe on mène des tangentes à cette courbe, ces tangentes concourent en des points* x *situés sur la droite* P, *laquelle joint les points de contact* q *et* r. Le point *p* est dit le *pôle* conjugué de la droite P, et la droite P est dite la *polaire* conjuguée du pôle *p*. Si l'on prend le point *x* à l'infini, les tangentes sont parallèles à la droite P, la corde qui unit les points de contact est un diamètre passant par le point *p*, donc le pôle *p* est sur le prolongement du diamètre qui est le conjugué du diamètre qui est parallèle à la polaire P.

331. *Si par un point* p (*fig.* 211) *intérieur à une section conique* E *on mène tant de cordes que l'on voudra, et qu'aux extrémités de chaque corde, on construise les tangentes à la courbe* E, *elles concourent en des points situés sur une droite extérieure à la section conique* E. En effet, par le point *p* menons trois cordes *ab*, *a'b'*, *a''b''*, les tangentes en *a* et *b* se coupent en un point *r*, celles en *a'* et *b'* se coupent en *r'*, enfin celles en *a''* et *b''* se coupent en *r''*; deux de ces trois points *r* et *r'* déterminent une droite P. Il faut démontrer que cette droite P passe par le point *r''*; pour cela concevons la *focale* de la courbe E et le cône Δ qui aurait son sommet en un point *s* de cette *focale*, menons les génératrices *sa*, *sb*, *sa'*, *sb'*, *sa''*, *sb''* du cône Δ et les droites *sr*, *sr'*, *sr''*; le plan (*s*, P) n'ayant que le sommet *s* de commun avec le cône Δ, un plan Z qui lui sera parallèle coupera ce cône Δ suivant une ellipse E', que pour plus de *clarté* nous construisons à part (*fig.* 212) et il coupera aussi les plans tangents (*sar*), (*sbr*) suivant deux droites tangentes en les points α et β à la courbe E' et ces tangentes seront parallèles à *sr*; donc $\alpha\beta$ est un diamètre de l'ellipse E', et il est situé dans le plan (*sab*); de même le plan sécant Z coupe les plans tangents (*sa'r'*), (*sb'r'*) suivant des tangentes en α' et β' à la courbe E' et parallèles à *sr'*; donc $\alpha'\beta'$ est aussi un diamètre de l'ellipse E' et il est situé dans le plan (*sa'b'*); mais les plans (*sab*) et (*sa'b'*) se coupent suivant la droite *sp*, qui contient par conséquent le point d'intersection π des diamètres $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, ou le centre de l'ellipse E'.

Cela posé :

Le plan (*sa''b''*) coupe le plan Z de la courbe E' suivant un diamètre $\alpha''\beta''$, donc les intersections du plan Z (sur lequel est tracée l'ellipse E') et des plans tangents (*sa''r''*), (*sb''r''*) sont des tangentes en α'' et β'' à l'ellipse E' et parallèles entre elles et par conséquent à l'intersection *sr''* des deux plans tangents; donc *sr''* est située dans le plan (*s*, P) parallèle au plan de l'ellipse E'; donc enfin le point *r''* est sur la droite P.

Réciproquement *si par chacun des points d'une droite* P (*fig.* 211) *extérieure à la section conique* E, *on mène deux tangentes à cette courbe et qu'on joigne les points de contact par une corde, toutes ces cordes se croiseront en un point* p *intérieur à la section conique* E.

La droite P est la *polaire* du *pôle* p. Si l'on prend le point *r* à l'infini, les tangentes

à la courbe E aux points *a* et *b* seront parallèles entre elles et à la droite P, donc la corde qui unira les points de contact *a* et *b* sera un diamètre passant par le point *p*. Donc le pôle *p* est sur le diamètre conjugué du diamètre parallèle à la polaire P.

Des propriétés de certains polygones inscrits à une section conique.

332. *Si l'on prolonge les côtés opposés d'un hexagone* abcdef (*fig.* 213) *inscrit dans une section conique, ils se coupent en trois points* r, r′, r″ *qui sont en ligne droite.* En effet, concevons la *focale* de la section conique E, soit *s* un point de cette *focale* que nous prendrons pour sommet de l'une Δ des surfaces coniques de révolution sur lesquelles la courbe E peut être placée; menons les génératrices *sa*, *sb*, *sc*, *sd*, *se*, *sf* du cône Δ et les droites *sr*, *sr′*, *sr″*; les points *r* et *r′* déterminent une droite D, qui passe par le point *r″*. Pour le démontrer coupons la surface conique par un plan Z parallèle au plan (*s*, D), la section sera une ellipse E′, les intersections de ce plan sécant Z avec les plans (*saf*), (*scd*) sont deux cordes *a′f′* et *c′d′* parallèles à *sr*; le même plan Z est coupé par les deux plans (*sfe*), (*sbc*) suivant deux autres cordes *f′e′* et *b′c′* parallèles à *sr′*; enfin les intersections du même plan Z (qui contient la courbe E′) avec les plans (*sad*), (*sab*) sont deux autres cordes *c′d′* et *a′b′*, qui avec les quatre précédentes forment un hexagone inscrit dans l'ellipse E′; et puisque les quatre premiers côtés sont parallèles deux à deux, les deux derniers côtés sont aussi parallèles entre eux (n° 320) et par conséquent parallèles à l'intersection *sr″* des deux plans, donc cette intersection est située sur le plan (*s*, D) parallèle au plan Z de la courbe E′; donc enfin le point *r″* est sur la droite D.

C'est la propriété connue sous le nom d'*hexagramme de Pascal*.

Il résulte de là un moyen de construire une section conique par points, car si l'on donne les cinq points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, on mènera les droites *ab*, *bc*, *cd* qui seront trois côtés d'un hexagone inscrit dans la section conique cherchée, puis le quatrième côté *ed* ira couper *ab* en un point *r″*. Pour trouver un point compris entre les points *e* et *a*, l'on mènera donc une droite *er′*, qui rencontrera *ab* au delà du point *a*, l'on joindra les points *r″* et *r′* par une droite D coupant *ed* en un point *r*, que l'on joindra avec *a*, les droites *ra* et *r′e* se croisent en un point *f* qui appartiendra à la section conique passant par les cinq points donnés. On obtiendrait de même des points compris entre deux quelconques des points donnés et autant qu'on en voudra.

L'un des côtés *ed*, par exemple, pourrait devenir infiniment petit, la propriété de l'hexagone inscrit n'en serait pas moins vraie; mais alors la droite *er″*, ou l'un des côtés de l'hexagone étant prolongé, deviendrait tangente à la courbe E. On conclut donc de là que pour mener la tangente en un point *m* d'une section co-

nique, il faut d'abord inscrire un pentagone dont l'un des sommets soit en m, ensuite prolonger le côté opposé au point m et les quatre autres côtés jusqu'à la rencontre des côtés non adjacents, et enfin unir les points de concours par une droite qui ira couper le côté opposé au point m en un point x et menant la droite xm, on aura en cette droite la tangente demandée.

333. Soient $abcd$ (*fig.* 214) un quadrilatère inscrit dans une section conique quelconque, p et q les points de concours des côtés opposés; les diagonales ac et bd se coupent en un point o, joignant ce point o aux points p et q par les droites Q et P, je dis que le point p *est le pôle conjugué de la polaire* P, *et que le point* q *est le pôle conjugué de la polaire* Q, c'est-à-dire que si du point p on mène les tangentes pe, pf, à la courbe E, la droite P passera par les points de contact e et f de ces tangentes; et de même si du point q, on mène les tangentes qg et qh, la droite Q passera par les points de contact g et h de ces tangentes avec la courbe E. En effet concevons la *focale* de la section conique E et soit s le sommet de l'un Δ des cônes de révolution, sur lesquels on peut placer cette courbe E; menons les génératrices sa, sb, sc, sd du cône Δ et les droites sp, sq, puis coupons tout le système par un plan Z parallèle au plan (spq), la section conique sera une ellipse E′, et la pyramide $sabcd$ sera coupée suivant un parallélogramme $a'b'c'd'$ (n° 156), dont les côtés $a'b'$ et $c'd'$ sont parallèles à sp et dont les côtés $b'c'$ et $a'd'$ sont parallèles à sq; donc $c'e'$ et $b'd'$ sont des diamètres de l'ellipse E′ (n° 316, 2°), le point o' en est le centre et se trouve sur la droite se intersection des plans (sbd) et (sac). Les cordes $a'b'$ et $b'c'$ sont supplémentaires (n° 313, 3°) et par conséquent parallèles à des diamètres conjugués; or les plans tangents (sep) et (sfp) sont coupés par le plan Z de l'ellipse E′ suivant des tangentes parallèles à sp et par conséquent parallèles à $a'b'$, donc le diamètre qui unit les points de contact est parallèle à $b'c'$ (n° 313, 7°) ou à sq, mais ce diamètre est dans le plan (sef), donc ce plan contient aussi sq, mais il contient so, donc les quatre points e, f, g, o sont sur la trace horizontale P de ce plan (sef) et par conséquent en ligne droite; donc enfin le point p est le *pôle* conjugué de la *polaire* P. De même les plans tangents (sqg) et (sqh) sont coupés par le plan Z suivant des tangentes à la courbe E′ et parallèles à $b'c'$ et par une suite de raisonnements semblables à ceux ci-dessus on conclura que le point q est le *pôle* conjugué de la *polaire* Q.

Si $abcd$ est un trapèze (*fig.* 215) les côtés parallèles ab et cd se couperont à l'infini, alors la polaire Q sera parallèle aux côtés ab et cd du trapèze et elle coupe la courbe E aux points g, h; menons en ces points des tangentes à la courbe E, elles iront concourir en un point du diamètre conjugué de Q, qui ne sera autre que le point de concours q des côtés non parallèles bc et ad, et le point o est évidemment le milieu de gh.

On déduit de là un moyen simple et facile pour mener une tangente en un point donné d'une section conique ; en effet, soit la section conique E à laquelle on veut mener la tangente au point *h*, par ce point menons une droite quelconque Q, prenons le milieu *o* de la corde *gh*, par ce points *o* menons deux sécantes quelconques *ae*, *bd* qui coupent la courbe E en les points *a* et *e*, *b* et *d*, joignons les points *a* et *d*, *b* et *e*, par des droites qui se coupent au point *q*, traçons la droite *qh*, on aura la tangente demandée.

333 *bis*. I. On peut regarder un quadrilatère inscrit à une section conique, comme étant un pentagone inscrit en considérant la tangente à la courbe en l'un des quatre sommets. Alors le cinquième côté du pentagone est l'élément rectiligne de la courbe au sommet du quadrilatère par lequel passe la tangente.

II. On peut regarder un quadrilatère inscrit à une section conique, comme étant un hexagone inscrit en considérant deux tangentes à la courbe, en deux des quatre sommets. Alors le cinquième et le sixième côté de l'hexagone sont les éléments rectilignes de la courbe en les deux sommets du quadrilatère, par lesquels passent les deux tangentes.

Soient donnés une section conique E et un quadrilatère inscrit *a*, *b*, *c*, *d*, et au point *a* la tangente T à la courbe E (*fig.* 215 *bis*) :

Le pentagone aura quatre côtés de longueur finie, *ad*, *dc*, *cb* et *ba*, et le cinquième côté sera *aa'*, infiniment petit rectiligne.

Dès lors si l'on voulait construire la tangente au point *b* de la section conique E, on devrait considérer cette tangente comme étant le prolongement du sixième côté d'un hexagone, ayant en *a* un côté infiniment petit $\overline{aa'}$ et en *b* un côté infiniment petit $\overline{bb'}$.

Dès lors les côtés opposés de l'hexagone étant *ad*, *bb'* et *cb*, *aa'* et *cd*, *b'a'*, le côté *cb* prolongé coupera la tangente T (ou *aa'* prolongé) au point *r'*; les droites *cd* et *a'b'* (qui n'est autre que *ab*) étant prolongées se couperont en un point *r*; unissant les points *r* et *r'* par une droite D, elle coupera *ad* prolongé en un point *r''*, et la droite *r''b* sera la tangente T' demandée.

On peut donc par cette méthode construire la tangente en un point *b* d'une section conique donnée par son *tracé*, lorsque l'on connaîtra une tangente T à cette courbe et le point de contact *a* de la tangente T.

On peut toujours inscrire à une ellipse E un rectangle dont les côtés soient respectivement parallèles aux axes de la courbe, et si l'on construit aux quatre sommets du rectangle des tangentes à la courbe, on aura un rectangle circonscrit ; or (*fig.* 215 *ter*), il est évident :

1° Que les diagonales du rectangle inscrit sont parallèlles aux côtés du rectangle circonscrit ;

2° Que chaque côté du rectangle circonscrit étant prolongé coupe les côtés du rectangle inscrit qui lui sont opposés en deux points, en sorte que l'on a huit points marqués sur la figure par les lettres p, p', p'', p''', p^{IV}, p^{V}, p^{VI}, p^{VII}.

Ces points sont deux à deux sur quatre droites qui forment un rectangle q, q', q'', q''', dont les sommets sont situés sur les diagonales du rectangle inscrit.

Chacun des 8 points p se trouve en ligne droite avec l'un des 4 points q et l'un des 4 sommets f du rectangle circonscrit;

3° Les diagonales du rectangle circonscrit se coupent au point o en lequel se coupaient les diagonales du rectangle inscrit.

Il est évident que si l'on construit un parallélogramme inscrit à une ellipse et le parallélogramme circonscrit, on obtiendra les mêmes relations indiquées par la fig. 215 *ter*, seulement les lignes rectangulaires entre elles dans le cas du rectangle ne le seront plus dans le cas du parallélogramme; mais, celles qui sont parallèles resteront parallèles et les points qui étaient en ligne droite, resteront en ligne droite.

Cela posé:

Étant donnés une section conique E et deux quadrilatères l'un inscrit et l'autre circonscrit, il est facile de trouver les propriétés qui existent entre ces deux quadrilatères, car il suffira de prendre un point s sur la *focale* de la courbe E, de regarder ce point comme le sommet d'un cône Δ ayant la courbe E pour base, ce cône sera de révolution; en le coupant par un plan Z parallèle aux deux droites unissant le sommet s avec les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit, on obtiendra une ellipse E' dans laquelle on aura deux parallélogrammes, l'un inscrit et l'autre circonscrit, comme l'indique la fig. 215 *ter*. Si donc par le sommet s du cône Δ et par chacun des points de la fig. 215 *ter* (figure que l'on suppose maintenant sur le plan Z) on fait passer des droites, et si par ce même sommet s et par chacune des droites de la fig. 215 *ter* on fait passer des plans, ces droites perceront le plan de la courbe E en des points et ces plans couperont le plan de la courbe E en des droites, qui seront telles que toutes les relations existant sur la figure située dans le plan Z, subsisteront sur le plan de la courbe E, seulement les droites qui sont *parallèles* dans la première figure située sur le plan Z, concourront en un *point* pour la figure tracée sur le plan de la section conique E.

Un triangle inscrit dans une section conique peut être considéré comme un quadrilatère inscrit, ou comme un pentagone inscrit, ou comme un hexagone inscrit.

En le considérant comme un hexagone inscrit, on est conduit à considérer en même temps (*fig.* 215 *quater*) et le triangle inscrit donné et le triangle circonscrit qui est formé par les tangentes à la courbe aux sommets du triangle inscrit.

Alors l'hexagone inscrit a trois côtés infiniment petits $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ et trois côtés finis qui sont ceux du triangle inscrit.

On déduit de ce qui précède la propriété suivante, savoir : *si l'on prolonge chacune des trois tangentes menées à une section conique en chacun des trois sommets d'un triangle inscrit et le côté du triangle inscrit, on obtient trois points de concours* s, s', s'', *qui sont nécessairement en ligne droite.*

Cette propriété permet de construire la tangente en un point d'une section conique lorsque la courbe est donnée par son *tracé* et que l'on connaît deux tangentes à cette courbe et les points de contact de ces tangentes.

En effet :

Soient tracés la section conique E, les deux tangentes *ar* et *br*, et les points de contact *a* et *b*, proposons-nous de construire la tangente au point *c* de la courbe E.

On tracera le triangle inscrit *abc*, les droites *ra* et *bc* prolongées donneront le point *s*; les droites *rb* et *ac* prolongées donneront le point *s'*; on unira les points *s* et *s'* par la droite (*s*, *s'*), laquelle sera coupée au point *s''* par la droite *ab* prolongée; unissant les points *c* et *s''*, on aura la tangente demandée.

333 *ter*. L'hexagramme de Pascal démontre :

1° Que cinq points déterminent une section conique et n'en déterminent qu'une seule;

2° Que deux sections coniques ne peuvent s'entre-couper en plus de quatre points sans se confondre;

3° Que deux sections coniques qui ont un point de contact ne peuvent se couper au plus qu'en deux autres points;

4° Que deux sections coniques qui ont deux points de contact ne peuvent avoir d'autres points communs.

333 *quat.* Les propriétés, employées pour la construction d'une tangente en un point d'une section conique, dont jouissent l'hexagone, le pentagone, le quadrilatère et le triangle inscrits à cette section conique, démontrent :

1° Que cinq points déterminent une section conique;

2° Que quatre points et une tangente déterminent une section conique;

3° Que trois points et deux tangentes déterminent une section conique;

4° Que deux points et trois tangentes déterminent une section conique, et que dans les quatre cas on ne peut construire qu'une seule section conique.

Mais il faut ajouter que parmi les points donnés il faut toujours qu'il y en ait un situé sur chaque tangente, et qu'il soit donné comme point de contact de la tangente à la section conique *à construire par points*.

Des quadrilatères inscrits à une section conique et conjugués entre eux.

333 *quint.* D'après ce qui précède on peut énoncer ce qui suit :

1° Étant données une section conique E (*fig.* 215 *a*) et une droite X, et ayant déterminé le *pôle o* de la *polaire* X.

Si de deux points *s* et *s'* pris sur la polaire X on mène des tangentes *sp*, *sq* et *s'p'*, *s'q'* à la courbe E, on sait que les points *s'*, *p*, *q*, sont sur une droite Z et que les points *s*, *p'*, *q'* sont sur une droite Y et que les deux droites Z et Y se coupent au *pôle o*.

Les droites Z et Y ont respectivement pour *pôle* les points *s* et *s'*, en sorte que l'on peut donner au triangle *oss'* le nom de *triangle polaire* de la courbe E.

Si l'on inscrit dans la section conique E un quadrilatère *abcd*, dont les côtés opposés prolongés passent par les points *s* et *s'*, les diagonales de ce quadrilatère se croiseront au *pôle o*.

Si du point *s* on mène une sécante quelconque, coupant la courbe E aux points *a'* et *b'*; si l'on mène la droite *b'o* coupant la courbe E au point *d'*; si l'on mène la droite *sd'* coupant la courbe E au point *c'*; les points *s'*, *b'* et *c'* seront en ligne droite, ainsi que les points *s'*, *d'* et *a'*, ainsi que les points *a'*, *o* et *c'*.

Les deux quadrilatères inscrits *abcd*, *a'b'c'd'*, seront dits *conjugués* et ils auront pour *triangle polaire* le triangle *ss'o*.

2° Étant données (*fig.* 215 *b*) la section conique E, la droite X, et ayant construit le *pôle o* (dont la droite X est la *polaire*), et le quadrilatère inscrit *abcd;* si l'on prend deux points arbitraires *s* et s_1' sur la droite X, et que l'on construise le quadrilatère inscrit *a'b'c'd'*, les deux quadrilatères *abcd* et *a'b'c'd'* pourront encore être dits *conjugués;* mais ils auront seulement même *pôle o* et même *polaire* X; le premier aura pour *triangle polaire* le triangle *ss'o*, et le second aura le triangle $s_1s'_1o$ pour *triangle polaire*.

3° Si l'on a une série de quadrilatères *conjugués* par un *triangle polaire*, ainsi que le sont les quadrilatères *abcd* et *a'b'c'd'* (*fig.* 215 *a*),

Les diagonales du petit quadrilatère *a'b'ab* se croiseront en un point situé sur la droite Z; les tangentes en les points *a'* et *b'* se couperont sur la droite Z; les tangentes en les points *a* et *b* se croiseront sur la droite Z.

On peut donc énoncer ce qui suit :

Si l'on a une section conique E et que l'on ait construit le *pôle s* et la *polaire* Z, si du *pôle s* on mène une suite de divergentes, D, D', D'', etc., coupant la courbe E, savoir : D en *a* et *b*, D' en *a'* et *b'*, D'' en *a''* et *b''*, etc.

1° Les tangentes à la courbe E, pour les points *a* et *b*, *a'* et *b'*, *a''* et *b''*, etc., se

couperont sur la droite Z; 2° les diagonales unissant les sommets des quadrilatères donnés par deux divergentes quelconques se croiseront sur la droite Z.

Et *réciproquement* 3° si d'un point arbitraire de la droite Z on mène deux tangentes à la courbe E, la corde de contact étant prolongée passera par le *pôle s*.

Nous trouverons, pour les surfaces du second ordre, une propriété analogue. Mais alors les *quadrilatères* seront remplacés par des *troncs de pyramides quadrangulaires*.

Des sections coniques semblables entre elles et semblablement placées sur des plans parallèles entre eux.

334. Si l'on coupe un cône de révolution par deux plans parallèles, les sections seront des courbes semblables ayant pour pôle commun de similitude le sommet du cône (n° 262), et ce sommet sera un pôle de similitude directe ou de similitude inverse suivant que les deux plans couperont la même nappe ou des nappes différentes du cône (n° 559); si les sections sont des ellipses ou des hyperboles, les centres de ces courbes sont des pôles conjugués de similitude (n° 360); ces courbes peuvent dès lors être situées sur une seconde surface conique (n° 261) (*fig.* 216); enfin les sommets s et s' des deux surfaces coniques sur lesquelles peuvent être placées en même temps les ellipses ou hyperboles E et E′ semblables et semblablement placées sur deux plans parallèles, et les centres o et o' de ces courbes sont sur une même droite, intérieure aux deux surfaces coniques lorsque les courbes E et E′ sont des ellipses, et extérieure aux deux surfaces coniques lorsque les courbes E et E′ sont des hyperboles.

Les points s et s' doivent se trouver en même temps sur les *focales* des courbes E et E′ (n°s 295, 304, 309, 311), pour que les surfaces coniques soient de révolution; mais comme deux hyperboles ou deux ellipses se coupent généralement en quatre points, on pourrait croire que, pour une position donnée de deux ellipses ou de deux hyperboles semblables et semblablement placées, il y a quatre surfaces coniques de révolution capables de les contenir en même temps; mais dans ce cas les *focales* des courbes proposées ne se coupent qu'en deux points comme le montre le raisonnement suivant.

Si l'on fait mouvoir l'une des deux courbes parallèlement à elle-même, de manière que son centre parcourt la droite oo', les cônes sur lesquels elles seront placées auront encore leurs sommets sur la même droite oo', mais en des points autres que s et s'; or la *focale* de l'ellipse ou de l'hyperbole ne pouvant être rencontrée par une droite qu'en deux points, de toutes les surfaces coniques ainsi obtenues, deux seulement seront de révolution, les autres seront des cônes obliques. D'où

l'on pourrait conclure qu'un cône oblique peut être coupé par un plan suivant une ellipse ou une hyperbole.

Les paraboles n'ayant pas de centre, deux paraboles semblables et placées sur deux plans parallèles ne peuvent être situées que sur une seule surface conique dont le sommet s sera au delà des deux paraboles, si elles ont leur courbure dirigée du même côté, ou si elles sont semblablement placées, et entre les deux paraboles dans le cas contraire, c'est-à-dire si elles sont inversement semblables. Si l'on fait mouvoir l'une des deux courbes parallèlement à elle-même, de manière que l'extrémité a' d'un diamètre parcourt la droite (a, a'), le sommet s de la surface conique changera de place en restant toujours sur la même droite aa', mais la *focale* de la parabole ne peut être rencontrée qu'en deux points par une droite; donc de toutes les surfaces coniques ainsi obtenues, deux seulement pourront être de révolution (ce qui ne veut pas dire que nécessairement il existera deux cônes de révolution), les autres seront obliques; on pourrait conclure de là qu'un cône oblique peut être coupé suivant une parabole.

335. Si les deux sections coniques sont identiques, les droites qui unissent deux points homologues quelconques sont parallèles, et le cône se transforme en un cylindre. Donc deux sections coniques identiques peuvent toujours être placées sur une même surface cylindrique.

336. Deux paraboles quelconques sont deux courbes semblables, car si l'on fait coïncider les foyers de ces paraboles, et si l'on mène un rayon vecteur quelconque qui les coupe en x et x', les diamètres et les rayons vecteurs de ces points sont parallèles, donc les bissectrices des angles de ces droites sont aussi parallèles; mais ces bissectrices ne sont autres que les tangentes aux paraboles (n° 324), donc les deux paraboles ont leurs tangentes parallèles et sont par conséquent deux courbes semblables (n° 259) ayant pour pôle commun de similitude leurs foyers communs; si l'on déplace ces paraboles de sorte qu'elles n'aient plus même foyer, leurs foyers deviennent alors des pôles conjugués de similitude.

337. Lorsqu'un cône est coupé par deux plans parallèles suivant des ellipses E, E′ (*fig.* 216), on peut faire mouvoir l'une d'elles de manière que son centre parcourt la droite oo' jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec le centre de l'autre; on a alors deux ellipses semblables, semblablement placées et concentriques, de sorte que les diamètres homologues se confondent en une même droite. Il en résulte que si l'on mène une tangente à l'ellipse intérieure et prolongée de part et d'autre jusqu'à l'ellipse extérieure, on aura une corde et le point de contact sera le milieu de cette corde, car il appartient au diamètre conjugué de cette corde (n° 313, 7°), et si l'on coupe les deux ellipses par une sécante quelconque, les parties de cette droite, interceptées entre elles, sont égales, car le même point est le milieu de la corde corres-

pondant à chaque ellipse. Les cordes supplémentaires, par rapport à deux diamètres homologues, et issues de points homologues, sont parallèles; les parallélogrammes ayant pour diagonales des diamètres homologues ont leurs côtés parallèles et sont semblables. Des propriétés analogues existent pour deux hyperboles semblables, semblablement placées et concentriques. Deux paraboles qui jouissent des mêmes propriétés ne sont plus deux courbes semblables, mais bien deux paraboles identiques, qui coïncideraient si, en leur conservant même axe, on les amenait à avoir même sommet.

On peut conclure de là que si deux courbes jouissent de cette propriété, que les parties d'une sécante quelconque, comprises entre les deux courbes, sont égales, et que le point de contact d'une tangente à la courbe intérieure soit le milieu de la portion comprise dans la courbe extérieure, si l'une des deux courbes est une ellipse ou une hyperbole, l'autre sera une ellipse ou une hyperbole semblable, semblablement placée et concentrique, et si l'une des deux courbes est une parabole, l'autre sera une parabole identique ayant même axe infini que la première.

338. Si l'on coupe une surface conique de révolution par deux plans parallèles de manière que les sections soient des hyperboles; on peut, par le sommet, faire passer un plan parallèle aux plans sécants, il coupera la surface conique suivant deux génératrices, et l'on sait (n° 326, 5°) que ces génératrices sont parallèles aux asymptotes des hyperboles, donc les asymptotes de l'une des hyperboles sont parallèles aux asymptotes de l'autre hyperbole. Si, par conséquent, on fait mouvoir l'un des plans sécants parallèlement à lui-même, de manière que le centre o' de l'hyperbole correspondante se meuve sur la droite oo' et vienne coïncider avec le centre o de l'autre hyperbole, les asymptotes de la première hyperbole viendront s'appliquer sur les asymptotes de la seconde, et l'on reconnaîtra facilement que les deux courbes se trouveront situées dans les mêmes angles de leurs asymptotes communes.

Les asymptotes des deux hyperboles et les génératrices parallèles de la surface conique déterminent deux plans, dont l'intersection passe par le sommet du cône et par les centres des hyperboles; il est évident que les deux hyperboles sont situées dans les mêmes angles dièdres opposés de ces deux plans.

Si donc on conçoit deux plans parallèles P et P', dans le plan P deux droites A et B et une hyperbole H dont ces droites seraient les asymptotes, dans le plan P' deux droites A' et B' respectivement parallèles à A et B, et une hyperbole H' semblable à H, et dont A' et B' seraient les asymptotes, et si l'on imagine les plans (A, A') et (B, B') ils se couperont suivant une droite I passant par les centres des deux hyperboles. Cela posé, si les courbes H et H' sont dans les

mêmes angles dièdres opposés des plans (A, A′) et (B, B′), ces deux hyperboles pourront être placées sur deux surfaces coniques ayant leurs sommets sur I; mais si la courbe H est située dans deux angles dièdres opposés, et que la courbe H′ soit dans les deux autres angles dièdres aussi opposés, ces deux hyperboles ne peuvent être situées en même temps sur aucune surface conique. Cependant, dans ce dernier cas, si l'on unit par une courbe les extrémités des diamètres imaginaires de l'une des hyperboles H′ on aura une nouvelle hyperbole H'_1 qui pourra se trouver avec H sur deux surfaces coniques; de même l'hyperbole H_1, dont les diamètres réels seraient les diamètres imaginaires de H, pourra être située avec la courbe H′ sur deux autres surfaces coniques, et les sommets de ces quatre surfaces coniques sont tous sur la droite I. Les hyperboles telles que H et H_1 ayant mêmes asymptotes et qui sont telles que les diamètres imaginaires de l'une sont les diamètres réels de l'autre et réciproquement, peuvent être nommées *complémentaires;* nous remarquerons que chaque asymptote d'une hyperbole forme à elle seule un système de diamètres conjugués (n° 325, 8°).

Il résulte de ce qui précède que si l'on donne deux hyperboles semblables H et H′ ayant leurs asymptotes parallèles, et situées dans deux plans parallèles, ces deux hyperboles et leurs complémentaires H_1 et H'_1 déterminent quatre surfaces coniques ayant leurs sommets sur la droite qui unit les centres des hyperboles proposées.

339. Si l'on a deux cercles concentriques C et C′ (*fig.* 217); que l'on mène au cercle intérieur C les tangentes parallèles *ab*, *cd*, terminées au cercle extérieur C′; que l'on tire les cordes *ac*, *bd;* que du centre *o*, on mène le diamètre *ef* parallèle aux tangentes *ab* et *cd*, il coupera les cordes *ac* et *bd* en leurs milieux *g* et *h*, et il est évident que tous les points *g* et *h* ainsi obtenus sont sur une circonférence de cercle C″ concentrique à C et C′. Si l'on considère ces trois cercles comme les projections de trois ellipses tracées sur un même plan, nous savons (n° 317) que ces ellipses ne peuvent avoir pour projections des cercles qu'autant qu'elles sont semblables et semblablement placées; il est évident de plus que dans ce cas-ci elles sont concentriques. Donc si l'on a deux ellipses C et C′ semblables, semblablement placées et concentriques, qu'on inscrive dans la plus grande un parallélogramme dont deux côtés soient tangents à la plus petite, les deux autres côtés seront tangents à une troisième ellipse C″ semblable, semblablement placée et concentrique aux deux premières.

340. Si l'on a deux cercles concentriques C et C′, que l'on mène deux tangentes *ab*, *np* au cercle intérieur C et aux points *k*, *m*, les cordes *an*, *mk*, *bp* sont parallèles; car l'on a $kp = mp$, $ik = im$ et par conséquent $ia = in$. Donc si l'on considère ces cercles comme les projections de deux ellipses semblables, semblablement pla-

cées et concentriques, on en conclura que dans de telles ellipses deux tangentes à l'ellipse intérieure coupent l'ellipse extérieure en quatre points liés deux à deux par deux cordes parallèles à celle qui unit les points de contact. De plus si l'on menait les cordes bn, pa, il est évident qu'elles iraient se couper sur la droite oi, donc aussi cela aurait lieu dans les ellipses. Il est évident que les réciproques de cette proposition et de la précédente ne sont pas généralement vraies.

341. Si l'on a deux cercles concentriques C et C″ (*fig.* 217), que l'on construise le rectangle $abcd$ (n° 339), les diagonales ad, bc seront des diamètres du cercle C′; si l'on construit sur le diamètre kl les cordes supplémentaires km et lm, elles font entre elles un angle droit, si des extrémités a et d du diamètre ad on leur mène des parallèles an, dn, elles feront aussi entre elles un angle droit et se couperont par conséquent en un point n de la circonférence C′; de même si des points b et c on leur mène des parallèles bp, cp, elles se couperont en un point p de la circonférence C′; et les trois points n, m, p sont sur une ligne droite tangente en m au cercle C. En effet, les droites pc, dn étant parallèles, les arcs dp, nc sont égaux et dès lors les cordes dp et nc sont égales et l'on a $\widehat{pdc} = \widehat{pnc}$, donc les triangles pcd, npc sont égaux et l'on a $np = cd$, donc la droite np est tangente au cercle C. De plus joignant om, on, op, nm, les triangles rectangles onm et odl sont égaux, car $om = ol$ et $od = on$, donc $\widehat{onm} = \widehat{odl}$, mais $\widehat{ond} = \widehat{odn}$, donc $\widehat{dnm} = \widehat{ndl}$, mais $\widehat{ndc} = \widehat{dnp}$, donc $\widehat{dnm} = \widehat{dnp}$, donc les droites nm et pn coïncident, donc la tangente pn passe par le point m qui est le point de contact. Si l'on avait mené les droites an', dn' et bp', cp', parallèles à lm et km, on aurait obtenu $p'n'$ tangente au cercle C en un point m' diamétralement opposé au point m, de sorte que les droites pn et $p'n'$ sont parallèles. Les droites np', pn' seraient tangentes au cercle C″ (n° 339).

En considérant les cercles C et C′ comme les projections de deux ellipses semblables, semblablement placées et concentriques, on transportera la propriété des *cercles* sur les deux *ellipses*, seulement les cordes supplémentaires ne seront plus perpendiculaires entre elles.

342. Si deux courbes semblables et semblablement placées E et E′ (*fig.* 218) sont telles que les parties d'une sécante quelconque comprises entre les deux courbes sont égales, et qu'une tangente quelconque à la courbe intérieure E et terminée de part et d'autre à la courbe extérieure E′ est divisée par le point de contact en deux parties égales; les deux courbes E et E′, sont deux sections coniques semblables, semblablement placées et concentriques.

En effet soit o le *pôle* commun de similitude des deux courbes E et E′, menons une tangente quelconque $e'f'$ à la courbe E et ayant le point a pour point de con-

tact avec E, on aura, par hypothèse, $ae' = af'$; menant les rayons vecteurs oe' et of' qui coupent la courbe E en e et f, la corde ef sera parallèle à $e'f'$ à cause de la similitude des courbes E et E′, donc la droite oa, qui divise $e'f'$ en deux parties égales, divise aussi ef en deux parties égales, et puisque $e\varepsilon' = f\varphi'$ on aura $m\varepsilon' = m\varphi'$; prenant sur la tangente $e'f'$ à la courbe intérieure E deux points quelconques u, v, tels que $au = av$, si l'on mène les rayons vecteurs ou, ov, puis les cordes $gh, g'h'$, ces dernières sont parallèles à uv, car o étant le centre de similitude, on a

$$og' : ou : og :: oh' : ov : oh :: op' : oa : op$$

donc la droite oa, passant par le milieu de uv, passe aussi par les milieux de $g'h'$ et de gh. En prenant d'autres points u' et v' on trouvera d'autres cordes parallèles à $e'f'$, et dont les milieux seront situés sur la même droite oa; on trouverait de même que les cordes parallèles à une autre tangente ont leurs milieux en ligne droite. Or cette propriété, savoir : que toutes les *lignes diamétrales* sont des droites, appartient exclusivement aux sections coniques, car exprimée *analytiquement* elle conduit à une équation du second degré (nous démontrerons directement cette proposition, n° 342 *ter*, sans avoir besoin de recourir à *l'analyse*). Les courbes E et E′ sont donc deux sections coniques semblables et semblablement placées, et comme deux sections coniques ne jouissent de la propriété d'être coupées par une sécante quelconque de manière à ce que les parties interceptées soient égales entre elles, qu'autant qu'elles sont concentriques, on en conclut que les deux courbes proposées E et E′ ne sont autres que deux sections coniques semblables et semblablement placées et concentriques.

Théorèmes relatifs aux sections coniques concentriques et semblables.

342 *bis*. 1° Si l'on coupe deux surfaces Σ et Σ′ par un plan P et qu'on obtienne deux courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}_1$ telles que l'on sache que la courbe $\mathfrak{C}$ est une section conique et que l'on ait démontré que la courbe $\mathfrak{C}_1$ jouit de la propriété suivante, savoir : que menant une tangente quelconque θ à cette courbe $\mathfrak{C}_1$, et coupant la section conique $\mathfrak{C}$ en deux points q et q', le point m de contact des lignes θ et $\mathfrak{C}_1$ est le milieu de la corde $\overline{qq'}$, alors on peut affirmer que la courbe $\mathfrak{C}_1$ n'est autre qu'une section conique concentrique et semblable à la section conique $\mathfrak{C}$.

Dans ce cas la section conique $\mathfrak{C}$ enveloppe la courbe $\mathfrak{C}_1$ ou, en d'autres termes, lui est *extérieure*.

2° Si l'on coupe deux surfaces Σ et Σ′ par un plan P et qu'on obtienne deux courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}_1$ telles que l'on sache que la courbe $\mathfrak{C}$ est une section conique et que

la courbe $\mathfrak{E}_1$ jouit de la propriété suivante, savoir : que si l'on mène une tangente quelconque θ à la section conique $\mathfrak{E}$, cette droite θ coupe la courbe $\mathfrak{E}_1$ en deux points p et p' tels que désignant par m le point de contact des lignes θ et $\mathfrak{E}$ on a $\overline{pm}=\overline{p'm}$; alors on peut affirmer que la courbe $\mathfrak{E}_1$ n'est autre qu'une section conique concentrique et semblable à la courbe $\mathfrak{E}$; dans ce cas la section conique $\mathfrak{E}$ est enveloppée par la courbe $\mathfrak{E}_1$ ou, en d'autres termes, la section conique $\mathfrak{E}$ est *intérieure* par rapport à la courbe $\mathfrak{E}_1$.

Premier cas. Considérons divers points m, m_1, m_2, de la courbe $\mathfrak{E}_1$ et les tangentes à cette courbe $\mathfrak{E}_1$, savoir :

θ tangente en m et coupant $\mathfrak{E}$ aux points p et p',
θ_1 tangente en m_1 et coupant $\mathfrak{E}$ aux points p_1 et p_1',
θ_2 tangente en m_2 et coupant $\mathfrak{E}$ aux points p_2 et p_2',
etc., etc., etc.

par hypothèse on a : $\overline{mp}=\overline{mp'}$, $\overline{m_1p_1}=\overline{m_1p_1'}$, $\overline{m_2p_2}=\overline{m_2p_2'}$, etc.

Cela posé :

On pourra prendre le centre o de la section conique $\mathfrak{E}$ (*fig.* 218 *a*) et construire une section conique δ tangente en m à la droite θ et concentrique et semblable à la courbe $\mathfrak{E}$.

On pourra évidemment construire une série de sections coniques δ_1, δ_2, etc., tangentes respectivement aux droites θ_1, θ_2, etc., en les points respectifs m_1, m_2, etc., et concentriques et semblables à la courbe $\mathfrak{E}$. On aura donc une série de sections coniques $\delta, \delta_1, \delta_2$, etc., concentriques et semblables et tangentes à la courbe $\mathfrak{E}_1$, cette courbe $\mathfrak{E}_1$ sera donc *l'enveloppe* des diverses courbes $\delta, \delta_1, \delta_2$, etc.

Et comme la courbe $\mathfrak{E}_1$ existe, elle doit impérieusement être *l'enveloppe* des diverses courbes $\delta, \delta_1, \delta_2$, etc.; ces courbes $\delta, \delta_1, \delta_2$, etc., doivent donc forcément être telles que cette condition se trouve remplie.

Or il est évident que cette condition ne peut être remplie, qu'autant que les diverses sections coniques, $\delta, \delta_1, \delta_2$, etc., ne sont qu'une seule et même section conique δ, concentrique et semblable à la section conique $\mathfrak{E}$; et cela devient d'autant plus évident que l'on sait que les *enveloppées* successives $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$ d'une *enveloppe* $\mathfrak{E}_1$ doivent se couper deux à deux en des points qui appartiennent à cette *enveloppe* $\mathfrak{E}_1$. Or (dans le cas actuel) les courbes $\delta, \delta_1, \delta_2$, etc., ne peuvent se couper puisqu'elles sont concentriques et semblables.

La courbe $\mathfrak{E}_1$ n'est donc autre que la section conique δ; donc, etc.

Deuxième cas. Considérons un point quelconque m (*fig.* 218 *b*) de la section conique $\mathfrak{E}$. La tangente θ en m coupe la courbe $\mathfrak{E}_1$ en les points q et q' et par hypothèse on a : $\overline{mq}=\overline{mq'}$; et cela subsiste pour tous les points m de la courbe $\mathfrak{E}$; pre-

nons le centre o de la section conique $\mathcal{C}$; menons la droite oq', elle coupera $\mathcal{C}$ en r'; menons $r'r$ parallèle à qq', elle coupera $\mathcal{C}$ en r'; joignons les points o et m, on aura une droite om coupant la corde $\overline{rr'}$ en un point s qui sera le milieu de $\overline{rr'}$; unissons les points o et r, on aura une droite or coupant la droite θ en un point q_1, et comme $\overline{sr} = \overline{sr'}$, on aura $\overline{mq'} = \overline{mq_1}$.

Mais par hypothèse $\overline{mq'} = \overline{mq}$; donc les points q et q_1 se confondent.

Or l'on a : $or : oq :: or' : oq'$ (et cela aura lieu pour tous les points m de la courbe $\mathcal{C}$), donc les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont semblables et concentriques.

Or la courbe semblable à une section conique est une section conique du même genre.

Donc les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont deux sections coniques, concentriques et semblables.

3° Traçons sur un plan deux hyperboles H″ et H′ concentriques et semblables; ces courbes auront pour centre commun le point o et pour asymptotes communes les droites A et B; d'un point s de l'hyperbole extérieure H″ menons deux tangentes à l'hyperbole intérieure H′, on aura la corde de contact mn et le point x (milieu de la corde mn), le point s et le centre o seront sur un diamètre commun aux courbes H″ et H′ et coupant l'hyperbole H′ au point p.

Cela posé (*fig.* 218 *c*) :

Prenons sur la courbe H″, un point s' successif et infiniment voisin du point s. Le diamètre os' sera le successif du diamètre os et coupera l'hyperbole H′ en un point p' successif du point p.

Si du point s' on mène deux tangentes à la courbe H′, la corde $m'n'$ sera la successive de la corde mn, et dès lors son milieu x' sera un point successif du point x milieu de la corde mn. Si donc l'on unit les divers points x, x', etc., on aura une courbe H. Démontrons que les cordes mn, $m'n'$, etc., sont des tangentes successives de la courbe H.

Puisque s et s' sont des points successifs, ils donnent l'élément rectiligne de la courbe H″, élément qui prolongé donnera la tangente θ'' à cette courbe H″ au premier point s.

Or l'on sait que la tangente θ'' et la corde mn sont parallèles.

Puisque les points p et p' sont successifs ils donnent l'élément rectiligne de la courbe H′, élément qui prolongé donnera la tangente θ' à cette courbe H′ et au premier point p.

Or l'on sait que la corde mn, et les tangentes θ' et θ'' sont parallèles; le diamètre os' coupera donc la corde mn en un point x' qui sera le successif du point x.

Si l'on prenait un troisième point s'' sur H$''$ et successif du point s', on aurait une corde $m''n''$ successive de $m'n'$ et la coupant en un point x'' successif du point x'.

Et comme le point s' serait le premier point de l'élément rectiligne $s's''$, il s'ensuivra que le diamètre os'' coupant l'hyperbole H$'$ en un point p'', le point p' sera le premier point de l'élément rectiligne $p'p''$ et dès lors le point x'' en lequel se coupent les cordes successives $m'n'$ et $m''n''$ sera le successif du point x' et le point x' sera le premier point de l'élément rectiligne $x'x''$.

La courbe H sera donc déterminée par ces divers points x, x', x'', etc., et les cordes $mn, m'n', m''n''$, etc., lui seront des tangentes successives. Donc, etc.

Or comme nous avons démontré que lorsque l'on avait deux courbes H$'$ et H telles que H$'$ étant une section conique, les tangentes $mn, m'n'$ aux points x, x', etc., de la courbe H, donnent $\overline{xm}=\overline{xn}, \overline{x'm'}=\overline{x'n'}$, etc. (n° 342 *bis* 1° et 2°), la courbe H est une section conique concentrique et semblable à la section conique H$'$, nous pouvons énoncer ce qui suit, car la démonstration précédente peut évidemment s'appliquer et aux ellipses et aux paraboles.

1. Si l'on a deux sections coniques concentriques et semblables E$''$ et E$'$, si de chacun des points de la courbe extérieure E$''$, on mène deux tangentes à la courbe intérieure E$'$, la courbe enveloppe des cordes de contact sera une section conique E concentrique et semblable aux courbes E$''$ et E$'$.

2. Si l'on a deux sections coniques E et E$'$ concentriques et semblables, si l'on mène des tangentes θ, θ'..... à la courbe intérieure E coupant la courbe extérieure E$'$ en les points m et n, m' et n', etc., et si l'on mène aux points m et n des tangentes ξ et ξ_1 à la courbe E$'$, ces tangentes ξ et ξ_1 se coupant en un point s; et si l'on mène aux points m', n' des tangentes ξ' et ξ'_1 à cette même courbe E$'$, ces tangentes ξ' et ξ'_1 se coupant en un point s'; et ainsi de suite.

Les divers points s, s', etc., seront sur une section conique E$''$ concentrique et semblable aux courbes E et E$'$.

Les théorèmes précédents peuvent se démontrer pour l'ellipse et la parabole sans avoir besoin de recourir à la théorie des *infiniment petits* comme nous venons de le faire ci-dessus.

Et en effet :

1° Étant données (*fig.* 218 *d*) deux cercles concentriques C$''$ et C$'$, si d'un point s du cercle extérieur C$''$ on mène deux tangentes au cercle C$'$, la courbe tangente à la corde de contact pq sera un cercle C concentrique aux cercles donnés C$''$ et C$'$.

Si donc l'on regarde les cercles concentriques C, C$'$, C$''$ comme les bases de trois cylindres de révolution $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$, ces cylindres seront coupés par un plan P suivant

trois ellipses concentriques et semblables E, E′, E″ (*fig.* 218 *e*) qui jouiront de la même propriété dont jouissent les cercles concentriques C, C′, C″.

2° Si l'on a deux paraboles concentriques et semblables P′ et P (*fig.* 218 *f*) et que l'on mène une tangente au point *m* à la courbe P, cette tangente coupera la parabole extérieure P′ en deux points *p* et *q*. Menant par le point *m* un diamètre commun aux paraboles P et P′ et qui dès lors sera parallèle à l'axe infini Z de ces deux paraboles, ce diamètre coupera la parabole P′ en un point *n*, et l'on sait que la tangente θ en *n* à la courbe P′ est parallèle à la corde *pq*.

Cela posé :

Si l'on mène aux points *p* et *q* des tangentes à la parabole P′, elles se couperont en un point *s* situé sur le diamètre *mn* prolongé.

Or l'on sait que prenant un diamètre *mn* pour axe des abscisses et la tangente θ pour axe des ordonnées, la sous-tangente $\overline{ms}$ est double de l'abscisse $\overline{mn}$, comme il sera démontré ci-après (n° 344 *bis*). On a donc $\overline{mn} = \overline{ns}$ et ce résultat aura lieu quel que soit le point *m* pris sur la parabole P.

Or comme P et P′ sont des paraboles identiques ou superposables, puisqu'on a établi pour condition, qu'elles étaient deux paraboles concentriques et semblables, il s'ensuit que si pour tout autre point *m′* de P on fait les mêmes constructions, on aura : $\overline{m'n'} = \overline{n's'}$ et comme on aura : $mn = m'n' =$ etc.,

Il s'ensuit que la courbe P″ lieu des points *s*, *s′*, etc., sera une parabole concentrique et semblable aux paraboles données P et P′. Donc, etc., et il se trouve en même temps démontré que les trois paraboles P, P′, P″ sont équidistantes entre elles.

342 *ter*. Sans avoir recours à l'*analyse* on peut démontrer rigoureusement que ***toute courbe dont les diamètres sont des lignes droites, n'est autre qu'une section conique.***

Et en effet :

1° Étant donnée une courbe C, dont on ignore la nature géométrique, mais qui jouit de la propriété d'avoir pour lignes diamétrales des lignes droites, je dis que cette courbe a nécessairement un centre situé à distance finie ou à l'infini.

Pour démontrer cette proposition, menons deux cordes parallèles *mn*, *pq*, leurs milieux seront sur une droite A et le milieu de toute corde parallèle à *mn* sera situé sur A.

Menons deux autres cordes parallèles *m′n′* et *p′q′*, leurs milieux seront sur une droite A′ et le milieu de toute corde parallèle à *m′n′* sera situé sur A′.

Les deux diamètres (*fig.* 218 *bis*) A et A′ se coupent en un point *o*; si par ce point *o* on mène une corde M parallèle à *mn*, ce point *o* en sera le milieu, et si par ce point *o* on mène une corde M′ parallèle à *n′m′*, ce point *o* en sera aussi le milieu;

or la corde M coupe la courbe C en deux points a et b, et la corde M′ coupe la courbe C en deux points a' et b', les cordes aa' et bb', ab' et ba', seront donc parallèles, leurs milieux seront donc sur deux droites P et P′ se croisant au point o, et toutes les cordes parallèles à aa' auront leurs milieux sur P, et toutes les cordes parallèles à ab' auront leur milieu sur P′.

Mais comme les quatre points a, a', b, b', forment un parallélogramme, il s'ensuit que le point o en est le centre et que les droites P et P′ sont respectivement parallèles aux côtés parallèles aa', bb', et $ab', a'b$, par conséquent la droite P coupe la courbe C en deux points s et r et le point o est le milieu de la corde sr, la droite P′ coupe la courbe C en deux points s' et r', et le point o est le milieu de la corde $s'r'$; les quatre points s, s', r, r' forment un parallélogramme dont le point o est le centre, les milieux des côtés parallèles seront donc sur deux droites R et R′ se coupant au point o et en leur milieu, et ainsi de suite.

Ainsi lorsque deux diamètres A et A′ se coupent, le point o de leur rencontre est le centre de la courbe C.

Si les droites A et A′ arbitrairement choisies étaient parallèles et si dès lors le point o était situé à l'infini, les droites A et A′ ne perceraient chacune la courbe C qu'en un point, et dès lors toutes les droites, P, P′..... et R, R′, etc., seront parallèles entre elles et aux droites A et A′; et en effet lorsque deux diamètres se croisent en un point o, nous avons démontré que tous les diamètres passaient par ce point o. Si donc deux diamètres se coupent à l'infini, tous les autres diamètres les couperont à l'infini, ou en d'autres termes leur seront parallèles.

2° *Trois points et le centre déterminent une ellipse ou une hyperbole;* désignons les trois points par a, b, c et le centre par o; sur les droites ao, bo, co, prenons des points a', b', c', tels que l'on ait $a'o = ao$, $b'o = bo$, $c'o = co$, les six points a, a', b, b', c, c' détermineront une ellipse ou une hyperbole, en effet : prenons dans l'espace un point s, menons les droites $sa, sa', sb, sb', sc, sc'$, et coupons la pyramide qui a pour sommet le point s et pour base l'hexagone $abca'b'c'$, dont les côtés opposés sont parallèles, par un plan Z, on aura un hexagone irrégulier $a_1b_1c_1a'_1b'_1c'_1$ dont les côtés opposés iront se couper en trois points situés en ligne droite.

On pourra donc faire passer une section conique E et une seule par les six points $a_1b_1c_1a'_1b'_1c'_1$ puisqu'ils satisfont à la condition de l'hexagramme de Pascal, le cône Δ qui aura pour base la section conique E et pour sommet le point s sera donc coupé par le plan Z suivant une section conique E′ passant par les six points $abca'b'c'$, donc, etc.

Mais il faut admettre que tout cône ayant pour base une section conique E, (ce cône n'étant pas de révolution), est toujours coupé par un plan suivant une section conique, proposition que nous démontrerons un peu plus loin.

3° *Trois points et la direction de l'axe infini déterminent une parabole;* désignons par a, b, c, les trois points donnés et par A la droite à laquelle l'axe infini de la parabole doit être parallèle, désignons par X le plan sur lequel se trouvent placés la droite A et les trois points. Prenons un point s hors du plan X et menons par ce point s une droite G parallèle à A et les trois droites sa, sb, sc, et par la droite G un plan Q parallèle au plan X. Coupons les quatre droites par un plan Z, nous aurons les quatre points g, a', b', c'; ce plan Z coupera en outre le plan Q suivant une droite Θ passant par le point g; les quatre points et la droite Θ détermineront une section conique (et une seule) E passant par ces quatre points et ayant Θ pour tangente au point g (n° 383 *quater*) et le cône Δ (oblique et non de révolution) ayant E pour base et s pour sommet sera coupé par le plan X suivant une parabole passant par les points a, b, c, et ayant son axe infini parallèle à la génératrice G du cône Δ, ainsi que nous le démontrerons plus loin (n° 346).

Ce qui précède étant posé, démontrons la proposition énoncée, savoir : qu'une courbe C, qui a des droites pour lignes diamétrales et un centre o, n'est autre qu'une section conique, *ellipse* ou *hyperbole*.

Prenons sur la courbe C trois points a, b, c, unissons les points a et b et par le point c menons une parallèle à la corde ab et coupant la courbe C au point d. Par hypothèse (en tant que considérant la courbe C) les points milieux des cordes parallèles ab et cd et le point o sont en ligne droite.

Mais par les trois points a, b, c, on peut faire passer une section conique E ayant le point o pour centre, le point d sera donc sur la courbe E, puisque les courbes E et C ont même centre o et même diamètre par rapport à la corde ab. Si par les trois points a, b et d on fait passer une section conique E' ayant le point o pour centre, elle ne sera autre que E puisque E et E' ont même centre o et trois points communs a, b, d. Unissant les points a et d et menant par le point b une parallèle à la corde ad, cette parallèle coupera la courbe C en un point e, et les milieux des cordes ad et be seront en ligne droite avec le centre o, le point e sera donc aussi un point de la section conique E laquelle passe dès lors par les cinq points $abcde$ de la courbe C; en continuant de la même manière on voit que la section conique E passera par tous les points de la courbe C, que cette courbe C n'est donc autre qu'une section conique ayant un centre, elle n'est donc autre qu'une ellipse ou une hyperbole.

Si la courbe C avait tous ses diamètres parallèles entre eux, elle ne serait autre qu'une parabole; et en effet, désignons par A la droite à laquelle se trouvent parallèles tous les diamètres rectilignes de la courbe C et prenons sur C trois points a, b, c.

Par ces trois points nous pourrons faire passer une parabole P ayant son axe infini parallèle à A.

Joignons les points a et b, menons par le point c une parallèle à la corde ab, la droite passant par le point c coupera la courbe C au point c', les milieux des cordes ab et cc', seront par hypothèse (en tant que considérant la courbe C) sur une droite parallèle à A, le point c' appartiendra donc en même temps à la courbe C et à la parabole P.

En prenant les trois points a,b,c' et joignant ac' et menant par b une parallèle bb' à ac' et coupant la courbe C au point o, on aurait une parabole P' qui ne serait autre que P, et l'on trouverait que la section conique P a en commun avec la courbe C les points a, b, c', et ainsi de suite.

La parabole P passe donc par les divers points de la courbe C, donc, etc.

La proposition précédente nous servira lorsque nous chercherons les propriétés dont jouissent les surfaces du second ordre.

De la transformation cylindrique d'une section conique en une autre section conique.

343. Soit une ellipse E (*fig.* 219) comprise entre les tangentes parallèles T, T_1; coupons ces tangentes par une droite quelconque $a'b'$; par les divers points c, d, o, e, g, du diamètre ab (conjugués des tangentes T et T_1) menons des parallèles à T et qui coupent $a'b'$ aux points c', d', o', e', g'; par ces points et sous un angle quelconque menons des droites parallèles entre elles sur lesquelles nous prendrons des longueurs telles qu'on ait

$$ch : c'h' :: dk : d'k' :: ol : o'l' :: \ldots\ldots$$

Par tous les points $a', h', k', \ldots\ldots$ faisons passer une courbe E', je dis que cette courbe est une ellipse. En effet soit une droite quelconque rs passant par le centre o, les transformés des points r', o, s, sont r', o', s', points qui sont en ligne droite; et en effet, les triangles roi, soj sont égaux, donc $oi = oj$, donc aussi $o'i' = o'j'$, mais $ir = js$ et $ir : i'r' :: js : j's'$, donc $i'r' = j's'$; de plus $\widehat{r'i'o'} = \widehat{s'j'o'}$, donc les triangles $o'i'r'$ et $o'j's'$ sont égaux, par conséquent $\widehat{r'o'i'} = \widehat{s'o'j'}$, donc enfin les droites $r'o'$ et $o's'$ ne forment qu'une seule et même ligne droite, et de plus on a $o'r' = o's'$.

La même démonstration s'applique évidemment à tous les autres diamètres de l'ellipse E, donc le point o' divise en deux parties égales toutes les cordes de E' qui y passent. Soit maintenant une droite pcq parallèle au diamètre rs, les points p, c, q se transforment en p', c', q' et je dis que ces points sont en ligne droite, car les triangles semblables cup, cvq donnent $cu : cv :: up : vq$; mais

$cu:cv::c'u':c'v'$ et $up:vq::u'p':v'q'$; donc $c'u':c'v'::u'p':v'q'$; d'ailleurs les angles $\widehat{p'u'c'}$ et $\widehat{c'v'q'}$ sont égaux, donc les triangles $p'u'c'$ et $q'v'c'$ sont semblables, donc $\widehat{p'c'u'}=\widehat{q'c'v'}$, et dès lors $p'c'$ et $c'q'$ sont en ligne droite. Je dis de plus que $p'q'$ est parallèle à $r's'$, en effet les triangles ori et cpu sont semblables et donnent $oi:cu::ir:up$; mais $oi:cu::o'i':c'u'$ et $ir:up::i'r':u'p'$; donc $o'i':c'u'::i'r':u'p'$; de plus $\widehat{o'i'r'}=\widehat{c'u'p'}$; donc les triangles $o'r'i'$ et $c'u'p'$ sont semblables et $\widehat{r'o'i'}=\widehat{p'c'u'}$, et par conséquent $r's'$ et $p'q'$ sont parallèles. Donc toutes les cordes parallèles entre elles de l'ellipse E se transforment en des cordes parallèles entre elles de la courbe E′ et les tangentes de E se transforment aussi en des tangentes de E′ parallèles au diamètre conjugué de celui qui passe par le point de contact.

Par ce qui précède, on voit de suite que l'on pourra faire passer sur la courbe E′, toutes les propriétés de l'ellipse E, qui ne sont pas métriques; ainsi on pourra faire passer de la courbe E sur la transformée E′ toutes les propriétés de relation de position; ainsi ayant démontré qu'une droite D se transforme en une droite D′ et que deux droites A et B se coupant en un point o, se transforment en deux droites A′ et B′ se coupant en un point o' qui est le transformé du point o, on voit de suite que toutes les propriétés de l'hexagramme de Pascal subsisteront pour la transformée E′ comme pour la courbe primitive E. Dès lors si l'on prend cinq points arbitraires sur la courbe E′ on pourra, au moyen de l'hexagramme de Pascal, retrouver un sixième point appartenant à cette courbe E′.

Les deux courbes E et E′ sont évidemment de même espèce et par conséquent la courbe E′ est une ellipse.

Il est évident que des raisonnements semblables seraient applicables si la courbe E était une parabole ou une hyperbole. Donc la transformée d'une section conique est une section conique de même espèce.

Il n'est pas nécessaire que les droites aa' et bb' soient tangentes à l'ellipse E, on peut les mener sous telle inclinaison que l'on voudra, pourvu qu'elles soient parallèles entre elles (*fig.* 220). Si l'on prend une corde quelconque zy conjuguée du diamètre ab et le coupant en un point x, si l'on mène xx' parallèle à aa' et coupant la droite quelconque $a'b'$ en x' et menant par x' la droite $y'z'$ sous tel angle que l'on voudra et prenant $x'y':xy::o'c':oc::$.......; si par tous les points $a', y', c', b', d',$......... on fait passer une courbe E′, on démontrera encore, comme précédemment, que cette courbe E′ est une ellipse, et si au lieu de l'ellipse E on prenait une parabole ou une hyperbole, on trouverait aussi que la courbe E′ est une parabole ou une hyperbole.

Remarquons que rien dans la démonstration ne suppose que les droites de transformation soient dans le plan de la courbe E, il suffit que la courbe E′ soit plane

et que les droites de transformation soient parallèles entre elles, on peut donc construire la transformée E′ partout où l'on voudra dans l'espace.

344. Ce qui précède permet de démontrer le théorème suivant relatif à la parabole.

Étant donnée une parabole P (*fig.* 220 *a*) ayant pour sommet le point s et pour axe infini la droite Z, si de chaque point m de la parabole P on abaisse une perpendiculaire mp sur Z, si en chaque point m on mène une tangente T à la parabole P et coupant l'axe Z au point r, si ensuite on mène par chaque point p des droites parallèles entre elles et faisant avec mp un angle arbitraire α, et si sur ces droites on prend des points m_1 tels que l'on ait $\frac{pm_1}{pm}=\text{constante}=K$, tous les points m_1 donneront une parabole P_1 passant par le point s sommet de la parabole P et la tangente T en m à P sera transformée en une tangente T_1 en m_1 à P_1 et T_1 coupera l'axe Z au point r en lequel la tangente T le coupait.

Et la tangente θ au sommet s de la parabole P, laquelle tangente était parallèle à mp, sera transformée en une droite θ_1 parallèle à pm_1 et tangente en s à la parabole P_1; or pour la parabole P, on a démontré (n° 324) que l'on avait $\overline{pr}=2.\overline{ps}$, la même chose aura lieu pour la parabole P_1 en vertu du mode de transformation *cylindrique*, on peut donc énoncer ce qui suit :

Étant donnée une parabole P_1 et un de ses diamètres Z la coupant au point s, ayant construit pour le point s la tangente θ_1, si l'on prend un point m_1 sur cette courbe P_1 et que l'on mène l'ordonnée pm_1 parallèle à θ_1 (la droite Z étant l'axe des abscisses); si ensuite on mène en m_1 la tangente T_1 à la courbe P_1 et coupant l'axe Z des abscisses au point r; on aura : $\overline{pr}=2.\overline{ps}$; ce que l'on exprimera de la manière suivante :

La sous-tangente $\overline{pr}$ est double de l'abscisse $\overline{ps}$.

Ainsi se trouve démontré par *la méthode des projections*, le théorème que la sous-tangente est double de l'abscisse pour la parabole, que cette courbe soit rapportée à des coordonnées rectangulaires ou obliques, l'axe des abscisses dans le premier cas étant l'axe infini, et dans le second cas un diamètre de la courbe, et l'axe des ordonnées étant la tangente conjuguée de l'axe infini dans le premier cas et la tangente conjuguée du diamètre dans le second cas.

344 *bis*. Comme cas particulier on peut supposer les droites aa', xx'....... perpendiculaires au plan de la courbe E, $a'b'$ ayant d'ailleurs telle inclinaison que l'on voudra sur ce plan; on peut aussi diriger les droites $z'y'$, $c'd'$....... sous telle inclinaison que l'on voudra, mais de manière que les droites yy', zz', cc'..... soient encore perpendiculaires au plan de la courbe E, l'on obtiendra de même une ellipse E′, mais alors l'ellipse E sera la projection orthogonale de l'ellipse E′. Si

la courbe E, au lieu d'être une ellipse, était une parabole ou une hyperbole, la courbe transformée E′ serait aussi une parabole ou une hyperbole. Donc la projection orthogonale (sur un plan) d'une section conique est une section conique de même espèce.

Les droites aa', xx', yy'......... peuvent cesser d'être perpendiculaires au plan de la courbe E, mais rester toujours parallèles entre elles, la courbe E sera alors une projection cylindrique oblique de E′. Donc toute projection cylindrique (sur un plan) d'une section conique est une section conique du même genre.

345. Il résulte encore de là *qu'un cylindre à base section conique est toujours coupé par un plan, suivant une section conique du même genre que la base* (*).

(*) De ce qui précède on peut conclure ce qui suit :

1° Si l'on a un cercle C, si l'on trace un diamètre B de ce cercle, si de chaque point m de ce cercle on abaisse une perpendiculaire N sur le diamètre B et le coupant en un point p, et si l'on prend sur la droite N un point m, tel que l'on ait :

$$\frac{pm}{pm_1} = K$$

tous les points m_1 ainsi obtenus détermineront une courbe E qui sera une ellipse.

L'ellipse E aura son grand axe égal au diamètre B du cercle C, si K est < 1 ; et si au contraire K est > 1, le diamètre B sera le grand axe de cette ellipse E.

2° Si l'on a deux cercles C et C′ situés sur un même plan, ou dans des plans parallèles, ou dans des plans se coupant suivant une droite D : si l'on mène dans chaque cercle un diamètre perpendiculaire à la droite D et ainsi un diamètre B pour le cercle C et le diamètre B′ pour le cercle C′.

Les ellipses E et E′, transformées cylindriques (par des droites parallèles à D) des cercles C et C′, seront semblables.

3° Si l'on a un cercle C tracé dans un plan M et un plan P coupant le plan M suivant une droite Y, si de chaque point m du cercle C on abaisse sur le plan P une perpendiculaire N et le perçant en un point p.

Si sur la droite N on prend un point m_1 tel que l'on ait $\frac{mp}{mp_1} = K$, le *lieu* de tous les points m_1 sera une ellipse E dont le plan M_1 passera par la droite Y.

En vertu de ce qui vient d'être énoncé, on peut transformer facilement le tore régulier *circulaire* (n° 328 *déci*, page 100) en un tore régulier *elliptique*, et les trois tores irréguliers *circulaires* (n° 328 *déci*, 1er, 2e, 3e cas) en trois nouveaux tores irréguliers *elliptiques*.

Et en effet :

En nous rappelant le mode de génération des tores circulaires et en conservant la même notation (n° 328 *déci*.), l'on voit : 1° que les cercles situés dans les plans passant par l'axe Y se transformeront en des ellipses dont les plans passeront tous par ce même axe Y, le plan de chaque ellipse étant différent du plan du cercle dont elle est la transformée cylindrique.

Et 2° que les cercles situés dans les divers plans qui se coupent suivant la droite D se transformeront en des ellipses toutes semblables entre elles et chacune d'elles étant située dans le plan du cercle dont elle est la transformée cylindrique. Mais il ne faut pas oublier que les droites de transformation sont toutes perpendiculaires au plan mené par l'axe Y perpendiculairement à la droite D.

345 *bis*. Concevons sur le plan horizontal (*fig.* 220 *bis*) une ellipse E dont le grand axe soit perpendiculaire à la ligne de terre LT. Regardons cette courbe E comme la section droite d'un cylindre vertical Σ et coupons ce cylindre Σ par un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection, ayant soin de prendre pour trace H' le grand axe de l'ellipse E.

D'après ce qui précède, le plan P, quelle que soit son inclinaison sur le plan horizontal, coupera le cylindre Σ suivant une ellipse E' qui se projettera sur le plan horizontal en la courbe E. Parmi tous les systèmes de diamètres conjugués de E', il en existera un et un seul dans lequel les diamètres conjugués seront rectangulaires entre eux et seront dès lors les axes de l'ellipse de section E'; or il est évident que si l'on fait passer deux plans verticaux et respectivement par les axes de l'ellipse E, ces deux plans Q et Q' couperont le plan P (quelle que soit l'inclinaison de ce plan P) suivant deux droites A et A' qui seront rectangulaires entre elles.

Or si par les extrémités des axes de l'ellipse E, on fait passer des génératrices droites du cylindre Σ et que l'on mène les quatre plans tangents au cylindre Σ passant respectivement par ces quatre génératrices, ces plans tangents couperont le plan horizontal suivant quatre droites formant un rectangle circonscrit à l'ellipse E et dont les côtés seront tangents en les sommets de cette ellipse E; et de même ces plans tangents couperont le plan P suivant un rectangle circonscrit à l'ellipse E' et dont les côtés seront deux à deux parallèles aux droites A et A', et ce rectangle aura ses côtés tangents à l'ellipse E' en les quatre sommets de cette courbe E'.

Cela posé, on peut demander si le plan P ne peut pas avoir sur le plan horizontal une inclinaison α telle que la section E' soit un cercle.

Pour que E' soit un cercle il faut que ses deux axes soient égaux en longueur.

Or, en désignant par a et b les demi-axes de l'ellipse E (a étant le demi grand axe) et par a_1 et b_1 les demi-axes de l'ellipse E' (a_1 étant le demi grand axe) et par α l'angle que le plan P fait avec le plan horizontal, on a :

$$a = a_1 \quad \text{et} \quad b = b_1 \cos\alpha.$$

Pour que l'ellipse E' soit un cercle il faudra que l'on ait $b_1 = a_1 = a$ et dès lors on devra avoir :

$$\cos\alpha = \frac{b}{a}$$

L'angle α pourra donc être construit de la manière suivante.

Faisant passer un plan vertical M par le petit axe de l'ellipse E, ce plan coupera

le cylindre Σ suivant deux génératrices droites G et G′ ; si du centre o de l'ellipse E et avec un rayon égal à a (ou au demi grand axe de la courbe E) on décrit dans le plan M un cercle δ, ce cercle coupera la droite G en deux points x et x' également distants du plan horizontal et l'angle que la droite xo ou $x'o$ fera avec le plan horizontal sera l'angle α demandé.

Ceci démontre qu'un cylindre qui a pour section droite une ellipse, peut être coupé suivant un cercle de deux manières différentes par un plan. Ces sections sont dites *les sections circulaires* du cylindre elliptique, ou *sections anti-parallèles*.

Ayant déterminé l'angle α que doit faire le plan P avec le plan horizontal pour que ce plan P puisse couper le cylindre elliptique Σ suivant un cercle, on peut faire tourner ce plan P autour de H^P comme charnière pour le rabattre sur le plan horizontal; alors le cercle de section E′ se rabattra en un cercle E_1 tracé sur le grand axe de l'ellipse E comme diamètre, et l'on pourra construire la tangente en un point m de l'ellipse E en regardant cette ellipse comme la projection horizontale du cercle E′ rabattu en le cercle E_1.

Et les constructions seront identiquement les mêmes que celles que nous avons effectuées lorsque nous avons considéré un cercle C comme la projection d'une ellipse E, le petit axe de cette ellipse étant un diamètre du cercle C, car il suffit de remplacer le cercle C section droite du cylindre de révolution par l'ellipse E section droite du cylindre oblique et l'ellipse C′ section du cylindre de révolution par le plan P par le cercle E′ section du cylindre oblique par le plan P.

On pourra donc par cette nouvelle considération (du cercle tracé sur le grand axe d'une ellipse comme diamètre), résoudre les problèmes suivants.

1° En un point m d'une ellipse E construire la tangente (*fig.* 220 *ter*).

2° Par un point p pris hors d'une ellipse E construire les deux tangentes à l'ellipse (*fig.* 220 *quat.*).

3° Construire une tangente à une ellipse E parallèle à une droite donnée D (ou faisant un angle α avec une droite donnée) (*fig.* 220 *quint.*).

345 *ter*. Soit donnée une ellipse E sur le plan horizontal, désignons le demi petit axe $\overline{oi}$ par b et le demi grand axe $\overline{ok}$ par a; prenons deux lignes de terre, l'une LT parallèle au grand axe, et l'autre L′T′ parallèle au petit axe de l'ellipse E.

Décrivons sur le petit axe comme diamètre un cercle C et sur le grand axe aussi comme diamètre un cercle C′;

Cela posé,

Considérons le cercle C comme la section droite d'un cylindre vertical de révolution Σ et l'ellipse E comme le rabattement sur le plan horizontal de l'ellipse

de section faite dans le cylindre Σ par un plan P passant par le petit axe $\overline{2b}$ de l'ellipse E.

Considérons l'ellipse E comme la section droite d'un cylindre vertical et non de révolution Σ' et le cercle C', comme le rabattement sur le plan horizontal du cercle de section faite dans le cylindre Σ' par un plan R passant par le grand axe $\overline{2a}$ de l'ellipse E.

Cela posé,

Je dis que les plans P et R font avec le plan horizontal des angles égaux; et en effet :

Pour le plan P on aura $\cos\alpha = \frac{b}{a}$ et pour le plan R on aura :

$$\cos\alpha' = \frac{b}{a}, \text{ donc } \alpha = \alpha'.$$

Prenons un point m sur l'ellipse de section située dans le plan P, m^h sera sur le cercle C et m^v sur V^v.

Du point m^h abaissons deux perpendiculaires l'une m^h sur le demi grand axe ok et l'autre m^hp sur le demi petit axe de l'ellipse E, on aura :

$$\cos\alpha = \frac{\overline{qm^h}}{\overline{o^vm^v}} \quad \text{ou} \quad \cos\alpha = \frac{\overline{or}}{\overline{o^vm^v}}$$

Rabattant le plan P sur le plan horizontal, le point m viendra se placer en m' sur l'ellipse E et les trois points q, m^h et m' seront en ligne droite.

Abaissons du point m', une perpendiculaire $m'q$ sur le demi grand axe ok de l'ellipse E, on aura $oq = o^vm^v$, donc on peut écrire :

$$\cos\alpha = \frac{\overline{or}}{\overline{oq}}$$

Considérons maintenant le point m' de l'ellipse E comme la projection horizontale n^h d'un point n situé sur le cercle de section du plan R et du cylindre oblique Σ'.

Le point n après le rabattement du plan R sur le plan horizontal viendra en n' sur le cercle C' section circulaire (rabattue) du cylindre Σ' et les trois points q, n^h (ou m'), et n' seront en ligne droite.

Or on a :

$$\cos\alpha = \frac{\overline{n^hq}}{\overline{o^{w}n^{w}}}$$

Et comme $n^h q = m^h r$

Et que $o^{v'} n^{v'} = n'q$, on pourra écrire :

$$\cos \alpha = \frac{\overline{m^h r}}{\overline{n'q}}$$

On a donc la proportion :

$$\frac{m^h r}{n'q} = \frac{or}{oq}$$

Par conséquent les trois points o, m^h et n' sont en ligne droite. De là on déduit une construction simple et par *points* d'une ellipse dont on connaît les axes et qui est la suivante :

Étant donné le centre o de l'ellipse et ses deux demi-axes oi et ok, ayant tracé les deux cercles concentriques C et C′ sur chacun des axes comme diamètre, on mènera un rayon quelconque par le centre o, ce rayon coupera le cercle C au point n et le cercle C′ au point n'.

Du point n on mènera une perpendiculaire np au petit axe, du point n' on mènera une perpendiculaire $n'q$ au grand axe de l'ellipse E à tracer, ces deux perpendiculaires se couperont en un point m qui appartiendra à l'ellipse E.

Si l'on mène en n et n' les tangentes aux cercles C et C′ on aura deux droites parallèles entre elles comme étant perpendiculaires au même rayon $\overline{onn'}$. La tangente au cercle C coupera le petit axe (prolongé) de l'ellipse E au point s; la tangente au cercle C′ coupera le grand axe (prolongé) de l'ellipse E au point s' et la droite ss' sera tangente au point m à l'ellipse E.

345 *quater*. Si l'on a une série d'ellipses E, E′, E″, etc. (*fig.* 220 *a*), ayant un diamètre commun qr et leurs diamètres conjugués de qr, situés sur une même droite A, ces ellipses auront évidemment même centre o; de plus elles auront en les points q et r mêmes tangentes. Cela posé : si l'on mène une droite B parallèle à la droite A, et coupant les courbes en les points m, m', m'', etc., et si l'on mène en chacun de ces points une tangente à chacune des ellipses, je dis que toutes ces tangentes iront se couper en un seul et même point p situé sur le diamètre commun qr prolongé.

Et en effet :

Nous pouvons concevoir l'ellipse E comme la base sur le plan horizontal d'un cylindre oblique et elliptique Σ dont les génératrices droites se projetteront horizontalement suivant des droites parallèles à A; la droite B pourra donc être considérée comme étant la projection G^h de la génératrice G passant par le point m de la base E.

Chacun des points m', m'', etc., pourra être considéré comme la projection hori-

zontale des points x', x'', etc., en lequel la droite G est coupée respectivement par des plans sécants X, X', X'', etc., ayant pour trace horizontale commune le diamètre *qr*.

Or tous ces plans X, X', X'', etc., coupent le cylindre oblique suivant des ellipses δ', δ'', δ''', etc., qui se projetteront sur le plan horizontal suivant des ellipses E', E'', E''', etc., et la tangente θ au point *m* de la base E du cylindre Σ peut être considérée comme la trace H^r du plan T tangent à Σ tout le long de la droite G.

Dès lors les tangentes θ', θ'', θ''', etc., aux points m', m'', m''', etc., des ellipses E', E'', E''', etc., peuvent être regardées comme les projections horizontales des tangentes aux points x', x'', x''', etc., des ellipses de l'espace δ', δ'', δ''', etc., donc elles doivent se couper au point *p*.

Si l'on avait une série de paraboles P, P', P'', ayant même diamètre *qr* (*fig.* 220 *b*) et au point *q* une tangente commune G^h, la même propriété subsisterait : il suffit de regarder l'une des paraboles P (par exemple) comme la base d'un cylindre oblique et parabolique Σ dont les génératrices droites seront projetées horizontalement suivant des parallèles à la tangente commune G^h, et de regarder le diamètre commun *qr* comme la trace horizontale commune d'une série de plans sécants X, X', X'', etc., coupant le cylindre Σ suivant des paraboles δ', δ'', δ''', etc., projetées horizontalement en les paraboles données P', P'', P''', etc.

Si l'on avait une série d'hyperboles ayant un diamètre réel en commun, la même propriété subsisterait; mais dans ce cas on aurait à considérer un cylindre oblique et hyberbolique.

Si (*fig.* 220 *a*) on mène une droite *sx* coupant l'ellipse E en les points *x* et *y* et que par chacun de ces points on mène des droites parallèles à la droite A coupant les ellipses E', E'', etc., en les points x', y', et x'', y'', etc., il est évident que les cordes $\overline{x'y'}$ et $\overline{x''y''}$, etc., prolongées iront toutes passer par le point *s* en lequel le diamètre commun *qr* est coupé par la droite *sx*. Et en effet : on pourra considérer la droite *sx* comme la trace H^s d'un plan sécant R coupant le cylindre Σ suivant deux génératrices droites ayant leurs traces horizontales respectivement en les points *x* et *y*, etc.

La même chose aura lieu pour une série d'hyperboles ayant un diamètre réel commun; la même chose aura lieu pour une série de paraboles ayant un diamètre commun (*fig.* 220 *b*).

345 *quint*. Concevons une ellipse E tracée sur le plan horizontal et deux tangentes T et T' à cette ellipse, ces tangentes étant parallèles entre elles.

En un point *m* de E menons à cette courbe une tangente R.

Cela fait : concevons la courbe E comme la base ou la trace horizontale d'un cylindre Σ ayant ses génératrices droites G projetées horizontalement suivant des

parallèles aux tangentes T et T′; il est évident dès lors que ces droites T et T′ pourront être considérées comme les traces H^{Θ} et $H^{\Theta'}$ de deux plans verticaux Θ et Θ' tangents au cylindre Σ.

Par la droite R faisons passer une série de plans X′, X″, X‴, etc., lesquels couperont le cylindre Σ suivant des ellipses E′, E″, E‴, etc., qui évidemment se projetteront sur le plan horizontal en des ellipses E'^h, E''^h, E'''^h, etc., qui passeront toutes par le point *m* et auront en ce point *m* la droite R pour tangente commune et de plus ces ellipses seront tangentes aux droites T et T′.

Cela posé, il est évident par tout ce qui précède que :

1° Si l'on mène une droite Y parallèle aux droites T et T′ et coupant les courbes E'^h, E''^h, E'''^h, etc., en les points : e', e'_1 et e'', e''_1 et e''', e'''_1, etc., les tangentes à la courbe E'^h en les points e' et e'_1, les tangentes à la courbe E''^h en les points e'' et e''_1, et ainsi de suite, iront toutes concourir en un point *p* situé sur la droite R.

2° Si l'on mène deux droites Y et Y_1 parallèles aux droites T et T′, et coupant les ellipses E'^h, E''^h, E'''^h, etc., en des points situés respectivement, savoir :

y', x' et y'_1, x'_1 sur la courbe E'^h,
y'', x'' et y''_1, x''_1 sur la courbe E''^h,
y''', x''' et y'''_1, x'''_1 sur la courbe E'''^h,
etc. etc. etc.

les cordes $y'y'_1$, $x'x'_1$ et $y''y''_1$, $x''x''_1$ et $y'''y'''_1$, $x'''x'''_1$, etc., prolongées, iront se couper en un même point *q* situé sur la corde R.

La même chose aura lieu pour une série de paraboles et aussi pour une série d'hyperboles.

345 *sex.* Concevons une ellipse E, deux tangentes à cette ellipse et parallèles entre elles, savoir : T et T′ et une droite R coupant l'ellipse E en deux points *r* et *r′*, de telle sorte que la droite $\overline{rr'}$ se trouve être une corde de la courbe E.

D'après ce qui précède, il est évident que si l'on a une suite d'ellipses E'^h, E''^h, E'''^h, etc., tangentes aux droites T et T′ et passant toutes par les points *r* et *r′* :

1° Si l'on mène une droite Y parallèle aux droites T et T′, et coupant :

E'^h en les points e' et e'_1,
E''^h — e'' et e''_1,
E'''^h — e''' et e'''_1,
etc. — etc.

les tangentes en les points e', e'_1, e'', e''_1, etc., iront toutes concourir en un même point *p* situé sur la droite R;

2° Que si l'on mène deux droites Y et Y_1, parallèles entre elles et aux droites T et T', ces droites coupant, savoir :

Y la courbe E'^h en les points y' et x',
Y_1 — — y_1' et x_1',
Y la courbe E''^h en les points y'' et x'',
Y_1 — — y_1'' et x_1'',
etc. — — etc.

les cordes $y'y_1'$, $y''y_1''$, etc., et les cordes $x'x_1'$, $x''x_1''$, etc., prolongées, iront concourir en un même point q situé sur la droite R, ou, en d'autres termes, sur la corde $\overline{rr'}$ prolongée et commune à toutes les ellipses E, E'^h, E''^h, etc.

La même chose aura lieu pour une série de paraboles, et aussi pour une série d'hyperboles; mais lorsqu'on aura une série d'hyperboles, il faudra que les points r et r' soient : 1° tous deux situés sur une même branche de chacune des hyperboles; ou 2° situés, l'un r sur une branche et l'autre r' sur l'autre branche, et cela pour toutes les hyperboles.

345 *sept.* Les propriétés que nous venons de démontrer exister pour une série d'ellipses, ou une série de paraboles, ou une série d'hyperboles (n°s 345 *quater*, *quint.* et *sex.*) existent encore pour d'autres courbes entre lesquelles subsiste une condition particulière et qui est la suivante :

Concevons une courbe plane C arbitraire et une droite X située dans le plan de la courbe C et dans une direction arbitraire par rapport à cette courbe C.

Concevons une seconde droite Y dans le plan de la courbe C et coupant la droite X sous un angle arbitraire α.

De chacun des points m de la courbe C, menons une parallèle à la droite Y et coupant X en un point p, prenons sur la droite X un point o arbitraire; désignons $\overline{pm}$ par y et $\overline{op}$ par x, nous connaîtrons les diverses abscisses x et les diverses ordonnées y de la courbe C.

Cela posé :

Considérons deux points quelconques m et m' de la courbe C, nous connaîtrons les coordonnées x et y du point m, x' et y' du point m'. Unissons les deux points m et m' par une droite L, elle ira couper la droite X en un point l.

Cela posé :

Prenons sur y ou $\overline{mp}$ un point m_1 tel que $\frac{m_1p}{mp}=\delta$

Prenons sur y' ou $\overline{m'p}$ un point m_1' tel que $\frac{m_1'p}{m'p}=\delta$

La corde $\overline{m_1m'}$, prolongée ira couper la droite X au même point t; de là on peut conclure ce qui suit :

Étant donnée une courbe arbitraire C, si l'on construit une courbe C_1 telle que pour les mêmes abscisses comptées sur la droite X et à partir de la même origine o, les ordonnées correspondantes des courbes C et C_1 sont dans un rapport constant, les cordes $\overline{mm'}$ de C et $\overline{m_1m_1'}$ de C_1 passant par des points ayant mêmes abscisses iront concourir en un même point situé sur la droite X.

Et il est évident que cette propriété subsistant, quelle que soit la différence qui existe entre les abscisses x et x' des points m, m_1 et m', m_1' des courbes C et C_1, elle subsistera encore lorsque les points m et m' seront successifs et infiniment voisins, et que par suite les points m_1 et m_1' seront aussi successifs et infiniment voisins.

Si l'on a donc deux courbes C et C_1 telles que leurs ordonnées sont dans un rapport constant, pour deux points m de C et m_1 de C_1 ayant même abscisse x, les tangentes menées en les points m et m_1 à ces deux courbes C et C_1 iront concourir en un même point situé sur l'axe X des abscisses.

345 *octavo*. Nous savons que lorsque l'on a deux sections coniques de même espèce E et E' et ainsi deux ellipses ou deux paraboles ou deux hyperboles qui ont même axe aa' (*fig.* 220 *c*), et dès lors en leurs sommets a et a' mêmes tangentes θ et θ' pour une même abscisse $\overline{ay}$, les ordonnées gy et gy' sont dans un rapport constant, et que si d'un point s arbitrairement pris sur l'axe commun aa' prolongé on mène des tangentes sk, sl aux courbes E et E', les points de contact k et l sont sur une perpendiculaire à la droite $aa's$.

Il est évident que la droite kl prolongée (que nous désignerons par Y) est la *polaire* commune aux deux courbes E et E', le *pôle* étant le point s.

Cela posé : si par le point x, en lequel se coupent les droites Y et $\overline{aa'}$, on mène une droite quelconque xq coupant la courbe intérieure E en les points q et m, et si l'on mène la droite qs coupant E en p et la droite ms coupant E en n, le quadrilatère $pqmn$ ne sera autre qu'un trapèze régulier dont les côtés pm et qn seront parallèles et coupés par la droite aa' en leurs milieux v et h.

On peut toujours circonscrire un cercle C à un trapèze régulier.

Construisons ce cercle C coupant la droite Y aux points l et l'.

Je dis que les droites sl et sl' seront tangentes en l et en l' au cercle C.

Et en effet : le point s sera le *pôle* et la droite Y la *polaire* par rapport au cercle C, en vertu de la propriété des quadrilatères inscrits à une section conique.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit qu'il sera donc toujours possible de

construire une section conique E′ (de même genre que E) ayant même axe $\overline{aa'}$ que E et tangente en l et l' au cercle C.

Nous ferons usage de cette propriété, lorsque (chapitre XII) nous chercherons les *sections circulaires* des surfaces du second ordre.

La section plane du cône oblique est une section conique.

346. Un cône, non de révolution, à base section conique est toujours coupé par un plan de direction arbitraire suivant une section conique. En effet, soit s le sommet d'une surface conique (*fig.* 221) ayant pour base l'ellipse E, et soit un plan sécant P; on peut toujours choisir le plan vertical de projection perpendiculaire au plan P. Cela posé, menons à l'ellipse E deux tangentes perpendiculaires à LT et construisons une transformée E′ de l'ellipse E de manière qu'elle ait son grand axe $a'b'$ parallèle à LT; par le point s, abaissons une perpendiculaire au plan vertical de projection et coupant le plan vertical élevé sur $a'b'$ en un point s', et considérons le cône ayant son sommet en s' et pour base l'ellipse E′; ce cône est coupé par le plan P suivant une courbe C′, qui se déduit de la courbe C, intersection du cône (s, E) par le même plan P, de la même manière que E′ se déduit de E, car les deux surfaces coniques sont comprises entre deux plans tangents communs perpendiculaires au plan vertical de projection, donc les courbes C et C′ sont comprises entre deux tangentes perpendiculaires à ce plan; de plus, tout plan mené par la droite ss' coupe le plan P et le plan horizontal suivant des parallèles à cette droite, et les cordes des courbes C et C′ sont proportionnelles aux cordes des ellipses E et E′, mais toutes les cordes de ces ellipses situées sur des mêmes droites perpendiculaires à LT sont dans un rapport constant; donc aussi les cordes correspondantes des courbes C et C′ sont dans un rapport constant.

En outre, construisons l'hyperbole (K,K′) focale de l'ellipse E′; par le point s', menons une parallèle à la ligne de terre et coupant cette focale en s'' et considérons le cône de révolution ayant pour sommet ce point s'' et pour base l'ellipse E′; prenons deux points quelconques m', m_1' de la base commune E′, et conduisons les génératrices G' et G_1', G'' et G_1'' des deux surfaces coniques et aboutissant en ces points m' et m_1', les premières sont coupées par le plan P aux points x' et x_1', appartenant à la courbe C′; par ces points, menons des parallèles à LT ou à $s's''$ jusqu'à la rencontre de G'' et G_1'' aux points x'' et x_1''; les projections verticales x''^v et $x_1''^v$, sont sur une ligne droite passant par p (nº 105), on peut donc considérer cette droite comme la trace verticale d'un plan P′ perpendiculaire au plan vertical de projection, et coupant le cône de révolution (s'', E′) suivant une courbe

C″ déterminée par des points tels que x'' et x_1''. Cette courbe C″ se déduit de C′ par le procédé général de transformation indiqué ci-dessus et dit *transformation cylindrique*, elle en est la transformée, ou réciproquement C′ est la transformée de C″, mais C″ est une section conique (*), donc C′ est aussi une section conique. Enfin C′ est la transformée de C, ou réciproquement C est la transformée de C′, donc C est une section conique; les trois sections coniques C, C′, C″ sont de même espèce; mais C″ peut être une ellipse, une parabole, ou une hyperbole suivant la direction du plan sécant P′, donc aussi C peut être une ellipse, une parabole ou une hyperbole. Si maintenant on conçoit dans un cône à base elliptique une section parabolique et une section hyperbolique, il est évident que l'on pourra prendre l'une quelconque de ces trois courbes pour base et les autres pour des sections planes; donc en général les sections planes d'un cône à base section conique sont des sections coniques qui peuvent être de l'une des trois espèces, *ellipse*, *parabole*, *hyperbole*, quelle que soit la nature de la base.

Il résulte de là que *la projection conique d'une section conique quelconque est encore une section conique*, mais elle n'est plus nécessairement de même espèce que la section conique projetée.

346 *bis*. Concevons un cône oblique Σ ayant pour trace horizontale ou base sur le plan horizontal une section conique E, et pour sommet un point s de l'espace, et concevons que le point s soit tel que sa projection s^h soit en dehors de la courbe E, de sorte que l'on puisse de ce point s^h mener deux tangentes θ et θ' à la courbe E, les points de contact étant désignés par q et r.

Par la droite qr, faisons passer une suite de plans X′, X″, X‴, etc., chacun de ces plans coupera le cône Σ suivant une section conique $\delta', \delta'', \delta'''$, etc., qui se projettera horizontalement suivant une section E′, E″, E‴, etc., de même nature, c'est-à-dire que si δ' est une ellipse, E′ sera une ellipse; si δ'' est une parabole, E″ sera une parabole; si δ''' est une hyperbole, E‴ sera une hyperbole.

Or il est évident que toutes les projections E′, E″, E‴, etc., passeront par les point q et r, et auront en ces points pour tangentes communes les droites θ et θ', car ces droites θ et θ' peuvent être considérées comme les traces horizontales de deux plans verticaux T et T′ tangents au cône Σ, le premier suivant la génératrice droite sq, et le second suivant la génératrice sr.

Cela posé :

Si l'on mène par le sommet s un plan sécant et vertical Y, coupant le cône Σ suivant une génératrice G ayant pour trace horizontale le point m de la base E du cône Σ et pour projection G^h la droite s^hm (*fig.* 221 *bis*), cette droite G sera coupée

(*) Puisqu'elle est la section d'un cône de révolution par un plan.

par les plans X', X'', X''', etc., en des points qui se projetteront en les points m', m'', m''', etc., en lesquels les sections coniques E', E'', E''', etc., sont coupées par la droite $s^h m$. Et dès lors, il est évident que les tangentes $mp, m'p, m''p$, etc., menées aux points m, m', m'', etc., des courbes E, E', E'', etc., iront se couper en un point p situé sur la droite qr prolongée, car ces tangentes ne seront autres que les projections horizontales des intersections des plans X', X'', X''', etc., avec le plan tangent mené au cône Σ par la génératrice G.

D'après ce qui précède, il est évident que si l'on mène une droite arbitraire coupant la courbe E aux points x et y et la droite qr prolongée au point l, et si l'on mène les droites $s^h x$ et $s^h y$ coupant les courbes E', E'', E''', etc., aux points x', x'', etc., et y', y'', etc., les droites $x'y', x''y''$, etc., étant prolongées passeront toutes par le point l.

346 *ter*. Concevons une section conique E (ellipse, parabole ou hyperbole) et deux tangentes T et T' à cette courbe, ces deux tangentes se coupant en un point s^h et touchant la courbe E la première T au point t et la seconde T' au point t'.

Menons une droite R arbitraire et tangente à E en un point m.

Cela posé :

Concevons une série de sections coniques E'^h, E''^h, E'''^h, etc., tangente à R au point m et ayant pour tangentes les droites T et T'. Je dis que si l'on mène par le point s^h une droite K coupant les courbes E, E'^h, E''^h, etc., en les points e, e_1 et e', e'_1 et e'', e''_1, etc., les tangentes à E en les points e et e_1

E'^h	—	e' et e'_1
E''^h	—	e'' et e''_1
etc.,	—	etc.,

iront toutes concourir en un même point p situé sur la droite R qui est une tangente commune et en le point commun m aux diverses sections coniques E, E'^h, E''^h, E'''^h, etc. (qui pourront être indistinctement des ellipses, des paraboles, et des hyperboles).

Et en effet :

La courbe E pourra être considérée comme la base ou trace horizontale d'un cône Σ ayant pour sommet dans l'espace un point s ayant s^h pour projection horizontale ; les tangentes T et T' pourront être considérées comme les traces H^θ et $H^{\theta'}$ de deux plans verticaux Θ et Θ' tangents au cône Σ suivant les génératrices droites st et st' ; la droite R pourra être considérée comme la trace horizontale $H^{x'}, H^{x''}, H^{x'''}$, etc., d'une série de plans X', X'', X''', etc., coupant le cône Σ respectivement suivant des sections coniques E', E'', E''', etc., ayant pour projection horizontale les courbes E'^h, E''^h, E'''^h, etc., qui devront évidemment satisfaire aux conditions suivantes, savoir : passer toutes par le point m ; avoir toutes en ce

point m, la droite R pour tangente; et être tangentes aux droites T ou Hθ, T′ ou Hθ'. La droite K peut être considérée comme la projection horizontale G^h et $G_1{}^h$ de deux génératrices droites G et G_1 du cône Σ; dès lors la propriété énoncée ci-dessus n'est qu'une conséquence de la construction connue et employée lorsqu'il s'agit de mener la tangente en un point d'une section faite dans un cône par un plan.

Par la même raison, si par le point s^h on mène deux droites Y et Y_1 coupant les courbes E, E'^h, E''^h, etc., savoir : Y la courbe E en les points y et x

Y_1	—	y_1 et x_1
Y la courbe E'^h en les points		y' et x'
Y_1	—	y_1' et x_1'
etc.,	—	etc.,

les cordes yy_1, xx_1 et $y'y_1'$, $x'x_1'$, etc., étant prolongées iront concourir en un point q de la droite R.

346 *quater*. Concevons une section conique E (ellipse, parabole ou hyperbole), deux tangentes T et T′ à cette courbe et en les points t et t'; menons une droite R coupant E en les points r et r'; traçons une série de sections coniques E'^h, E''^h, E'''^h, etc. (ellipses, paraboles et hyperboles), passant par les points r et r' et tangentes aux droites T et T′; je dis : 1° si par le point s^h en lequel se coupent les droites T et T′ on mène une droite Y coupant les courbes E'^h, E''^h, E'''^h, etc., en les points y' et x', y'' et x'', y''' et x''', etc., les tangentes en ces divers points aux courbes sur lesquelles ils sont situés, iront concourir en un même point p situé sur la droite R, et 2° si par le point s^h on mène deux droites Y et Y_1 coupant les courbes E'^h, E''^h, E'''^h, etc., en les points y', x' et y'_1, x_1'; y'', x'' et y''_1, x''_1; y''', x''' et y'''_1, x'''_1; les cordes $y'y'_1$, $x'x'_1$; $y''y''_1$, $x''x''_1$; $y'''y'''_1$, $x'''x'''_1$; etc., iront (étant prolongées) concourir en un point q situé sur la droite R, ce qui est évident d'après ce qui a été dit (n° 346 *ter*.).

Construction d'une section conique satisfaisant à certaines conditions.

347. Pour construire une section conique (*fig.* 222) tangente à deux droites données A et B en les points a et b et passant par un point m compris dans l'angle des parties des droites A et B qui contiennent les points de contact, nous la considérerons comme la trace horizontale d'une surface conique ayant pour directrice un cercle C construit sur ab comme diamètre et situé dans un plan vertical, A et B étant les traces horizontales de deux plans verticaux tangents à cette surface, de sorte que la projection horizontale du sommet est en s^h. La génératrice G de cette surface conique passant par le point m, coupe le cercle C en un point x, dont

on trouve la hauteur au-dessus du plan horizontal en rabattant le plan du cercle C, d'où l'on déduit x^v, et joignant $x^v m^v$ nous aurons la projection G^v sur laquelle se trouve s^v; connaissant alors le sommet s et la directrice C de la surface conique il sera facile d'en construire autant de génératrices droites que l'on voudra et d'avoir les traces horizontales de toutes ces génératrices; et ces traces seront autant de points de la section conique demandée qui pourra être l'une des trois sections coniques.

Si les droites A et B (*fig.* 223) sont parallèles, le point s^h est transporté à l'infini, dès lors le cône est transformé en un cylindre, et G^h est parallèle aux droites données A et B; du reste les constructions sont les mêmes que dans le cas précédent, mais dans le cas actuel la courbe est nécessairement une ellipse. Lorsque le point m est hors de l'angle désigné, on peut remplacer le cercle C par une hyperbole équilatère dont ab sera l'axe transverse; car dans ce cas la section conique demandée est nécessairement une hyperbole.

348. On déduit de là le moyen de décrire une ellipse sur deux diamètres conjugués, ab et mn (*fig.* 224), car si des extrémités a et b, du diamètre ab, on mène les droites A et B parallèles à mn, ces droites seront tangentes à l'ellipse (n° 313, 7°) en a et b, on est conduit à construire une ellipse tangente en a et b aux droites parallèles A et B et passant par le point m, elle passera nécessairement par l'autre point n (*).

CHAPITRE VII.

INTERSECTIONS DES SURFACES ENTRE ELLES.

Lorsque l'on a deux surfaces Σ et Σ', et que l'on veut construire leur intersection J, on doit examiner si, en vertu des lignes tracées sur les plans de projection et qui suffisent pour définir les deux surfaces, en ce sens que l'on peut

(*) *Voyez* dans l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, chapitre V, page 289 et suivantes, ce qui est relatif à la construction d'une section conique donnée par cinq conditions (points et tangentes).

toujours construire les projections d'un point appartenant à l'une ou à l'autre des surfaces données, en ne s'appuyant que sur les lignes tracées et sur le mode de génération indiqué pour chacune des surfaces; il faut examiner, dis-je, si l'on peut immédiatement construire les projections des points appartenant à la ligne J.

La chose peut être faisable dans quelques cas, mais, en général, on ne peut pas déterminer immédiatement les points de la ligne J; dès lors on est obligé d'employer une série de surfaces auxiliaires X, X′, X″, etc., et de la manière suivante :

La surface X coupe la surface Σ suivant une ligne C, et la surface Σ′ suivant une ligne C′, et les deux lignes C et C′ se coupent en un point *m* appartenant à la ligne J. Or, les lignes C et C′ sont connues parce que l'on connaît leurs projections C^v et C^h, C'^v et C'^h, et comme les courbes C et C′ sont sur une même surface X, si elles se coupent en un point *m*, les projections m^v et m^h de ce point seront les points d'intersection des courbes C^v et C'^v, C^h et C'^h.

Ainsi donc, ayant construit les courbes C^v, C^h et C'^v, C'^h, si le point en lequel C^v et C'^v se coupent ne se trouve pas sur une même perpendiculaire à la ligne de terre avec le point en lequel C^h et C'^h se coupent, les courbes C et C′ de l'espace ne se couperont pas, et l'on reconnaîtra que la surface auxiliaire X ne coupe pas, en la position qu'on lui a donnée par rapport aux surfaces Σ et Σ′, la ligne d'intersection cherchée J.

Ensuite, en supposant que la surface auxiliaire X coupe la courbe J, il faudra que cette surface X soit choisie, et quant à sa nature géométrique, et quant à sa position par rapport aux surfaces données Σ et Σ′, de telle sorte que la construction des courbes C et C′ soit immédiatement possible. C'est ainsi que, pour deux plans dont les traces horizontales et les traces verticales se coupent, on obtient immédiatement les projections de la droite J d'intersection; mais si les traces de ces plans ne se coupent pas, on ne peut plus obtenir immédiatement les projections de la droite J. Il faut recourir aux surfaces auxiliaires, et il est évident que l'on doit choisir des plans, et ensuite il faut diriger ces plans de manière à ce que leurs traces coupent les traces des plans donnés, pour pouvoir immédiatement construire les intersections C et C′ de chacun des plans donnés avec chacun des plans auxiliaires.

Suivant la nature géométrique et le mode de génération des surfaces données Σ et Σ′, on devra réfléchir au choix à faire pour les surfaces auxiliaires à employer et à la direction à leur donner dans l'espace par rapport aux positions qu'affectent dans l'espace les surfaces Σ et Σ′, et cela par rapport aux deux plans de projection auxquels ces surfaces Σ et Σ′ se trouvent rapportées.

Les surfaces dont on devra chercher l'intersection sont ordinairement des surfaces coniques et cylindriques, et des surfaces de révolution. On a souvent encore à combiner entre elles des surfaces développables et gauches, et aussi à les combiner avec les surfaces coniques, cylindriques et de révolution : or, comme les surfaces développables et gauches sont des surfaces réglées, on voit de suite que les premiers problèmes à se proposer sont ceux où il s'agit de construire les points de rencontre ou d'intersection d'une droite avec des surfaces coniques, cylindriques et de révolution.

De l'intersection des surfaces coniques et cylindriques.

349. PROBLÈME 1. *Trouver les génératrices parallèles de deux surfaces coniques.* Nommons s et s' les sommets, B et B′ les bases des deux surfaces coniques (ces bases étant sur le plan horizontal de projection, et dès lors n'étant autres que les traces horizontales des deux surfaces coniques).

Il est évident que si l'on fait mouvoir la surface conique (s', B′) parallèlement à elle-même, son sommet parcourant la droite $s's$ jusqu'à ce que ce sommet coïncide avec le sommet s de la surface (s, B), les génératrices parallèles, s'il en existe, se superposeront, et elles seront données par les points d'intersection des bases B et B″. La base B″ de la surface conique (s', B′), après ce transport, sera semblable à la base B′ (n° 262), et se construira facilement au moyen de la nouvelle position d'une génératrice quelconque (n° 263, 2°); d'ailleurs, on sait que le *pôle* de similitude des courbes B″ et B′ n'est autre que la trace horizontale de la droite ss'.

350. Si l'on demandait la génératrice du cône (s, B) parallèle à celles d'un cylindre, il suffirait de mener par le sommet s une parallèle D aux génératrices du cylindre; si la droite D rencontrait la directrice B, ce serait la génératrice demandée; si elle ne rencontre pas cette directrice, c'est une preuve qu'il n'existe pas sur la surface conique de génératrice parallèle à celles de la surface cylindrique.

351. PROBLÈME 2. *Trouver le point de rencontre d'une droite* D *et d'une surface conique ou cylindrique.* Dans le cas d'une surface conique, il suffit évidemment de conduire un plan P par la droite D et le sommet du cône; ce plan ne peut couper la surface que suivant des génératrices droites; les points d'intersection de ces génératrices et de la droite D donnée sont les points cherchés. Si le plan P est, par hasard, tangent au cône, la droite D est aussi tangente au cône; et si le plan P n'a de commun avec la surface conique que le sommet de

cette surface, la droite D ne rencontre pas la surface conique, à moins qu'elle ne passe par le sommet de cette surface. Dans le cas de la surface cylindrique, on fera passer par la droite D un plan P parallèle aux génératrices droites du cylindre. Ce plan P coupera la surface suivant des génératrices droites dont les rencontres avec la droite donnée D sont les points demandés. La droite D peut aussi être tangente ou sécante à la surface cylindrique, ou ne pas rencontrer cette surface.

352. Problème 3. *Trouver l'intersection de deux surfaces coniques.* Si les surfaces coniques avaient même sommet, elles ne pourraient se couper que suivant une ou plusieurs génératrices droites, que l'on obtiendrait en coupant les surfaces par un plan, et joignant les points communs aux deux sections planes (considérées comme bases des cônes) avec le sommet. Mais si les surfaces n'ont pas même sommet, les intersections sont des courbes, généralement à double courbure, et qu'on ne peut construire que par points; il est évident que des plans sécants, arbitrairement menés au travers des deux surfaces, comme nous venons de l'indiquer, feraient connaître chacun un certain nombre de points de l'intersection; mais les courbes de section des cônes par ces plans auxiliaires sont en général difficiles à construire, et d'ailleurs la méthode qu'elles exigent pour leur construction ou la recherche de leurs points peut s'appliquer directement à la détermination de l'intersection des deux cônes donnés.

En effet, il suffit de remarquer que, par chaque point de l'intersection C des deux cônes donnés Δ et Δ', il passe une génératrice droite de chacune de ces deux surfaces Δ et Δ', et que ces génératrices sont situées dans un même plan passant à la fois par les sommets des deux surfaces coniques données; donc il faudra mener une série de plans par les sommets des deux surfaces, ou par la droite qui les unit, chacun d'eux coupera les surfaces coniques Δ et Δ', suivant une ou plusieurs génératrices droites dont les intersections fourniront des points de la courbe C cherchée.

352 *bis*. Si l'on donne une surface conique et une surface cylindrique, ce procédé se réduit à mener par le sommet de la surface conique une parallèle aux génératrices droites du cylindre, et par cette droite une série de plans auxiliaires.

352 *ter*. Si enfin l'on donne deux surfaces cylindriques, ce même procédé consiste à mener une série de plans auxiliaires parallèles aux génératrices droites des deux surfaces cylindriques données.

Des formes diverses et générales que peut offrir la courbe-intersection.

353. Le procédé fort simple, exposé ci-dessus, a besoin de quelques précautions pour unir convenablement les points obtenus; l'on doit aussi distinguer plusieurs cas dans la disposition relative des deux surfaces. Soient : 1° B et B′ (*fig.* 225) les bases ou traces horizontales des deux surfaces coniques et *a* la trace horizontale de la droite qui unit leurs sommets *s* et *s′*, les traces horizontales des plans auxiliaires doivent toutes passer par ce point *a* et rencontrer les bases B et B′ des surfaces coniques; d'après cela il est évident que les traces Hˣ et Hʸ seront les limites des traces horizontales des plans auxiliaires que l'on peut employer. Dans le cas de cette figure 225, la courbe d'intersection porte le nom de *courbe d'arrachement*. Pour la construire, supposons que l'on commence par l'un des plans limites Y; il touche le cône (*s′*, B′) suivant une génératrice droite et coupe le cône (*s*, B) suivant deux génératrices droites; on aura donc deux points de l'intersection C des deux cônes donnés, mais comme ces deux points n'appartiennent pas à deux génératrices droites voisines, je n'en considère d'abord qu'un, je combine ainsi les deux génératrices notées 1, et j'obtiens un premier point que je numérote 1. Prenant ensuite un plan Z′ qui coupe les deux surfaces coniques suivant deux génératrices droites, je ne considère sur le cône (*s*, B) que celle voisine de 1, et je la combine avec une seule des deux génératrices du cône B′, j'obtiens ainsi un second point numéroté 2. Continuant ainsi en prenant des plans de plus en plus éloignés de Y, je parviendrai au second plan limite X, qui me donnera les génératrices 4 à l'aide desquelles j'obtiens un point que je marque 4. A la suite de la génératrice 4 du cône (*s*, B), en tournant toujours dans le même sens, je trouve la génératrice 5, qui est la seconde génératrice située dans le plan Z, il faut de nouveau la combiner avec la génératrice 3 ou 5 voisine de 4 dans le cône B′, et j'obtiens ainsi un point 5, et ainsi de suite, en prenant successivement les génératrices dans l'ordre des numéros, jusqu'à ce qu'on revienne sur les deux génératrices 1. Les points ainsi obtenus portent les mêmes numéros qui indiquent les génératrices qui les fournissent et on les unit ensuite par un trait continu dans l'ordre des numéros.

2° Il peut arriver que les traces des plans limites soient tangentes à la même base B et sécantes à l'autre base B′ (*fig.* 226), dans ce cas on dit qu'il y a *pénétration*. L'intersection se compose de deux courbes distinctes qu'on nomme, l'une *courbe d'entrée*, l'autre *courbe de sortie*. Les numéros placés aux pieds des génératrices montrent dans quel ordre les points doivent être obtenus et numérotés pour tracer ensuite les projections de la courbe d'intersection avec exactitude,

en remarquant que les numéros sans accent dans chaque base sont les traces horizontales des génératrices dont les intersections fournissent l'une des courbes ou branche d'entrée ou de sortie, et que les numéros accentués sont les traces horizontales des génératrices qui fournissent l'autre branche de la courbe d'intersection, branche de sortie ou d'entrée.

3° L'une des traces limites peut être tangente à la fois aux deux bases (*fig.* 227), alors l'intersection présente un nœud au point d'intersection des génératrices droites situées sur ce plan tangent commun. En effet, on obtient deux fois ce point en combinant les génératrices dans l'ordre 3, 4, 5 et dans l'ordre 9, 10, 11, ce qui donne évidemment dans les deux cas des points voisins du point commun et différents entre eux. Ce cas donne encore une courbe d'*arrachement;* mais offrant un point *multiple*.

4° Enfin, les plans limites peuvent être l'un et l'autre tangents à la fois aux deux surfaces coniques (*fig.* 228), l'intersection se compose alors de deux courbes ou branches qui se croisent aux deux points d'intersection des génératrices droites situées sur ces plans tangents communs. On peut vérifier la position des points comme il a été dit précédemment. Dans ce cas, après avoir fait le tour complet des bases B et B', on revient sur les génératrices 1, et l'on n'a encore combiné que les deux génératrices 1 ou 3 ensemble, il faut aussi combiner la génératrice 1 avec 3, ce qui conduit à faire le tour dans le sens des numéros accentués. Ce cas présente une courbe *de pénétration*, mais dont les deux branches se croisent en deux points. Il n'est pas inutile de faire remarquer que les projections des courbes d'intersection peuvent avoir des nœuds, sans qu'il en résulte que les courbes dans l'espace en aient; nous reviendrons plus loin sur ces nœuds que les projections d'une courbe de l'espace peuvent présenter.

354. L'intersection d'une surface conique avec une surface cylindrique présente exactement les mêmes circonstances : les figures restent les mêmes, le point *a* représentant alors la trace horizontale de la droite menée par le sommet du cône parallèlement aux génératrices droites du cylindre.

354 *bis*. Le cas des deux surfaces cylindriques offre aussi les mêmes circonstances, mais alors les traces horizontales des plans sécants sont parallèles à celle d'un plan mené par deux droites respectivement parallèles aux génératrices droites de chacun des deux cylindres : le point *a* est alors transporté à une distance infinie.

355. Pour avoir la tangente en un point de l'intersection, il suffit de remarquer qu'elle est à la fois dans le plan tangent, mené à chacune des deux surfaces, par le point considéré; elle est donc l'intersection de ces deux plans que nous avons appris à construire (chap. 2).

356. Pour reconnaître la nature des sections planes d'une surface conique (n° 284), nous avons mené par le sommet de ce cône un plan parallèle au plan sécant, ce qui revenait évidemment à transporter le plan sécant parallèlement à lui-même jusqu'à ce qu'il passât par le sommet de la surface conique proposée, et nous avons ainsi reconnu que les courbes d'intersection peuvent être de trois espèces :

1° *Courbes fermées ou elliptiques;*

2° *Courbes à branche infinie sans asymptote, ou courbes paraboliques;*

3° *Courbes à branche infinie avec asymptote, ou courbes hyperboliques.*

Deux surfaces coniques peuvent aussi se couper suivant des courbes de l'une de ces trois espèces, ou qui peuvent participer à la fois des unes et des autres. Pour reconnaître la nature de l'intersection, nous transporterons l'une des surfaces coniques parallèlement à elle-même, jusqu'à ce que son sommet coïncide avec le sommet de l'autre surface (*) : 1° si, dans cette position, les deux surfaces (leurs bases étant des courbes fermées) n'ont aucune génératrice commune, elles se couperont suivant une courbe fermée, car alors les surfaces coniques proposées n'ont pas de génératrices parallèles, donc l'intersection n'aura pas de point situé à l'infini; l'intersection est alors dite *elliptique;* 2° si les deux surfaces ayant même sommet ont une génératrice droite de contact et par conséquent un plan tangent commun, les surfaces proposées ont deux plans tangents parallèles menés le long de génératrices droites qui elles-mêmes sont parallèles, et par conséquent l'intersection a une branche infinie sans asymptote, ou, en d'autres termes, l'intersection est *parabolique;* 3° si les deux surfaces ayant même sommet ont une génératrice droite d'intersection, les surfaces proposées ont deux génératrices droites parallèles entre elles et auxquelles correspondent des plans tangents qui se coupent, l'intersection des deux surfaces a une branche infinie avec asymptote (**) qui est dite *hyperbolique;* 4° les deux surfaces coniques ayant même sommet peuvent avoir à la fois des génératrices droites de contact et des génératrices droites d'intersection, la courbe d'intersection des deux surfaces coniques proposées présentera alors en même temps des branches *paraboliques* correspondant chacune à une génératrice droite de contact, et des branches *hyperboliques* correspondant chacune à une génératrice droite d'intersection.

(*) Il faut bien remarquer que, pour reconnaître les formes diverses que l'intersection de deux cônes peut présenter, nous employons le même moyen que celui employé lorsque nous avons voulu reconnaître les formes diverses de la section faite dans un cône par un plan, et cela doit être puisqu'un plan peut être rigoureusement considéré comme une surface conique.

(**) *Voyez* dans le chapitre VII de l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, ce qui est relatif à la manière d'être de la courbe, intersection de deux cônes, par rapport à son asymptote.

356 ***bis.*** ***Construction de la tangente en un point de la courbe-intersection de deux cylindres, d'un cylindre et d'un cône, de deux cônes.*** Désignant par B et B′ les bases ou traces horizontales des deux surfaces, et par x le point de la courbe d'intersection C, à laquelle on veut construire la tangente, il suffira de mener par le point x deux droites, l'une génératrice de la première surface et perçant sa base B au point b, l'autre génératrice de la seconde surface, et perçant sa base B′ au point b', et de construire en b une tangente à la courbe B, laquelle portera le symbole H^{Θ} comme trace horizontale du plan Θ tangent en x à la première surface, et en b' une tangente à la courbe B′, laquelle portera le symbole $H^{\Theta'}$, comme trace horizontale du plan Θ' tangent en x à la seconde surface. Les droites H^{Θ} et $H^{\Theta'}$ se couperont en un point t, qui sera la trace horizontale de la tangente T demandée, laquelle sera l'intersection des deux plans Θ et Θ'.

Il est facile de voir que lorsque le plan auxiliaire touche la première surface suivant une génératrice G et coupe la seconde surface suivant diverses génératrices K, K′, K″, etc., il est facile de voir, dis-je, que ces droites K, K′, K″, etc., sont tangentes à la courbe d'intersection C des deux surfaces en les points a, a', a'', etc., en lesquels la droite G est coupée par les droites K, K′, K″, etc.; mais lorsqu'un plan auxiliaire est tangent en même temps à la première et à la seconde surface, suivant les génératrices respectives G et K, lesquelles se coupent en un point a, qui appartient à la courbe d'intersection C des deux surfaces, et qui est tel, ce point a, que deux branches de la courbe C s'y croisent, ce que l'on exprime en disant que la courbe C a en ce point a un *point multiple*, alors les méthodes ordinaires de la géométrie descriptive sont en défaut pour la construction des tangentes au point a, puisque, dans ce cas, le plan auxiliaire étant à la fois tangent à l'une et à l'autre surface, les deux plans tangents qui, menés au point a, devraient donner par leur intersection la tangente demandée, se confondent en un seul plan. La solution de cette question exige des connaissances plus avancées en géométrie de l'espace, on ne peut la résoudre que par la considération des surfaces osculatrices (*).

Mais il faut bien remarquer que lorsque nous disons que la méthode ordinaire est en défaut, nous employons une expression adoptée, qui veut dire que la méthode ne peut s'appliquer à ce cas particulier; car, en vertu de la particularité de ce point, la géométrie n'est point en défaut. Il ne se passe pour ce point que ce qui doit être en effet : au lieu d'une tangente en ce point, il en existe deux, et deux plans ne peuvent déterminer deux droites distinctes; ces deux plans doivent donc

(*) *Voyez* à ce sujet dans l'ouvrage qui a pour titre : *Complément de géométrie descriptive*, le mémoire qui a pour titre : *Construire la tangente en un point d'une courbe donnée par son tracé et dont on ignore l'équation;* mémoire que j'ai publié pour la première fois dans le 21ᵉ cahier du Journal de l'École polytechnique.

se confondre, puisque l'un et l'autre de ces plans tangents doit contenir les deux tangentes qui existent pour ce point particulier, auquel on a donné le nom de point *multiple*.

357. ***Deux surfaces coniques qui ont pour base commune une section conique se coupent suivant une seconde courbe plane.*** En effet, soit E (*fig.* 229) la base commune des deux surfaces coniques ayant leurs sommets en *s* et *s'*, la droite D des sommets perçant le plan horizontal au plan *a*, les tangentes H^v et $H^{v\prime}$, menées de ce point *a* à la courbe E, seront les traces des plans tangents communs aux deux surfaces, et la droite A qui unit les points de contact *p* et *p'* est la *polaire* conjuguée du *pôle a* (n° 330). Si l'on conduit par la droite D un plan sécant quelconque R, il coupera les surfaces coniques suivant des génératrices droites G et G' qui se croisent en un point *x* de la seconde courbe d'intersection demandée, la tangente à cette courbe au point *x* est l'intersection des plans tangents aux surfaces coniques et menés le long des génératrices G et G', mais les traces H^v et $H^{v\prime}$ de ces plans sont tangentes à la courbe E aux points *b* et *b'*, et se croisent par conséquent en un point *c* de la droite A (n° 330), donc la tangente Θ rencontre la polaire A; il en serait de même des tangentes en tous les autres points de la courbe cherchée, donc toutes ces tangentes forment une surface plane; car si l'on considère les points successifs x, x', x'', x'''... de la courbe, et les tangentes correspondantes $\Theta, \Theta', \Theta'', \Theta'''$... deux tangentes successives se coupent, et sont par conséquent dans un même plan. Mais toutes les tangentes rencontrent la polaire A en des points différents; donc le plan de deux tangentes successives quelconques contient cette droite tout entière; donc le plan de Θ et Θ' contient la droite A; le plan de Θ' et Θ'' contient aussi A, ces deux plans ayant en commun Θ' et A se confondent donc; il en sera de même de tous les autres (n° 213 *bis*); donc enfin toutes les tangentes à la seconde courbe d'intersection des deux cônes, sont dans un même plan, donc cette courbe est plane et elle est par conséquent une section conique (n° 346).

358. Cette seconde section conique passe évidemment par les points *p* et *p'*; elle aura donc avec la section conique E la corde *pp'* commune; donc deux sections coniques non situées dans un même plan et ayant une corde commune, peuvent toujours être contenues ou enveloppées par deux surfaces coniques. Pour obtenir ces cônes, nous remarquerons que si, aux extrémités *p* et *p'* de la corde commune, on mène des tangentes à la section E, elles vont se couper en un point *a*, les tangentes à la section E' se coupent en un autre point *a'*, ces deux points sont sur une droite D, qui contient les sommets des cônes cherchés; si donc, par cette droite, on fait passer un plan coupant les courbes E et E' aux points *b* et *b'*, *x* et *x'*, les droites *bx* et *b'x'* seront deux génératrices droites de l'une des surfaces coniques,

dont elles détermineront le sommet s, les droites $b'x$ et bx' seront deux génératrices droites de l'autre surface conique, et elles en détermineront le sommet s'. Si l'on prenait sur la droite D un troisième point s'' pour sommet d'une surface conique ayant pour base la même courbe E, elle couperait évidemment chacune des deux surfaces (s, E) et (s', E), suivant une section conique différente de E'; donc les deux sections E et E' ne peuvent être placées que sur deux surfaces coniques.

358 *bis*. Ce qui précède nous permet de construire avec facilité les divers points d'une ellipse dont on donne le centre, la longueur de deux diamètres conjugués et l'angle que ces diamètres comprennent entre eux.

Soit (*fig.* 229 *bis*) o le centre de l'ellipse et ses deux diamètres conjugués ab et pq.

On sait que les droites Θ et Θ' menées aux points a et b parallèlement au diamètre $\overline{pq}$, seront tangentes en a et b à l'ellipse E *à tracer*.

Sur pq comme diamètre décrivons un cercle C; pour le point a la tangente T de ce cercle sera perpendiculaire à $\overline{ba}$. Du point o menons om perpendiculaire à $\overline{ba}$, joignons le point m du cercle C avec le point q.

Cela posé : menons par un point r arbitrairement pris sur la droite ba deux droites, l'une ry parallèle à oq et l'autre rx parallèle à T, ensuite menons par le point x du cercle C une parallèle xy à $\overline{mq}$, la droite xy coupera la droite ry en un point y qui appartiendra à l'ellipse E demandée.

Et en effet le cercle C peut être considéré comme la projection sur le plan horizontal d'une ellipse δ coupant l'ellipse E aux points a et b, les deux courbes δ et E pourront donc être enveloppées par une surface conique, et il est évident que dans le problème qui nous occupe en ce moment, la surface conique sera un cylindre dont les génératrices droites se projetteront horizontalement suivant des parallèles à la droite mq.

D'après ce qui précède on peut résoudre les problèmes suivants.

Étant donné un système de diamètres conjugués d'une ellipse, construire *sans tracer la courbe :*

1° Par un point pris hors de la courbe la tangente θ (*fig.* 229 *ter*).

2° Une tangente θ parallèle ou faisant un angle donné avec une droite D (*fig.* 229 *quater*).

3° Les points d'intersection y et y' avec une droite B (*fig.* 229 *quint.*).

359. Si l'on coupe les deux surfaces coniques par des plans différents ou par un même plan, les courbes que l'on obtiendra seront des sections coniques; on pourra les prendre pour bases des deux surfaces et l'on en conclura que deux surfaces coniques à bases sections coniques et ayant deux plans tangents communs se coupent suivant deux courbes planes, qui sont par conséquent des sections coniques.

Il est facile de voir qu'on parviendrait aux mêmes conséquences en cherchant l'intersection d'une surface conique avec une surface cylindrique, ou de deux surfaces cylindriques.

Si l'on coupe une surface conique, à base section conique par deux plans, et qu'on prenne les sections pour bases de deux autres surfaces coniques, dont les sommets seraient en ligne droite avec celui de la première surface, on trouverait, par un raisonnement semblable à celui du n° 357, que l'une des courbes d'intersection des deux dernières surfaces coniques est plane (*).

360. Mais la réciproque de cette proposition n'est pas généralement vraie, c'est-à-dire que deux surfaces coniques ou cylindriques peuvent fort bien se couper suivant deux courbes planes sans avoir pour cela deux plans tangents communs. En effet, supposons deux surfaces cylindriques ayant pour bases les paraboles P et P′ (*fig.* 230) situées dans des plans verticaux perpendiculaires entre eux et dont les axes sont sur le plan horizontal. Si l'on coupe les deux cylindres par des plans horizontaux X_1, X_2..... on aura (n° 328) $ao : ao' :: ap : ap' ::$ etc., donc les points a, b^h, c^h,..... sont en ligne droite, donc la courbe E intersection des deux surfaces cylindriques est plane, quoique les deux surfaces n'aient pas de plan tangent commun.

De l'intersection des surfaces de révolution.

361. Problème 4. *Trouver l'intersection d'une surface de révolution par un plan.* On peut toujours par des changements de plans amener la surface de révolution en une position telle que son axe soit perpendiculaire au plan horizontal. Cela étant, on doit employer des surfaces auxiliaires et choisir celles qui donnent les sections les plus simples; ce sont évidemment des plans horizontaux, qui coupent chacun la surface de révolution suivant un *parallèle*, dont la projection horizontale est un cercle identique et qui coupent chacun le plan donné suivant une droite facile à obtenir; les points de rencontre de ces deux lignes (cercle et droite) appartiennent à l'intersection demandée.

La tangente en un point de la courbe est l'intersection du plan sécant et du plan tangent à la surface en ce point, plan tangent que nous avons appris à déterminer (n° 252).

Ce problème se résout toujours de la même manière, que la surface soit donnée

(*) *Voyez* dans l'ouvrage qui a pour titre : *Complément de géométrie descriptive*, le mémoire qui a pour titre : *Propriétés des courbes du second degré considérées dans l'espace.* Ce mémoire a été publié pour la première fois dans la Correspondance de mathématiques et de physique des Pays-Bas, rédigée par M. Quételet, vol. 3, n° 3.

par une *courbe méridienne* ou par une *ligne génératrice* droite ou courbe et quelconque.

362. Problème 5. *Trouver l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution.* Il est évident qu'il suffit de faire passer un plan par la droite et de chercher son intersection avec la surface, le point cherché est à la rencontre de cette intersection et de la droite donnée. Pour plus de simplicité on pourra employer l'un des plans projetants de la droite. Lorsque la droite donnée est dans un même plan avec l'axe, il convient de choisir ce plan plutôt que tout autre, surtout lorsque la surface de révolution est donnée par une *courbe méridienne.*

Si la surface donnée est une surface sphérique, on pourra conduire le plan par la droite et le centre de la sphère, parce qu'alors la section sera un grand cercle que l'on amènera à être dans la position parallèle à l'un des plans de projection, soit par des changements de plans, soit par des mouvements de rotation convenables.

363. Problème 6. *Trouver l'intersection d'une surface conique et d'une surface de révolution.* Les plans menés par le sommet du cône le couperaient suivant des droites, mais ils couperaient la surface de révolution suivant des courbes qu'on serait obligé de construire par points (n° 361). Nous emploierons encore des plans horizontaux coupant la surface de révolution suivant des *parallèles* et la surface conique suivant des courbes semblables à la base (n° 262), et dont les projections pourraient par conséquent s'obtenir avec facilité, car elles seraient semblables à la base, et auraient pour pôle commun de similitude la projection horizontale du sommet (n° 264), mais on peut même éviter de construire ces courbes en employant la méthode suivante : Considérons un plan auxiliaire X, il coupera la surface de révolution suivant un *parallèle* C, et la surface conique suivant une courbe K semblable à la base B. On prend le *parallèle* C pour directrice d'une surface conique auxiliaire ayant même sommet *s* que la surface conique proposée, alors ces deux surfaces coniques se couperont nécessairement suivant une ou plusieurs génératrices droites passant par les points d'intersection du *parallèle* C et de la courbe K; or la trace de cette nouvelle surface conique sera un cercle C′ dont on obtiendra immédiatement le centre et un point de la circonférence; les points où ce cercle C′ coupera la base B de la surface conique donnée appartiendront aux génératrices droites d'intersection des deux cônes et celles-ci viendront couper le cercle ou *parallèle* C aux points demandés. En répétant la même construction pour une série de plans horizontaux, on obtiendra tant de points que l'on voudra de la courbe cherchée.

Si l'on proposait de chercher la courbe-intersection d'une surface de révolution et d'une surface cylindrique, alors on considérerait le cercle ou *parallèle* C comme

la directrice d'une surface cylindrique auxiliaire dont les génératrices droites seraient parallèles à celles de la surface cylindrique proposée (*).

363 *bis*. Dans ce qui précède, on a dû remarquer que la solution ne pouvait être obtenue par la construction graphique indiquée qu'autant que : 1° l'axe de la surface de révolution était perpendiculaire au plan horizontal (ou au plan vertical) de projection, et que 2° l'on connaissait la section faite dans le cône ou cylindre par le plan horizontal (ou par le plan vertical) de projection, ce qui veut dire que cette section était située sur l'épure, sur la feuille de papier qui était à notre disposition et dont dès lors nous ne pouvions changer les dimensions.

Car il faut bien remarquer qu'il existe une grande différence entre la géométrie analytique (géométrie de Descartes) et la géométrie graphique (géométrie descriptive), à savoir que l'espace indéfini appartient au géomètre avec la géométrie analytique, et que l'espace est limité avec la géométrie descriptive.

Dès lors les données du problème qui nous occupe en ce moment peuvent être telles que l'on ne puisse pas se procurer sur la feuille de papier la section entière du cône ou du cylindre par le plan horizontal ou vertical de projection, l'axe de la surface de révolution ayant été amené par des changements de plans à être perpendiculaire au plan horizontal ou vertical de projection. Ce cas particulier peut se présenter en coupe des pierres, lorsqu'il s'agit de pratiquer dans un dôme ellipsoïdal une lucarne conique ou cylindrique.

363 *ter*. La surface de révolution étant quelconque, la solution générale consistera à couper et la surface de révolution et le cône (ou cylindre) par un plan, de manière à ce que les projections de la courbe de section se trouvent situées sur la feuille de papier (sur l'*épure*). Et faisons remarquer que nous supposons que le cône (ou le cylindre) sont donnés l'un ou l'autre par leur courbe directrice, c'est-à-dire par les projections de cette courbe directrice, lesquelles projections doivent nécessairement être situées sur la feuille de papier (ou *épure*), car sans cela il n'y a aucune construction graphique possible. Cette solution générale exige donc que pour trouver un point de la courbe-intersection des deux surfaces données, on construise quinze ou vingt points de chacune des deux sections faites à travers ces deux surfaces par un plan auxiliaire, et dont la direction sera judicieusement déterminée. Mais dans les applications, la surface de révolution n'est pas générale, elle est ordinairement une surface simple. C'est ainsi qu'en coupe des pierres cette surface peut être un ellipsoïde allongé ou aplati de révolution, et le cône ou le cylindre peuvent avoir des formes générales, en ce sens qu'ils ne seront ni l'un ni l'autre de révolution.

(*) *Voyez* le tome IIe, page 437, de la *Correspondance de l'École polytechnique* publiée par Hachette.

Avec de telles données, il existe un moyen graphique de résoudre simplement ce problème, sans avoir recours à la méthode générale qui est longue et pénible. Ce moyen consiste à transformer l'ellipsoïde de révolution en une sphère et le cône en un autre cône, et le cylindre en un autre cylindre, et de ramener ainsi le problème : *de l'intersection d'un ellipsoïde de révolution par un cône ou un cylindre*, à la solution du problème : *de l'intersection d'une sphère par un cône ou un cylindre*.

Et l'on conçoit que l'ellipsoïde de révolution ne pouvant être coupé suivant un cercle (ou *parallèle*) que par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de cette surface, tandis qu'une sphère est toujours coupée suivant un cercle par un plan, quelle que soit sa direction, la solution du problème devient très-simple et d'une exécution facile (*). On voit donc ici l'utilité, en géométrie descriptive, de la méthode dite : transformation d'une surface (ou d'un système de surfaces) en une autre surface (ou un autre système de surfaces).

364. Problème 7. *Trouver l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont sur un même plan.* Si les axes se confondent, il est visible que les surfaces ne peuvent se couper que suivant un ou plusieurs cercles ou *parallèles* décrits par les points d'intersection des deux courbes méridiennes. Si les axes sont parallèles, on les rendra verticaux (par des changements de plans de projection ou des mouvements de rotation), puis des plans horizontaux couperont les deux surfaces suivant des cercles, dont les projections horizontales seront des cercles identiques. Mais si les axes se coupent, on pourra toujours rendre l'un des deux vertical, et l'autre parallèle au plan vertical de projection ; dans ce cas les plans horizontaux couperont la première surface suivant des cercles ou *parallèles*, et l'autre suivant des courbes qu'on serait obligé de construire par points. Il faut donc choisir une surface auxiliaire qui coupe à la fois les deux surfaces proposées suivant des cercles ou *parallèles*, et pour cela il faut employer une surface de révolution qui ait même axe de rotation que chacune des surfaces données. On voit de suite qu'une sphère ayant son centre au point d'intersection des deux axes, remplit cette condition, et d'ailleurs la sphère est la seule surface de révolution qui ait une infinité d'axes de rotation, chaque diamètre étant un tel axe.

Nous choisirons donc une série de semblables sphères pour surfaces auxiliaires. Soient donc A (*fig.* 231) l'axe, M la courbe méridienne de la première surface ;

(**) *Voyez*, dans l'ouvrage que j'ai publié sous le titre : *Applications de la géométrie descriptive : 1° aux ombres ; 2° à la perspective ; 3° à la gonomonique*, et *4° aux engrenages*, ce que j'ai dit sur l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes ne se coupent pas.

A′ l'axe, M′ la courbe méridienne de la seconde surface et *s* le point d'intersection des deux axes; soit S^v la projection verticale du grand cercle de l'une des sphères et parallèle au plan vertical de projection, S^v coupe M^v et M'^v aux points x^v et x'^v desquels nous abaisserons sur A^v et A'^v les perpendiculaires Δ^v et Δ'^v qui nous représenteront les projections verticales des courbes ou *parallèles* d'intersection des surfaces de révolution par la sphère auxiliaire; Δ^h sera un cercle ayant son centre en A^h, Δ'^h serait une ellipse courbe plus difficile à construire, mais on n'en a pas besoin.

En effet les plans des *parallèles* Δ et Δ' sont perpendiculaires au plan vertical, leur intersection I est donc elle-même perpendiculaire à ce plan, et se projette au point I^v intersection de Δ^v et $\Delta^{v\prime}$; or les points d'intersection de Δ et Δ' se trouvent nécessairement sur I, donc leurs projections verticales se confondent avec le point I^v, et leurs projections horizontales sont en u^h et u'^h, aux intersections de Δ^h et I^h. Il est évident que l'on n'obtient des points d'intersection des deux surfaces qu'autant que I^v est dans l'intérieur du cercle S^v; dans le cas contraire, les points I^v appartiendraient encore à la courbe qui reçoit la projection verticale de l'intersection, mais ils n'auraient pas de projections horizontales correspondantes. Ces points se trouveraient sur l'intersection de surface de même nature que les proposées, mais enflées, pour ainsi dire, suivant une loi telle que la projection verticale de leur intersection soit reçue sur la même courbe que la précédente, mais elle en embrasse un plus grand arc. Il est facile de voir que la courbe d'intersection doit être symétrique par rapport au plan des deux axes; de sorte qu'il existe toujours deux points situés de part et d'autre de ce plan qui ont même projection verticale; c'est pourquoi la projection verticale semble se terminer brusquement aux points d'intersection des courbes M^v et M'^v, mais elle forme une courbe qui se prolonge au delà de ces points, comme nous l'avons dit ci-dessus, et les points situés sur le prolongement de la courbe dont un arc est la projection verticale de la courbe-intersection des deux surfaces de révolution données, se construisent par des opérations tout à fait identiques à celles qui nous ont fait connaître les points de la première partie de cette courbe, et ces opérations graphiques peuvent être et sont exécutées indépendamment de la figure ou *système* de l'espace.

365. Si les surfaces données sont deux surfaces coniques de révolution, on pourra remplacer les sphères auxiliaires par des plans passant par la droite qui unit les deux sommets; si l'on donne une surface conique de révolution et une surface cylindrique de révolution, on pourra employer des plans auxiliaires passant par le sommet du cône, et parallèles aux génératrices droites du cylindre. Si l'on donne deux surfaces cylindriques de révolution, on pourra em-

ployer des plans auxiliaires parallèles aux génératrices droites des deux surfaces. Si l'on donne une surface conique de révolution, et une surface sphérique, on pourra employer des plans auxiliaires passant par la droite qui unit le sommet du cône au centre de la sphère. Enfin pour une surface cylindrique de révolution et une surface sphérique on pourra faire passer par le centre de la sphère des plans auxiliaires parallèles aux génératrices droites du cylindre. Les motifs qui déterminent la direction spéciale à donner à ces divers plans auxiliaires suivant les surfaces dont on doit construire l'intersection, sont évidents. Au reste, tous ces problèmes peuvent se résoudre en employant des sphères pour surfaces auxiliaires lorsque les axes de révolution des surfaces coniques et cylindriques se couperont; dans le cas contraire on ne pourra employer que des plans auxiliaires. Lorsqu'on aura une sphère et un cône de révolution ou un cylindre de révolution, on pourra toujours employer des sphères auxiliaires, car il suffira de mener par le centre de la sphère donnée un diamètre coupant l'axe de rotation de la surface conique ou cylindrique, et de regarder ce diamètre comme l'axe de rotation de la sphère donnée.

366. La tangente en un point de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se coupent est, comme dans tous les problèmes de ce genre, l'intersection des plans tangents menés aux deux surfaces en ce point; on est donc conduit à construire pour chacune des surfaces de révolution le plan tangent au point donné (n° 252), et à chercher l'intersection de ces deux plans tangents. La détermination du plan tangent à une surface de révolution peut facilement se déduire de la normale à laquelle il est perpendiculaire. Enfin on peut obtenir la tangente sans construire les plans tangents; car si l'on mène au point donné les normales à chacune des deux surfaces (et il est facile de reconnaître que pour une surface de révolution on n'a pas besoin de passer par le plan tangent pour construire la normale en un point de cette surface), elles déterminent un plan qui est un plan normal en même temps aux deux surfaces, et par conséquent normal à leur intersection. Donc la tangente demandée est perpendiculaire à ce plan des deux normales.

Si l'on considère les constructions qui doivent être effectuées sur le plan vertical pour avoir la projection verticale de la tangente, indépendamment de la figure ou *système* de l'espace, on en conclura un procédé de géométrie plane pour mener la tangente à cette courbe, et ce procédé sera exactement applicable aux points extrêmes de cette projection, pour lesquels les considérations précédentes seraient insuffisantes. Il est évident, d'ailleurs, que ces opérations géométriques doivent donner cette tangente, puisqu'on peut enfler les deux surfaces de manière que ces points appartiennent toujours à la projection verticale de l'inter-

section, mais n'en soient plus les points extrêmes. La considération d'enfler les deux surfaces pour que les points extrêmes par rapport aux deux premières surfaces, ne soient plus les points extrêmes par rapport aux deux nouvelles surfaces enflées, montre d'une manière nette et exacte que la méthode des normales, appliquée à un point quelconque de la projection verticale de l'intersection des deux surfaces, peut être rigoureusement appliquée aux points extrêmes de cette projection (*).

De quelques propriétés dont jouissent deux ou plusieurs cercles tracés sur une sphère.

367. *Par deux cercles qui se coupent ou qui n'ont pas de points communs, et qui sont situés sur une sphère, on peut toujours faire passer deux surfaces coniques.* En effet, par le centre de la sphère, on peut toujours mener un plan perpendiculaire à l'intersection des plans des deux cercles, il coupera la sphère suivant un grand cercle C (*fig.* 232), et les plans des cercles Δ et Δ' suivant des diamètres D et D', et si l'on unit les extrémités m, m', et n, n' par des droites, elles se coupent en un point s, qui est le sommet d'une surface conique sur laquelle sont placées les deux circonférences Δ et Δ'. Pour le démontrer, il suffit de faire voir qu'une droite menée du point s à un point quelconque y de Δ, rencontre Δ'. Or, ms et ns sont les traces de deux plans verticaux tangents à la fois aux deux cercles Δ et Δ'; si l'on suppose que l'un de ces plans se meuve en restant toujours tangent à ces deux cercles, il engendrera par ses intersections successives une surface développable, qui est évidemment courbe. Si donc nous démontrons que toutes ses génératrices rencontrent une même droite, elles la rencontreront nécessairement au même point, et formeront par conséquent une surface conique (n° 213 *bis*); or les plans de Δ et Δ' se coupent suivant une droite I, sur laquelle prenant un point x, et de ce point menant les tangentes xy, xz au cercle Δ, et les tangentes xy', xz' au cercle Δ', xy et xy' déterminent une position du plan tangent, et donnent une génératrice yy'; de même xz et xz' font connaître une autre génératrice zz', et ces deux génératrices sont dans un même plan qui est la seconde position du plan tangent; en prenant un autre point x', on obtiendrait d'autres génératrices. Mais toutes les cordes xz se coupent en un même point o

(*) Lorsqu'on emploie la considération des infiniment petits pour démontrer que la construction géométrique, employée pour un point courant de la courbe, s'applique exactement aux points extrêmes, il faut s'appuyer sur ce qu'une surface gauche peut, en vertu d'une génération toute particulière, présenter une courbure développable tout le long d'une ou de plusieurs de ses génératrices droites. *Voyez* à ce sujet l'ouvrage qui a pour titre : *Développement de géométrie descriptive*, chap. V, p. 268.

(n° 331), toutes les cordes yz' se coupent en un même point o', donc tous les plans des génératrices yy', zz' se coupent suivant une même droite oo', qui sera rencontrée ou coupée par toutes les génératrices de la surface développable enveloppe des plans tangents, donc cette surface est une surface conique (n° 213 *bis*). On aurait une seconde surface conique en unissant les points m, n' et m', n, puis en combinant ensemble les tangentes xy, xz', et xy', xz.

La même chose aurait lieu si les deux cercles Δ et Δ' se coupaient.

Mais si les deux cercles Δ et Δ' étaient tangents, ce qui aurait lieu si, par exemple, les points n et n' se superposaient, il est visible qu'alors le point s' coïnciderait aussi avec n et n', et par conséquent il ne resterait plus qu'une seule surface conique enveloppant à la fois les deux cercles Δ et Δ'.

368. Il résulte de là que *si une sphère et un cône se coupent suivant un cercle* Δ, *ils se coupent suivant un second cercle;* car, par le sommet s du cône et par le centre de la sphère, faisant passer un plan perpendiculaire au plan du cercle Δ, il coupera la sphère suivant un grand cercle C, le plan du cercle Δ suivant un diamètre D, et la seconde courbe d'intersection en deux points n et n'; si l'on conçoit par nn' ou D' un plan vertical coupant la sphère suivant le cercle Δ', les deux cercles Δ et Δ' sont sur une même surface conique, dont le sommet est au point d'intersection des droites mm' et nn'; mais ce point est précisément le sommet s du cône proposé, donc le cercle Δ' est situé à la fois sur la sphère et sur le cône, donc il est leur seconde courbe d'intersection. Tout plan parallèle à l'un des plans de ces deux cercles coupe la surface conique suivant un cercle; on peut donc couper certains cônes obliques suivant des cercles par deux séries différentes de plans parallèles; on les nomme *sections anti-parallèles ou sous-contraires du cône oblique;* mais il reste à démontrer que tout cône (non de révolution) ayant pour base une section conique, jouit de la propriété d'avoir des *sections circulaires;* c'est ce que nous démontrerons plus loin.

369. C'est sur cette propriété que repose la construction des mappemondes et aussi sur la proposition suivante, savoir : que *si, dans un cercle, on tire un diamètre, que par le milieu de l'une des demi-circonférences on mène deux cordes, elles coupent le diamètre et le cercle en quatre points qui sont sur une même circonférence de cercle*, ce qui résulte immédiatement de la propriété des quadrilatères inscriptibles.

370. Problème 8. *Connaissant les trois angles dièdres d'un angle trièdre, construire. les trois angles plans.* Prenons pour plan horizontal le plan de l'une des faces (*fig.* 233) et le plan vertical de projection perpendiculaire à une seconde face dont le plan désigné par P fera avec le plan horizontal, l'un des angles donnés β; donc V^{P} fera avec LT cet angle β. En choisissant le point a de H^{P} pour

sommet de l'angle trièdre, il faut par ce point a mener un plan Q faisant avec le plan horizontal l'angle donné γ et faisant avec le plan P l'autre angle donné α ; ce plan Q doit donc être tangent à deux surfaces coniques de révolution ayant leurs sommets au point a (n° 230), dont l'une aura pour axe une verticale A et pour génératrice une droite G faisant avec le plan horizontal l'angle γ, et dont l'autre aura pour axe une droite A' perpendiculaire au plan P et pour génératrice une droite G', faisant avec ce plan, l'angle α. Si l'on coupe ces deux surfaces coniques par une sphère, les *parallèles* Δ et Δ' seront sur une troisième surface conique Σ, à laquelle le plan Q est aussi tangent, puisqu'il contient une tangente à chacun des cercles ou *parallèles* Δ et Δ' (n° 367) ; donc H^{q} sera tangente à la base B de cette surface Σ, laquelle base B est un cercle semblable à Δ, et dont on trouve facilement le centre et le rayon, car on connaît le sommet de la surface conique Σ.

Ce problème admet évidemment deux solutions.

371. *Si une surface cylindrique coupe une surface sphérique suivant un cercle, elle le coupera suivant un second cercle de même rayon que le premier.* Par le centre de la sphère, on peut toujours mener un plan R parallèle aux génératrices droites du cylindre et perpendiculaire au plan du cercle B intersection des deux surfaces. Si l'on prend ce plan R pour plan horizontal de projection, la sphère sera coupée par ce plan R suivant un grand cercle C (*fig.* 234), et le plan de la base B étant perpendiculaire au plan horizontal, B^{h} sera une droite rencontrant le cercle C aux points a et b, par lesquels passent deux génératrices du cylindre, mais ces génératrices devant être parallèles au plan horizontal et ayant chacune un point dans ce plan y seront toutes entières ; donc elles couperont la sphère en des points a' et b' appartenant au cercle C.

Si l'on considère une génératrice droite quelconque G menée par un point x du cercle B, elle coupera la sphère en un second point x' projeté en x'^{h}, et je dis que les trois points x', x'^{h}, b' sont en ligne droite ; pour le démontrer : par le centre o de la sphère je mène un plan P perpendiculaire aux génératrices du cylindre, ce plan coupera en deux parties égales toutes les cordes aa', bb', xx' de la sphère, qui lui sont perpendiculaires ; donc H^{p} divise aussi en deux parties égales les projections $aa', bb', x^{h}x'^{h}$; mais les points milieu a'', b'', x''^{h}, sont en ligne droite, ainsi que les points extrêmes a, b, x^{h} ; donc il en est de même des autres extrémités a', b', x'^{h}, de ces droites. La même chose aurait lieu pour toute autre génératrice, donc la projection de la seconde courbe d'intersection sera la droite $a'b'$, cette courbe B' est donc plane, et comme elle est située sur une sphère elle ne peut être qu'un cercle. Nous voyons de plus que les droites aa' et bb' étant parallèles, les cordes ab et $a'b'$ sont égales ; mais ces cordes sont des diamètres des

deux cercles B et B', donc ces cercles sont égaux, de plus leurs plans sont perpendiculaires à un même plan qui est parallèle aux génératrices du cylindre et qui dès lors n'est autre que le plan R.

Nous pouvons donc généraliser le théorème énoncé et de la manière suivante : *si un cylindre entre dans une sphère par un cercle, il en sort par un second cercle égal au premier, les plans de ces deux cercles étant perpendiculaires à un même plan mené par le centre de la sphère parallèlement aux génératrices droites du cylindre.*

Si l'un des cercles est un grand cercle de la sphère, l'autre sera aussi un grand cercle, et l'on voit aussi que par deux petits cercles égaux situés sur une sphère on pourra faire passer un cylindre et un cône si les deux cercles ne se coupent pas ou se coupent en deux points, et qu'on ne pourra faire passer par les deux cercles qu'un seul cylindre, si les deux cercles se touchent. Si les deux cercles sont des grands cercles de la sphère on pourra toujours faire passer, par eux, deux cylindres. On peut conclure de là qu'il existe des cylindres ayant pour base une ellipse (et n'étant pas de révolution), qui peuvent être coupés par deux plans de direction opposée suivant des cercles égaux, auxquels on a donné le nom de sections *sous-contraires* ou *anti-parallèles;* mais il reste à démontrer que tout cylindre ayant pour base une ellipse jouit de la propriété d'avoir des *sections circulaires*, c'est ce que nous démontrerons plus loin (n° 373 *ter*).

371 *bis*. Étant données une sphère S et une droite D *extérieure* à cette surface, on peut mener par cette droite D deux plans Θ et Θ' tangents à la sphère S, les points de contact étant m et m'; la droite $\overline{mm'}$ que nous désignerons par D_1 est dite *polaire réciproque* de la droite D en vertu de la propriété suivante.

Si par la droite D on mène une série de plans P, P', P'', etc., coupant la sphère S suivant les cercles C, C', C'', etc., ces cercles seront unis deux à deux par des cônes dont les sommets seront sur la droite D_1; et *réciproquement* si par la droite D_1 on mène une série de plans P_1, P'_1, P''_1, etc., coupant la sphère S suivant les cercles C_1, C'_1, C''_1, etc., ces cercles seront unis deux à deux par des cônes dont les sommets seront sur la droite D.

Nous allons démontrer l'existence de cette propriété remarquable.

Par une droite D extérieure à une surface sphérique S on ne peut mener que deux plans Θ et Θ' tangents à cette sphère S. Pour trouver les points de contact on prend deux points d et d' sur la droite D et on les regarde comme les sommets de deux cônes Δ et Δ' tangents à la sphère S suivant les cercles C et C', lesquels se coupent en deux points m et m' qui sont les points de contact demandés des plans Θ et Θ'.

Et comme il n'existe que deux plans tangents Θ et Θ' passant par la droite D, il s'ensuit que quelle que soit la position des points d et d' sur la droite D, on

retrouvera toujours les mêmes points m et m'; on peut donc énoncer ce qui suit :

1° *Si l'on construit une série de cônes* $\Delta, \Delta', \Delta''$, *etc., tangents à une sphère* S *suivant les cercles* C, C', C'', *etc., ces cônes ayant leurs sommets situés sur une droite* D *extérieure à la sphère* S, *tous ces cercles* C, C', C'', *etc., se couperont en deux points* m *et* m'.

Unissons les points m et m' par une droite D_1, si l'on prend sur cette droite D_1 un point arbitraire d_1 et qu'on le regarde comme le sommet d'un cône Δ_1 tangent à la sphère S suivant un cercle C_1, je dis que le plan P_1 du cercle C_1 passera par la droite D.

Et en effet :

Menons par la droite D_1 et le point d situé sur D un plan P_2, il coupera la sphère S suivant un cercle C_2 ayant pour *pôle* le point d et pour *polaire* la droite $\overline{mm'}$ ou D_1.

Or si d'un point d_1 de D_1 on mène deux tangentes au cercle C_2 les points de contact et le point d seront en ligne droite, en vertu de ce qui a été dit (n° 331).

Dès lors, on voit que le plan P_1 coupera tous les cercles C_2, suivant des cordes qui prolongées iront s'appuyer sur la droite D.

Le plan P_1 passe donc par la droite D.

De plus, le point p_1, en lequel le plan P_1 coupe la droite D_1, sera le *pôle* du cercle C_1, la *polaire* étant la droite D.

Ainsi, il se trouve démontré :

2° *Que si ayant une sphère* S *et une corde* $\overline{mm'}$ *qui prolongée sera désignée par* D_1, *l'on construit une série de cônes* $\Delta_1, \Delta_1', \Delta_1''$, *etc., tangents à la sphère* S, *suivant les cercles* C_1, C_1', C_1'', *et ayant leurs sommets* d_1, d_1', d_1'', *etc., situés sur la droite* D_1, *les plans* P_1, P_1', P_1'', *etc., de tous ces cercles* C_1, C_1', C_1'', *etc., passeront par la droite* D, *intersection des deux plans* Θ *et* Θ' *tangents à la sphère* S *aux points* m *et* m'.

Et de plus, *ces plans* P_1, P_1', P_1'', *etc., couperont la droite* D_1 *en des points* p_1, p_1', p_1'', *etc., qui seront les* pôles *des cercles* C_1, C_1', C_1'', *etc., par rapport à leur* polaire commune D.

Et comme il a été démontré (n° 367) que si l'on avait deux cercles (qui ne se coupent pas) C_1 et C_1' d'une sphère S, ces deux cercles pouvaient être enveloppés par deux cônes ayant leurs sommets sur la droite D_1 qui unissait leurs *pôles* p_1 et p_1' par rapport à la *polaire* D qui est l'intersection de leurs deux plans, il s'ensuit que l'on peut énoncer ce qui suit :

3° *Étant données une sphère* S *et une droite* D extérieure *à cette surface, si l'on fait passer par* D *une série de plans* P, P', P'', *etc., coupant la sphère* S *suivant les*

cercles C, C′, C″, *etc.*, *les* pôles p, p′, p″, *etc.*, *de ces cercles*, *par rapport à la* polaire D, *seront sur une droite* D_1, *et ces cercles pourront être enveloppés deux à deux par des cônes dont les sommets seront situés sur* D_1.

Et comme il a été démontré ci-dessus : 1° que si l'on avait deux cercles C et C′, se coupant en deux points *m* et *m′* et situés sur une sphère S, ces deux cercles pouvaient être enveloppés par deux cônes dont les sommets *d* et *d′* étaient extérieurs à la surface S, et que les points *m* et *m′* étaient les points de contact des deux plans tangents Θ et Θ′, qui se coupaient suivant la droite D qui unissait les points *d* et *d′*; 2° que tout plan P passant par D coupe la sphère S suivant un cercle C_1 et la droite $\overline{mm'}$ ou D_1 en un point p_1, qui est le *pôle* de C_1 par rapport à la *polaire* D, il s'ensuit que ce plan P_1 coupe les cercles C et C′ en quatre points *q* et *n*, *q′* et *n′* qui formeront un quadrilatère inscrit au cercle C_1, et dont les diagonales se croiseront au point p_1.

Dès lors, en vertu de ce qui a été dit (n° 333) sur les quadrilatères inscrits à une section conique, les côtés opposés $\overline{qq'}$, $\overline{nn'}$ prolongés iront se couper sur la *polaire* D.

On peut donc énoncer ce qui suit :

4° *Si par une droite* D_1 *coupant une sphère* S *en deux points* m et m′, *on mène une série de plans* P, P′, P″, *etc.*, *coupant la sphère* S *suivant les cercles* C, C′, C″, *etc.*, *ces cercles pourront être unis deux à deux par des cônes dont les sommets seront situés sur la droite* D, *intersection des deux plans* Θ *et* Θ′ *tangents à la sphère* S *aux points* m *et* m′.

CHAPITRE VIII.

DÉVELOPPEMENT DES SURFACES CYLINDRIQUES ET CONIQUES.

---

372. Si nous imaginons une série de plans tangents menés à une surface réglée et développable par toutes ses génératrices droites, tous ses plans (que nous supposons successifs et infiniment voisins) se couperont deux à deux suivant

des droites, qui ne seront autres que les diverses génératrices droites ou *caractéristiques* de la surface développable, et en imaginant que chacun tourne respectivement autour de chacune de ces droites pour venir s'appliquer successivement sur celui qui le précède, on voit qu'en ne conservant de chacun de ces plans que l'élément de la surface qui y était contenu, tous les éléments de la surface courbe se trouvent rapportés et étendus sur un même plan; toutes les courbes tracées sur la surface développable se transformeront sur le plan du développement en d'autres courbes. On obtiendra ainsi ce que l'on nomme la *transformée* d'une courbe C à double courbure et tracée sur une surface développable. Il est à remarquer que si nous supposons une tangente θ à la courbe C en un certain point, elle sera encore tangente à la transformée C_1 après le développement effectué sur le plan tangent T mené par la tangente θ, car l'élément rectiligne que la tangente θ avait de commun avec la courbe C n'a pas cessé d'être commun à la tangente θ et à la courbe C_1. Si dans le plan tangent T, sur lequel on effectue le développement de la surface développable, on suppose une perpendiculaire à la tangente θ, elle est aussi perpendiculaire à la courbe C avant et après le développement, donc la tangente n'a pas cessé d'être tangente par le mouvement des plans tangents, et la normale entraînée dans le même mouvement ne cesse pas d'être normale.

D'après cela, il sera bien facile de rapporter sur le développement d'une surface développable une courbe et sa tangente, ce qui est presque toujours le but qu'on se propose. Au lieu de construire tous les plans tangents pour les rabattre successivement, et les recoucher les uns sur les autres pour ne former qu'un seul plan, on coupe la surface proposée par une autre surface qui soit perpendiculaire à toutes ses génératrices, ou bien on cherche sur la surface une courbe dont la transformée s'obtienne immédiatement (ou en d'autres termes une courbe dont la forme de la *transformée* soit connue d'avance), dont la longueur ou le développement soit facile à trouver et qui soit telle que l'on connaisse facilement l'angle que fait chaque génératrice droite de la surface avec cette courbe. Ainsi, un cylindre et un cône droits à bases circulaires peuvent se développer facilement, car le premier ayant toutes ses génératrices perpendiculaires à la circonférence de sa base et parallèles entre elles, après le développement de la surface ces génératrices resteront parallèles et seront perpendiculaires à la transformée de la base, de sorte que l'on aura le développement du cylindre en prenant une droite égale en longueur à la circonférence de sa base et lui élevant (par les divers points de cette droite) des perpendiculaires.

Le cône de révolution a tous les points de la circonférence de sa base également distants du sommet, et cette circonférence coupe sous l'angle droit toutes les géné-

ratrices droites du cône; il suffira donc de la développer sur une autre circonférence de cercle décrite avec un rayon égal à cette distance ou à l'*apothéme* du cône droit donné.

La génération de l'hélice prouve que sa transformée est une ligne droite et se confond par conséquent avec sa tangente en chacun de ses points; c'est même la considération dont on se sert pour construire la tangente à l'hélice cylindrique, comme nous le verrons au chapitre X. On pourra donc employer l'hélice cylindrique, au lieu de la section droite, pour développer un cylindre, puisque l'on sait que la transformée de l'hélice est une droite; mais il faudra alors connaître *à priori* la longueur d'une *spire* de cette courbe et l'*angle* sous lequel elle coupe les génératrices droites du cylindre.

Nous n'examinerons ici que le développement des surfaces cylindriques et coniques *générales*.

373. *Développement d'un cylindre.* Cette question peut se décomposer en plusieurs autres que nous allons distinguer, pour rendre l'opération plus simple et plus facile à saisir.

1° *Construire la section droite d'un cylindre.* Il faut couper le cylindre par une surface normale à toutes ses génératrices; la courbe de section est ce qu'on nomme la *section droite* du cylindre; il est évident que le plan est la surface qui satisfera à la condition demandée, puisque toutes les génératrices droites d'un cylindre sont parallèles.

Première méthode. Soit A (*fig.* 235) la directrice droite du cylindre et B sa base, soit H^p la trace horizontale du plan de section droite, elle est perpendiculaire aux projections horizontales des génératrices droites du cylindre (n° 81). Nous n'avons pas besoin des projections de cette section, il nous suffit d'en trouver le rabattement (puisque nous devons construire une ligne droite égale en longueur au périmètre de cette courbe *section droite*); pour cela nous remarquons que les plans qui projettent horizontalement les génératrices rencontrent le plan P suivant des droites perpendiculaires aux génératrices correspondantes, donc pour la génératrice G, par exemple, rabattons son plan projetant, en le faisant tourner autour de sa trace horizontale ou G^h prise comme axe de rotation; au moyen du point m qui se rabat en m^r, G sera rabattue en G', l'intersection du plan projetant G et du plan P sera rabattue en la droite m^hn' perpendiculaire sur G', et n' sera le rabattement d'un point m de la section droite. Pour déterminer tous les autres points, il suffit d'observer que toutes les génératrices font le même angle avec le plan horizontal, ou, ce qui est la même chose, avec leurs projections horizontales, donc dans les rabattements des divers plans projetants, toutes ces génératrices sont parallèles et il en sera de même de leurs perpendiculaires, il suffira donc de répéter pour

chacune les constructions faites sur G, et nous déterminerons une courbe K′, qui n'est pas le rabattement de la section droite, mais qui servira à la construire.

En effet la droite $m^h n$ est perpendiculaire à H^p, puisqu'elle est sur un plan perpendiculaire à la fois au plan P et au plan horizontal, et par conséquent à leur intersection, elle sera donc le rayon de rabattement du point n, qui se portera en n^r. On déterminerait de la même manière tous les points du rabattement C^r de la section droite C.

Deuxième méthode. La construction se simplifierait en prenant un nouveau plan vertical de projection parallèle aux génératrices droites de la surface cylindrique, et ensuite en rabattant le plan de section droite, sur le plan horizontal ou en considérant le plan de section droite comme un nouveau plan horizontal de projection.

2° *Développer le cylindre.* Puisque toutes les génératrices sont perpendiculaires à la section droite, prenons-en la transformée rectiligne $\alpha'\alpha''$, puis élevons des perpendiculaires $\alpha'a'$, $\alpha''a''$ aux extrémités de cette transformée rectiligne, elles comprendront entre elles la surface cylindre développée; en supposant toutefois qu'on n'effectue le déroulement du cylindre qu'une seule fois.

3° *Rapporter sur le développement une courbe située sur le cylindre et dont on connaît les projections.* Les constructions précédentes nous conduisent directement à la transformée de la base du cylindre; en effet, nous avons construit les rabattements de toutes les portions des génératrices comprises entre cette base et la section droite; si donc ayant ouvert le cylindre en un point α de la section, ou suivant la génératrice droite G_1 qui y passe, nous prenons sur la transformée de la section droite des parties $\alpha'n' = \alpha n^r$, et en assez grand nombre, ensuite que par tous les points ainsi obtenus nous élevions les perpendiculaires $\alpha'a'$, $n'p'$, $\gamma'c'$,..... qui nous représenteront les génératrices G_1, G....., il n'y aura plus qu'à porter sur elles les distances comprises entre la base et la section droite, distances qui sont données en pn'....., la courbe B′ qui passe par les extrémités de ces droites est la transformée de la base du cylindre.

Au moyen de la transformée de la base du cylindre, on obtient facilement les transformées de toutes les autres courbes tracées sur le cylindre, et cela en portant sur les génératrices au développement et en partant des divers points de la transformée de la base des longueurs égales aux parties comprises entre cette base et la courbe dont on cherche la transformée.

4° *Enfin mener la tangente en un point de la transformée.* Observons que la tangente au point m, doit être sur le plan tangent dont l'intersection avec le plan de section droite est une tangente à la section droite. Menons la trace du plan tangent, elle rencontre celle du plan P en i, mais la tangente à la section droite, qui est l'intersection de ces deux plans, rencontrera le plan horizontal en ce même

point i, qui ne variera pas pendant le développement, donc cette tangente sera donnée en Θ'. Or, dans le développement, la tangente à une courbe lui demeure tangente, donc Θ' se confondra avec $\alpha'\alpha''$, le point i se trouvera toujours à une distance in^r du point n vers le point α, il faudra donc prendre $n'i'=n^ri$, joindre $i'p'$, ce sera la tangente Θ rapportée sur la *transformée*.

373 *bis*. Nous avons indiqué deux méthodes (n° 373, 1°) pour construire la section droite d'un cylindre, celle que l'on doit préférer est sans contredit la seconde qui consiste à changer de plan vertical de projection, ce qui est facile, lorsqu'il s'agit d'un cylindre donné par sa base ou trace horizontale et les projections de la droite D à laquelle ses génératrices droites sont parallèles, puisqu'il suffit de connaître la projection $D^{v'}$ de la droite D sur le nouveau plan vertical de projection dont la ligne de terre L'T' est prise parallèle à D^h.

Mais si nous avons exposé la première méthode, c'est qu'elle nous permet de montrer une application du principe dont nous avons parlé dans la première partie de ce cours (n° 156), et qui consiste, lorsqu'il s'agit d'un problème plan, à faire passer dans l'espace une partie du système plan pour arriver souvent avec facilité à la solution du problème proposé sur ce système plan.

La *fig.* 235 nous en offre un exemple remarquable.

Et en effet : soient données (*fig.* 235 *bis*) une courbe B et quatre droites A, K, L et D, telles que A soit dirigé arbitrairement par rapport à la courbe B, et que les droites A et K soient rectangulaires ou non entre elles, et que les droites L et D soient aussi rectangulaires ou non entre elles.

Cela posé :

Menons par un point b' de la courbe B une droite $b'a'$ coupant la droite A au point a', et par ce même point b' une droite $b'd'$ parallèle à la droite D, puis par le point a' une droite $a'd'$ parallèle à la droite L, les droites $b'd'$ et $a'd'$ se couperont en un point d'.

Faisant la même construction pour chacun des points b, b', b'', etc., de la courbe B, on trouvera une suite de points d, d', d'', etc., qui détermineront une courbe B'; on demande : *la courbe* B *étant une section conique, quelle sera la courbe* B'?

La courbe B' sera une section conique de même espèce que la courbe B, ainsi une ellipse, si B est une ellipse, une parabole si B est une parabole, etc.; et en effet :

Désignons la droite A par H^v, la droite D par G^h, la droite K par H^x, la droite L par I^h et le point d par x^h, et la courbe B' par C^h; il est évident que la courbe C^h est la projection horizontale de la courbe C section faite dans un cylindre ayant la courbe B pour trace horizontale et ayant ses génératrices droites projetées horizontalement suivant des parallèles à G^h, par un plan P coupé par les plans

auxiliaires X.... (parallèles entre eux et passant par les génératrices G.... du cylindre) suivant des droites I.... parallèles entre elles et projetées sur le plan horizontal en des parallèles à la droite I^h.

Quelle que soit la nature géométrique de la courbe B, la courbe B′ sera de même nature, car si la courbe B a une asymptote, la courbe B′ aura une asymptote; si la courbe B est fermée, la courbe B′ sera fermée; si la courbe B est coupée par une droite en *n* points, la courbe B′ sera aussi telle qu'elle sera coupée par une droite en *n* points.

De certaines propriétés dont jouit le cylindre à base section-conique.

373 *ter*. Tout cylindre oblique (non de révolution) ayant pour section droite une ellipse ou une hyperbole jouit de la propriété d'avoir un *axe* et le cylindre elliptique est le seul des trois cylindres obliques qui puisse être coupé par deux plans de directions contraires suivant des *cercles*.

1° De l'axe du cylindre elliptique ou hyperbolique.

Concevons une droite A parallèle aux génératrices d'un cylindre ayant pour base une section conique E quelconque, faisons passer par la droite A une suite de plans M, M′, M″, etc., chacun de ces plans coupera le cylindre suivant deux génératrices droites.

Ainsi, le plan M suivant les droites G et G_1,
— M′ — G′ et G_1',
— M″ — G″ et G_1'',
— etc. — etc.

Si la droite A est entre les couples de droites G, G_1 et G″, G_1'', etc., et si de plus elle est équidistante de chacune des droites dans chaque couple, on dit que la droite A est l'*axe* du cylindre.

Concevons la section droite d'un cylindre oblique, cette section sera une ellipse E, ou une hyperbole H, ou une parabole P. Or, si l'on prend le plan de section droite pour plan horizontal, la droite A sera verticale; et pour que la droite A soit un axe, il faudra que sa trace horizontale *a* soit le milieu de toutes les cordes des courbes E ou H ou P passant par elle.

Or, il est évident que cela ne peut avoir lieu qu'autant que le point *a* sera le centre de la section droite.

Ainsi, il est démontré que parmi les trois cylindres obliques, deux seulement, savoir : l'elliptique et l'hyperbolique, peuvent avoir et ont en effet un axe

qui est la droite passant par le centre de la section droite et parallèle aux génératrices droites du cylindre; et il est évident que toute section faite par un plan quelconque à travers l'un ou l'autre de ces deux cylindres, aura son centre sur l'*axe*.

2° *Sections circulaires du cylindre elliptique.*

Lorsque l'on cherche si une surface peut être coupée par un plan suivant un cercle, il faut nécessairement partir de cette *idée géométrique* que le cercle est une ellipse dont les deux axes sont égaux.

Comme dans un cercle tous les systèmes de diamètres conjugués sont rectangulaires entre eux, il faut alors faire passer le plan (dont l'inclinaison doit être calculée de manière à obtenir une section circulaire) par une tangente θ à la surface et par une droite R perpendiculaire à cette tangente θ, cette droite R étant telle qu'elle puisse contenir le centre du cercle à construire.

Cela posé :

Si l'on coupe par un plan P quelconque un cylindre elliptique, on sait que la section E aura toujours pour centre le point o en lequel l'*axe* du cylindre est coupé par le plan P.

Cela posé :

Si l'on prend un point m sur le cylindre Σ et si l'on construit le plan T tangent en m à cette surface Σ, il faudra que le plan (m, A) passant par le point m et l'axe A du cylindre Σ soit perpendiculaire au plan T, pour que menant par le point m un plan P quelconque coupant le plan T suivant une tangente θ et le plan (m, A) suivant une droite R, les deux droites R et θ soient rectangulaires entre elles, puisque la droite R doit contenir le centre du cercle C, section faite dans la surface Σ par le plan P.

Il est donc évident qu'ayant construit la section droite E du cylindre elliptique, le point m devra être l'un des quatre sommets de cette ellipse E.

Cela posé :

Désignons par a et a' les extrémités du grand axe et par b et b' les extrémités du petit axe de la section droite E, et construisons les quatre plans T, T', Θ, Θ' respectivement tangents au cylindre Σ en chacun des sommets a, a', b, b' de l'ellipse E.

Ces quatre plans détermineront par leurs intersections deux à deux un prisme droit Δ ayant pour section droite le rectangle circonscrit à l'ellipse E et construit sur ses axes.

Pour obtenir une section circulaire il faudra couper le prisme Δ par un plan P dirigé de telle façon que la section soit un carré.

Or l'on ne peut couper deux plans verticaux T et Θ rectangulaires entre eux, suivant deux droites perpendiculaires entre elles, que par un plan perpendiculaire à l'un des plans donnés T ou Θ.

Le plan P qui donnera une section circulaire dans le cylindre elliptique Σ devra donc passer par l'un des axes de la section droite E ou être parallèle à l'un de ces axes.

Cela posé :

Il est évident que pour que la section faite dans le prisme rectangulaire Δ soit un carré, il faut que le plan sécant soit parallèle au grand côté du rectangle base de ce prisme Δ.

Dès lors désignant par a le demi-grand axe et par b le demi-petit axe de l'ellipse E et par α l'angle que le plan P passant par le grand axe de l'ellipse E doit faire avec le plan de cette courbe E, on devra avoir :

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}$$

Pour que le plan P coupe le prisme Δ suivant un carré, ou le cylindre Σ suivant un cercle C ayant son rayon égal à a.

373 *quater*. *Des plans diamétraux conjugués du cylindre oblique à base section-conique.*

Il est évident qu'un cylindre étant coupé par des plans parallèles suivant des courbes *identiques*, ou en d'autres termes *superposables*, si l'on conçoit une série de cordes parallèles dans un cylindre Σ ayant pour section droite une ellipse ou une hyperbole ou une parabole, les milieux de toutes ces cordes seront sur un *plan* qui prend le nom de *plan diamétral* du cylindre Σ oblique et à base section-conique; et les cordes dont les milieux sont sur le plan diamétral, sont dites *cordes conjuguées* du plan diamétral, ou le plan diamétral est dit : *plan diamétral conjugué* des cordes parallèles.

A chaque plan diamétral correspond un système de cordes conjuguées, et réciproquement à chaque système de cordes parallèles correspond un plan diamétral conjugué.

Cela posé :

Concevons, dans le cylindre Σ, un système de cordes parallèles, Y, Y′, Y″, etc., et le plan diamétral P conjugué de ces cordes.

Traçons dans le plan P une droite quelconque D, et imaginons, dans le cylindre Σ, une suite de cordes X, X′, X″, etc., parallèles à D, les milieux de ces cordes seront sur un plan Q qui sera le plan diamétral conjugué de ces cordes X, X′, X″, etc.

Cela posé : 1° Les deux plans P et Q se couperont suivant l'axe A du cylindre Σ.

Et en effet. Nous pourrons toujours mener un plan Z parallèle aux cordes Y et X ; ce plan Z coupera le cylindre Σ suivant une section conique E' dont le centre sera sur l'axe A si le cylindre Σ est elliptique ou hyperbolique, et ce même plan Z coupera les plans P et Q suivant deux droites Y_1 et X_1 respectivement parallèles aux cordes Y, Y', Y'', etc., et X, X', X'', etc. En vertu de ce que le plan P est *diamétral* par rapport aux cordes X..... la droite Y_1 passera par le milieu de la corde X_1, et en vertu de ce que le plan Q est *diamétral* par rapport aux cordes Y..... la droite X_1 passera par le milieu de la corde Y_1; les deux cordes X_1 et Y_1 se croisent donc au centre de la courbe ellipse ou hyperbole E'; les deux plans P et Q se coupent donc suivant l'axe A.

De plus les diamètres X_1 et Y_1 sont évidemment des diamètres conjugués de la courbe E' : donc dans le cas où E' est une ellipse, les plans tangents T et T' au cylindre Σ et parallèles au plan diamétral P et les plans tangents Θ et Θ' au même cylindre Σ et parallèles au plan diamétral Q seront coupés par tout plan sécant Z, suivant un parallélogramme circonscrit à la section E' donnée par ce plan Z dans le cylindre elliptique Σ.

Et dans le cas où la courbe E' est une hyperbole, les plans diamétraux P et Q sont coupés par tout plan Z suivant les diamètres conjugués de la section E'.

Mais nous avons mené dans le plan P une droite D arbitraire; pour chaque position nouvelle D_0 de la droite D, on aura un système différent de cordes parallèles X_0, X_0', X_0'', etc.; mais évidemment les milieux de toutes ces cordes parallèles au plan P, quelle que soit leur direction, seront toujours sur un seul et même plan, qui sera le plan Q.

Les plans tels que P et Q sont dits *plans diamétraux conjugués*. Pour un cylindre parabolique, on verra facilement que tous les plans diamétraux sont parallèles entre eux et que deux plans diamétraux ne peuvent être conjugués entre eux; mais à chaque plan diamétral P correspondra une infinité de plans Q, Q', Q'', etc., parallèles entre eux et passant chacun par une des cordes parallèles entre elles et conjuguées au plan P; en sorte que le plan P coupera les plans Q, Q', Q'', etc., suivant des droites parallèles entre elles et aux génératrices droites du cylindre parabolique Σ; et tout plan Z coupera : 1° le cylindre Σ, suivant une parabole E', 2° le plan P suivant un diamètre Y_1 de E' et 3° les plans Q, Q', Q'', etc., suivant des cordes de E' et conjuguées du diamètre infini Y_1.

Si l'on considère la section droite du cylindre Σ, on aura une ellipse ou une hyperbole, ou une parabole, et il est évident que parmi les divers systèmes des

plans diamétraux conjugués P et Q, dans le cas du cylindre elliptique ou hyperbolique, ou parmi les systèmes composés d'un plan diamétral P et de plans-cordes Q, Q', Q'', etc. (les plans P et Q, Q',..... étant conjugués entre eux) dans le cas du cylindre parabolique, il existera toujours un système rectangulaire, qui sera donné : 1° par les plans diamétraux P_1 et Q_1 passant par les axes de l'ellipse ou de l'hyperbole section droite, ou 2° par le plan diamétral P_1 et les plans-cordes Q_1, Q'_1, Q''_1, etc., passant le plan P_1 par l'axe infini de la parabole section droite, et les plans-cordes Q_1, Q'_1, Q''_1, etc., par les cordes conjuguées de l'axe infini, cordes qui seront dès lors perpendiculaires à cet axe infini de la parabole section droite.

On donne au plan P_1 le nom de *plan principal*, ainsi qu'au plan Q_1, quand ce plan Q_1 est un plan diamétral.

Ainsi les cylindres elliptiques et hyperboliques ont deux plans *diamétraux principaux*, et le cylindre parabolique n'a qu'un seul plan *diamétral principal*.

Ainsi l'on peut dire que le plan diamétral principal est celui qui coupe rectangulairement le système des *cordes* parallèles entre elles et qui lui sont *conjuguées*.

Du développement d'un cône quelconque.

371. *Développement d'un cône.* Nous décomposerons cette question, comme la précédente relative au cylindre, en cinq parties.

1° *Section droite.* Toutes les génératrices droites d'un cône concourant en un même point qui est le sommet du cône, une sphère d'un rayon arbitraire, mais ayant pour centre le sommet du cône proposé résoudra la question partielle qui nous occupe. Soit *s* le sommet et B la base du cône (*fig.* 236); du sommet *s*, avec un rayon quelconque, décrivons une sphère : elle coupe le cône suivant une courbe qu'on détermine facilement. En effet, M étant le plan méridien principal de la sphère, pour avoir le point où la génératrice droite G du cône rencontre la sphère, on suppose le plan vertical projetant horizontalement cette génératrice, et on le fait tourner autour de son intersection avec le plan M, jusqu'à ce qu'il soit devenu parallèle au plan vertical de projection, ou en d'autres termes, jusqu'à ce qu'il soit venu se confondre avec le plan M; alors le point *m* se porte en *m'*, et sa projection verticale est en *m'*, la génératrice droite G prend la position G' et rencontre en *n'* la section méridienne principale de la sphère; dans le retour du plan (que nous venons de considérer), le point *n'* conservera la même hauteur au-dessus du plan horizontal de projection et sera toujours le point de rencontre de la droite G (pendant son mouvement de rotation) avec la sphère. Donc cette rencontre aura lieu en *n*; on trou-

verait ainsi tous les autres points de l'intersection C des deux surfaces conique et sphérique.

2° *Trouver le développement de la section droite.* La courbe C que nous venons de déterminer étant à double courbure, on ne peut pas en obtenir la vraie grandeur par un rabattement; dès lors on la suppose tracée sur un cylindre vertical ayant pour base sa projection horizontale C^h, et on développe ce cylindre par le procédé que nous avons indiqué ci-dessus, en observant que la base C^h est alors la section droite de ce cylindre; la droite $\alpha_1\alpha_1'$ est égale au périmètre de la courbe C^h rectifiée; la *transformée* de la courbe à double courbure C s'obtient en prenant des perpendiculaires égales aux hauteurs in^v de ses divers points n au-dessus du plan horizontal. La courbe C_1' donne la vraie longueur de la section droite et sphérique C.

3° *Développer le cône.* Tous les points de la section droite sont situés sur la surface sphérique, et par conséquent également éloignés du sommet du cône, donc cette courbe se développera sur un arc de cercle décrit du même rayon que la sphère et tracé en $\alpha'n'\alpha''$. La nappe supérieure du cône serait donnée, au développement, par le secteur compris entre les prolongements des rayons extrêmes $s'\alpha'$ et $s'\alpha''$ lesquels comprennent le développement de la nappe inférieure du cône.

4° *Décrire la transformée d'une courbe quelconque* X *située sur le cône.* Il faut par les divers points de C', mener des rayons qui représenteront les génératrices droites du cône au développement, et prendre sur eux des longueurs égales à la partie comprise entre le sommet s du cône et chacun des points de la courbe X tracée sur ce cône, puis joindre les extrémités de ces longueurs ainsi portées par une ligne qui sera la transformée X' de la courbe X; nous obtiendrions la transformée de la base ou trace horizontale du cône donné par la construction précédente, en remarquant que pour chaque point, on a $s'm' = s^v m'^v$ (*).

5° *Mener la tangente à la transformée.* La tangente à la transformée au point m' n'est autre chose que la position que vient prendre sur le plan du développement la tangente mp à la base, or cette tangente et la tangente au point n à la courbe C sont dans un même plan tangent à la surface conique le long de la géné-

(*) La transformée d'une courbe tracée sur une surface cylindrique ou conique et en général sur une surface développable peut présenter des points d'inflexion, *voyez* à ce sujet dans l'ouvrage qui a pour titre : *Complément de géométrie descriptive*, le mémoire qui a pour titre : *Construction des points d'inflexion de la transformée d'une courbe plane ou à double courbure tracée sur une surface développable.* J'ai publié pour la première fois ce mémoire dans le 22e cahier du Journal de l'École polytechnique.

ratrice droite G, et cette tangente est l'intersection de ce plan tangent avec le plan tangent à la sphère au point n. Nous pouvons construire ce dernier plan de deux manières : 1° en considérant la sphère comme une surface de révolution ayant pour axe son diamètre vertical, menant donc (n° 252) la tangente en n' au cercle Δ, cherchant sa trace horizontale p', la ramenant en p et menant $H^{v\prime}$ perpendiculaire à $s^h n^h$, ce sera la trace horizontale du plan tangent cherché. 2° Le plan tangent à la sphère est perpendiculaire à l'extrémité du rayon, qui aboutit au point de contact, nous sommes donc conduits à mener par le point n un plan perpendiculaire au rayon sn (n° 83), mais comme nous ne cherchons ici que la trace horizontale du plan tangent, nous construirons au point n une verticale du plan, puis par la trace de cette droite menant une perpendiculaire à $s^h n^h$, on aura $H^{v\prime}$. Les traces H^v et $H^{v\prime}$ se coupent en un point p, et la droite pn^h sera la projection horizontale T^h de la tangente T à la courbe C au point n, on en conclura T^v. Cela posé, on a dans l'espace un triangle mpn rectangle en n, or le côté mn est construit sur le développement en $m^t n^t$, la tangente T à la courbe C vient se porter en T^t tangente à C^t, puis la longueur de l'hypoténuse étant donnée en mp, si du point m^t comme centre et avec un rayon égal à mp on décrit un arc de cercle coupant T^t en p^t, la droite $m^t p^t$ sera la tangente demandée. Il faut avoir soin de prendre le point p^t du côté convenable par rapport au point n^t, et pour cela il suffit d'examiner si le point p se trouve du côté de la génératrice droite suivant laquelle on aurait fendu le cône ou du côté opposé.

Remarquons que le *plan* qui donne la section droite du cylindre est ce que devient la *sphère* employée dans le problème actuel, quand le sommet du cône s'éloigne à l'infini.

374 *bis. Toute surface conique oblique* (*à base-section conique*) *jouit de la propriété d'avoir un* AXE.

Menons par le sommet s d'un cône Σ ayant pour trace sur le plan horizontal une section conique E, une droite A située dans l'intérieur de ce cône; par cette droite A menons une série de plans M, M′, M″, etc., le plan M coupera le cône suivant deux génératrices droites G et G_1, le plan M′ suivant G′ et G'_1, le plan M″ suivant G″, G''_1 et ainsi de suite.

Si la droite A est telle qu'elle divise en deux parties égales les angles $\widehat{G, G_1}$ et $\widehat{G', G'_1}$ et $\widehat{G'', G''_1}$, etc., alors cette droite A sera dite *axe* du cône Σ.

Examinons donc si une semblable droite A peut exister.

Le cône Σ peut toujours être coupé par un plan P suivant une ellipse E. Prenons ce plan P pour plan horizontal de projection, menons par le sommet s du

cône une droite D extérieure à ce cône et coupant dès lors le plan P en un point *d* extérieur à l'ellipse E.

Par ce point *d* menons (*fig.* 236 *bis*) deux tangentes à l'ellipse E et désignons par *m* et *m'* les points de contact.

Cela posé :

Par la droite D faisons passer une suite de plans Q, Q', Q'', etc., les traces H^q, $H^{q'}$, $H^{q''}$, etc., passeront toutes par le point *d* et chacune de ces traces coupera l'ellipse E en deux points, ainsi :

H^q coupera E en les points		q et q_1
$H^{q'}$	—	q' et q'_1
$H^{q''}$	—	q'' et q''_1
etc.,	—	etc.

Divisons en deux parties égales les angles $\widehat{qsq_1}$, $\widehat{q'sq'_1}$, $\widehat{q''sq''_1}$, etc., par les droites I, I', I'', etc., qui viendront couper respectivement les cordes $\overline{qq_1}$, $\overline{q'q'_1}$, $\overline{q''q''_1}$, etc., de l'ellipse E en les points *j*, *j'*, *j''*, etc.

Il est évident que les points *m*, *j*, *j'*, *j''*, etc., et *m'* seront sur un arc de courbe γ.

Cela fait :

Par la génératrice droite *sm* du cône Σ faisons passer une suite de plans R, R', R'', etc., les traces H^r, $H^{r'}$, $H^{r''}$, etc., de ces plans passeront toutes par le point *m* et chacune d'elles coupera l'ellipse E en un second point *r*, *r'*, *r''*, etc.

Divisons les angles $\widehat{rsm}$, $\widehat{r'sm}$, $\widehat{r''sm}$, etc., en deux parties égales par les droites L, L', L'', etc., ces droites couperont les cordes $\overline{rm}$, $\overline{r'm}$, $\overline{r''m}$, etc., de l'ellipse E, respectivement en les points *l*, *l'*, *l''*, etc., et tous ces points formeront évidemment une courbe fermée δ passant par le point *m* et tangente en *m* à l'ellipse E.

Or, il est évident que les deux courbes δ et γ, en vertu de leur forme et de leur construction, se couperont en deux points, dont l'un sera le point *m* et nous désignerons le second point par *a*.

Je dis que la droite *sa* est *l'axe* du cône Σ.

Et en effet :

Menons un plan Y perpendiculaire à la droite $\overline{sa}$, comme cette droite $\overline{sa}$ est évidemment dans l'intérieur du cône Σ, ce plan Y coupera le cône suivant une ellipse B.

Maintenant : si nous menons par les droites D et *sa* un plan, il coupera le cône suivant deux génératrices droites G_2 et G_2' et la droite *sa* divisera en deux parties égales l'angle $\widehat{G_2sG_2'}$.

Si nous menons par les droites *sa* et *sm* un plan, il coupera le cône suivant deux

génératrices droites K et K' et la droite *sa* divisera en deux parties égales l'angle KsK'.

Cela posé :

Le plan Y coupera la droite *sa* en un point *o* et les droites G_2, G'_2 et K, K' en les points g, g', k, k', et l'on aura évidemment en ligne droite les points g, g' et o, k, k' et o, et de plus, évidemment aussi on a $go = g'o$ et $ko = k'o$.

Le point *o* est donc le centre de l'ellipse B.

Dès lors, il est démontré que la droite *sa* est l'*axe* du cône Σ, et en même temps il est démontré que tout cône à base-section conique jouit de la propriété d'avoir un *axe*.

Des plans diamétraux conjugués du cône oblique à base-section conique.

374 *ter*. Puisque toute surface conique à base-section conique possède un axe A, nous pouvons représenter une surface conique par sa base elliptique E et son axe A mené par le centre *o* de cette ellipse et perpendiculairement au plan de cette courbe que nous prendrons pour plan horizontal de projection; le sommet *s* du cône sera situé sur l'axe A.

Cela posé :

Menons une droite D coupant la nappe inférieure du cône en deux points *d* et *d'*; supposons une suite de droites D', D'' D''', etc., parallèles entre elles et à la droite D; prenons les milieux *p* des cordes interceptées par la nappe inférieure et la nappe supérieure sur chacune de ces droites parallèles; tous les points *p* seront sur une surface Δ passant par le sommet *s* du cône.

Cela posé, je dis que la surface Δ n'est autre qu'un plan.

Et en effet :

Menons une suite de plans X, X', X'', etc., parallèle entre eux et aux cordes D....., ces plans couperont le cône respectivement suivant des sections coniques $\delta, \delta', \delta''$, etc., qui seront semblables et semblablement placées. Toutes les cordes de δ parallèles à D auront leur milieu sur un diamètre α conjugué de D; toutes les cordes de δ' parallèles à D auront leur milieu sur un diamètre α' conjugué de D, et ainsi de suite.

Or, en vertu de la théorie de la similitude, il est évident que tous les diamètres $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., sont parallèles entre eux et dans un plan P passant par le sommet *s* du cône.

Ainsi, le cône à base-section conique a une infinité de *plans diamétraux*.

Concevons un plan diamétral P et le système de cordes D.... qu'il divise en deux parties égales, on dit que les cordes D.... et le plan P sont *conjugués* entre eux.

Cela posé :

Étant donnés un plan diamétral P et le système de cordes D.... qui lui sont conjugués, menons dans le plan P (qui est intérieur au cône et le coupe suivant deux génératrices droites) deux droites arbitraires, l'une B coupant la nappe inférieure du cône en deux points, et l'autre K coupant la nappe inférieure et supérieure du cône et chacune en un point.

Toutes les cordes parallèles à B auront un plan diamétral conjugué Q et qui sera intérieur au cône, et toutes les cordes parallèles à K auront un plan diamétral conjugué R et qui sera évidemment extérieur au cône.

Ces trois plans P, Q, R, sont dits plans *diamétraux conjugués;* et ils se coupent deux à deux suivant trois droites X', Y', Z', qui sont dites *diamètres conjugués* du cône.

Trois plans diamétraux conjugués d'un cône jouissent donc de la propriété suivante ;

Savoir : que les diamètres conjugués X', Y', Z', suivant lesquels ils se coupent deux à deux, sont respectivement parallèles aux systèmes de cordes parallèles entre elles et divisées chacune en deux parties égales par les plans diamétraux conjugués.

Si nous faisons passer par l'axe A deux plans P et Q coupant l'ellipse E suivant des diamètres conjugués de cette courbe, le plan R sera perpendiculaire à l'axe A, et par conséquent perpendiculaire aux plans P et Q; si les plans P et Q coupent le plan de l'ellipse E suivant les axes de cette courbe, les trois plans conjugués P_1, Q_1, R_1 (ainsi déterminés) seront rectangulaires entre eux et ils se couperont deux à deux suivant trois droites A, X, Y, qui seront rectangulaires entre elles.

Ainsi, un cône admet une infinité de systèmes de plans diamétraux conjugués obliques et un seul système de plans diamétraux conjugués rectangulaires; ces derniers prennent le nom de plans *diamétraux principaux.*

Ainsi, une surface conique jouit de la propriété d'avoir trois plans *diamétraux principaux.*

Les droites X, Y, rectangulaires entre elles et à l'axe A jouissent évidemment de la même propriété que cet axe A, savoir : que tout plan mené par chacune d'elles coupe la surface conique suivant deux génératrices droites dont l'angle formé par les parties situées pour l'une sur la nappe inférieure et pour l'autre sur la nappe supérieure du cône est divisé en deux parties égales par cette droite X ou Y.

Ainsi, une surface conique à base-section conique jouit de la propriété d'avoir trois *axes* rectangulaires entre eux, dont l'un A est dans l'intérieur du cône et dont les deux autres Z et Y sont extérieurs au cône.

Il suit encore de ce qui précède que si l'on a un système de diamètres conjugués X', Y', Z' (le diamètre Z' étant intérieur au cône), si l'on mène par X' deux plans T et T' tangents au cône suivant des génératrices droites G et G', les trois droites G, G', Z' seront dans un plan diamétral P passant par Y'.

Et de même, si par la droite Y' on mène deux plans Θ et Θ' tangents au cône suivant des génératrices droites K et K', les trois droites K, K', Z' seront dans un plan diamétral Q passant par X', et les trois plans (Z', X') ou Q, (Z', Y') ou P et (X', Y') ou R seront trois plans diamétraux conjugués du cône.

374 *quater*. Les plans diamétraux principaux P_1, Q_1 et R_1 d'une surface conique Σ à base section-conique, coupent chacun cette surface en deux parties symétriques; dès lors, si l'on décrit du sommet s du cône comme centre avec un rayon arbitraire une sphère S, les deux surfaces S et Σ se couperont suivant une courbe λ, laquelle sera symétrique par rapport aux deux plans diamétraux principaux P_1 et Q_1 qui se coupent suivant l'axe intérieur A du cône Σ.

Si donc on coupe la courbe λ par un plan R' parallèle au plan R_1, on obtiendra sur cette courbe quatre points n, n', n'', n''', qui seront les sommets d'un rectangle; et si l'on construit en chacun de ses points une tangente à la courbe λ, on aura les tangentes : θ en n, θ' en n', θ'' en n'', θ''' en n'''.

Or, en vertu de ce que la courbe λ est symétrique par rapport aux plans P et Q, il est évident que ces tangentes se couperont deux à deux en des points situés sur les plans P_1 et Q_1, de telle manière que les quatre tangentes θ, θ', θ'', θ''', formeront un quadrilatère gauche.

Si par deux tangentes qui se coupent, ou, en d'autres termes, si par deux côtés adjacents du quadrilatère gauche on fait passer un plan, on aura quatre plans passant respectivement par quatre côtés du rectangle (n, n', n'', n''') et qui seront chacun tangent en deux points à la courbe λ.

Dès lors, on voit que si l'on fait rouler un plan sur la courbe λ de manière à ce qu'il soit tangent à cette courbe et en deux points de cette courbe, on obtiendra pour surface enveloppe un cylindre; et comme l'on peut faire rouler un semblable plan de deux manières différentes sur la courbe λ, on pourra toujours placer cette courbe λ sur deux cylindres ψ et ψ', dont l'un aura ses génératrices parallèles à l'*axe* X et dont l'autre aura ses génératrices parallèles à l'*axe* Y du cône Σ.

De sorte que les deux cylindres ψ et ψ' sont rectangulaires entre eux.

Mais si l'on remarque que la courbe-intersection de la sphère S et du cône Σ se compose de deux branches λ et λ' : l'une λ située sur la nappe inférieure, et l'autre λ' située sur la nappe supérieure du cône Σ, on voit de suite que ces deux branches λ et λ' sont symétriques par rapport à chacun des trois plans diamétraux

principaux P_1, Q_1 et R_1, et que l'on peut faire rouler de deux manières différentes un plan tangent à l'une et à l'autre de ces branches; en sorte que par les branches λ et λ' on peut faire passer trois cylindres dont les génératrices seront respectivement parallèles aux trois axes A, X, Y du cône Σ.

Des nœuds que peut offrir l'une des projections de la courbe-intersection d'un cône et d'une sphère.

375. Il arrive quelquefois que la projection verticale de l'intersection d'une surface conique par une sphère concentrique possède un nœud, sans que la courbe dans l'espace présente cette circonstance. Cela doit évidemment arriver lorsque le plan mené par le sommet du cône parallèlement au plan vertical coupe à angle droit et en deux parties égales une corde de la base du cône; car si l'on unit les extrémités de cette corde avec le sommet du cône, on aura deux génératrices droites de la surface conique symétriquement placées par rapport à ce plan méridien, de sorte qu'elles ont même projection verticale, et elles vont dès lors couper la sphère en deux points situés aux extrémités d'une corde perpendiculaire à ce plan méridien et qui ont par conséquent même projection verticale, donc la projection verticale de l'intersection présentera pour ce point un *nœud* qu'il est facile d'après cela de construire directement. On conçoit que si cette symétrie se présentait plusieurs fois, la projection offrirait autant de nœuds. Enfin si la base de la surface conique est une section conique ayant un axe sur la trace de ce plan méridien, la projection verticale sera une courbe non fermée, parce que la courbe dans l'espace est divisée par ce plan en deux parties, qui ont même projection verticale.

376. En général, ayant deux surfaces S et S' qui se coupent suivant une courbe C, on peut se proposer de déterminer les *nœuds* des projections de cette courbe d'intersection C, si toutefois ces nœuds existent. Cherchons, par exemple, les nœuds de la projection verticale C^v; pour cela, dans l'une des surfaces S, nous mènerons une série de cordes perpendiculaires au plan vertical de projection, et nous ferons passer une surface Σ par les milieux de toutes ces cordes; dans l'autre surface S' nous mènerons de même une série de cordes perpendiculaires au plan vertical de projection et nous ferons passer une surface Σ' par les milieux de toutes ces cordes, et la projection verticale de l'intersection des deux surfaces Σ et Σ' passera par les *nœuds* de C^v, s'il en existe; on trouverait de même les *nœuds* de C^h (*).

(*) *Voyez* l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, chap. III, p. 156.

CHAPITRE IX.

DES SURFACES TANGENTES, APPLICATION AUX OMBRES ET A LA PERSPECTIVE.

377. Deux surfaces sont dites tangentes l'une à l'autre en un point m, lorsqu'en ce point le plan tangent à l'une des surfaces est en même temps tangent à l'autre. Deux surfaces seront dites tangentes l'une à l'autre le long d'une courbe C, lorsqu'en chacun des points de cette courbe les deux surfaces auront même plan tangent. Si donc l'on coupe les deux surfaces par un plan passant par un point de contact, les courbes d'intersection auront en ce point même tangente. Si l'une des surfaces est réglée, on peut mener le plan sécant par la génératrice droite G passant par le point m contact des deux surfaces données; cette génératrice G sera donc tangente à l'autre surface.

D'après cela, on voit que pour construire une surface conique ayant pour sommet un point donné s et qui soit tangente à une surface donnée S, la *méthode générale* consisterait à conduire par le point s une série de plans sécants coupant respectivement la surface S suivant des courbes B, B'... et à mener par ce point s des tangentes à chacune de ces courbes de section B, B'..... et ces tangentes seront les génératrices droites de la surface conique demandée.

Si la surface S est une sphère, on fera passer les plans sécants par le point s et par le centre de la sphère; dans ce cas, la surface donnée est de révolution, et le point s est sur l'un des axes de rotation de cette surface, dont le cône tangent sera de révolution et aura même axe que la surface proposée, et il touchera la sphère tout le long d'un cercle ou *parallèle* (n° 248).

Plus loin nous verrons comment la méthode générale, indiquée ci-dessus, doit être modifiée suivant le mode de génération particulier de la surface S donnée.

378. La série des points de contact de chaque génératrice droite du cône tangent à une surface quelconque S forme (sur cette surface S) une courbe C, qui prend en général le nom de *courbe de contact*.

Mais si l'on suppose que le point s est un *point lumineux*, il est évident que toute

la partie de la surface S comprise dans l'intérieur de la surface conique et dirigée vers le sommet *s* sera éclairée, et que l'autre partie sera dans l'ombre, car elle ne pourra recevoir aucun rayon de lumière ; c'est pourquoi, dans ce cas, la courbe C prend le nom de *ligne de séparation d'ombre et de lumière* (n° 181). Si la surface conique, qui prend le nom de *cône lumineux*, est prolongée et coupée par un plan ou une surface quelconque S′ suivant une courbe C′, il est clair qu'aucun point de cette surface compris dans la courbe d'intersection C′ ne peut recevoir de rayons lumineux, le reste de la surface étant éclairé ; l'existence de cette ombre provient donc de l'interposition de la surface S, et l'espace de la surface S′ renfermé par la courbe C′ prend le nom d'*ombre portée de la surface* S *sur la surface* S′.

Si l'on suppose que le point *s* soit l'*œil* d'un observateur regardant la surface S, chaque génératrice du cône prend le nom de *rayon visuel*, aucun rayon visuel ne pouvant parvenir à l'œil de l'observateur des divers points situés au delà de la courbe C, la surface semble pour l'observateur terminée à cette courbe, qui prend par cette raison le nom de *contour apparent*. Si l'on coupe la surface conique par une autre surface qu'on nomme *tableau* (laquelle est généralement un plan situé entre l'œil *s* et la surface S), tous les rayons visuels viendront peindre sur le tableau l'image des divers points de la surface, de sorte que si l'on enlevait le corps lui-même, mais en conservant l'image ainsi peinte sur le tableau, l'œil de l'observateur placé en *s* éprouverait encore les mêmes sensations ; cette image a reçu le nom de *perspective de la surface* S.

379. Si le point *s* s'éloigne à l'infini, la surface conique dégénère en une surface cylindrique tangente à la surface S le long d'une courbe C, qui prend encore les noms de *courbe de contact*, *ligne de séparation d'ombre et de lumière*, *contour apparent*, suivant que l'on considère la question sous l'un des trois points de vue précédents, savoir : 1° point de vue purement géométrique ou 2° et 3° point de vue d'application aux ombres et perspective. Mais au point de vue géométrique, si l'on prolonge la surface cylindrique tangente et qu'on la coupe par un plan perpendiculaire aux génératrices, l'intersection prend le nom de *projection complète de la surface* S (n° 191).

379 *bis*. Il faut établir d'une manière nette et précise la différence qui existe, lorsque l'on emploie la langue graphique, entre, *dire :* qu'une surface est complétement définie et écrite, ou *dire :* qu'une surface est complétement projetée sur l'un des plans de projection.

Pour résoudre les problèmes proposés sur une surface, il n'est point nécessaire que cette surface soit complétement projetée, mais il faut toujours qu'elle soit complétement dessinée et écrite.

Nous l'avons déjà dit, une surface est complétement dessinée et écrite, lorsqu'elle est donnée par les projections de certaines lignes qui suffisent pour pouvoir déterminer les projections d'un point quelconque situé sur cette surface.

On désigne par le nom de ***projection complète sur un plan*** P d'une surface donnée Σ, la projection sur ce plan P de la courbe de contact de la surface Σ et d'un cylindre qui, ayant ses génératrices perpendiculaires au plan P, serait tangent à cette surface Σ.

Les deux projections complètes d'une surface étant données sur le plan horizontal et sur le plan vertical de projection ne peuvent donc évidemment suffire pour représenter complétement la surface, pour la définir, car évidemment plusieurs surfaces différentes entre elles peuvent avoir les mêmes projections complètes, puisque l'on peut sans peine concevoir plusieurs surfaces tangentes en même temps à deux cylindres donnés de forme et de position dans l'espace.

Aussi, la projection complète d'une surface sur l'un des plans de projection horizontale ou verticale ne peut être utile que lorsqu'il s'agira de connaître les points du plan horizontal ou du plan vertical de projection qui sont nécessairement les projections horizontales ou verticales de points appartenant à la surface donnée.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit que la projection complète d'une surface sur l'un des plans de projection est une courbe qui renferme sur ce plan un espace tel que chacun de ses points est nécessairement la projection d'un point de la surface donnée.

Lorsque l'on veut donner une représentation complète d'un corps, on est obligé de construire la projection complète de ce corps.

Lorsque l'on cherche les intersections de plusieurs surfaces entre elles, il est utile de projeter complétement ces surfaces, parce que les projections des courbes d'intersection peuvent être plus facilement déterminées, lorsqu'elles doivent être tangentes aux courbes dites projections complètes des surfaces, ce qui arrive lorsqu'elles ont des points communs avec ces courbes; et d'ailleurs il est évident que cela doit être, car désignons par Σ et Σ' deux surfaces se coupant suivant une courbe C; désignons par J et J' les courbes de contact des surfaces Σ et Σ' avec les cylindres tangents et projetant complétement ces surfaces sur le plan horizontal de projection, on aura les courbes C^h, J^h, J'^h.

Si la courbe C coupe les courbes J et J', la première au point m et la seconde au point m', on aura m^h situé à la fois sur C^h et J^h et m'^h situé aussi à la fois sur C^h et J'^h.

Mais il est évident que le plan T tangent en m à la surface Σ sera perpendicu-

laire au plan horizontal de projection, donc H^r sera une droite tangente à la fois à C^h et J^h et au point m^h; il en sera de même pour le point m'^h commun aux courbes C^h et J'^h.

Les points tels que m^h et m'^h, en lesquels les projections horizontales des contours apparents J et J′ sont tangentes à la projection C^h de la courbe C intersection des deux surfaces données, sont dits *points limites* de la projection C^h; on obtiendrait de la même manière les *points limites* de la courbe C^v.

380. On a vu dans ce qui précède que le problème de mener un cône tangent à une surface peut être résolu sous trois points de vue différents : 1° comme problème de géométrie descriptive, c'est-à-dire sous le *point de vue théorique;* 2° comme problème d'ombre, il est alors lié à la détermination de l'ombre portée ; 3° comme problème de perspective, il doit alors être accompagné de la détermination de la figure tracée sur le tableau. Nous allons l'examiner sous ces trois faces, mais nous ferons tout d'abord remarquer que dans le dernier cas, la surface tangente est nécessairement une surface conique, et que dans les deux premiers, on peut supposer que la surface tangente est une surface cylindrique, ou, en d'autres termes, est un cône dont le sommet est transporté à l'infini sur une droite donnée de direction.

Problème de géométrie théorique.

381. La méthode générale (n° 377) ne doit pas toujours être préférée, il faut se guider sur la nature particulière de la surface S. Une surface peut toujours être considérée comme engendrée par le mouvement continu d'une *ligne ;* cela posé, on peut distinguer trois modes principaux de ce mouvement.

1° La surface Σ étant engendrée par une courbe C se mouvant parallèlement à elle-même, un de ses points *m* parcourant une courbe gauche D sera l'enveloppe d'un cylindre mobile Δ ayant pour génératrices des droites successivement parallèles aux diverses tangentes de la directrice D. Cela posé, si l'on conçoit le cône tangent S demandé, ce cône étant tangent à la surface Σ suivant une courbe K (*à construire par points*), cette courbe K ira couper en divers points p, p'..... la courbe C dans ses diverses positions; pour chaque point *p* d'intersection, la surface Σ, la surface cylindrique Δ et la surface conique S sont tangentes entre elles, et ont par conséquent même plan tangent; or le plan tangent à la surface conique S doit passer par son sommet *s;* si donc par ce point *s* on mène le plan tangent à la surface cylindrique Δ (n° 235), la génératrice droite de contact ira couper la courbe C en un point *p*, qui sera par conséquent un point de la courbe K; en répétant cette construction pour un grand nombre de positions de la courbe C,

on obtiendra autant de points p que l'on voudra de cette courbe de contact K, laquelle, avec le sommet s, déterminera complétement la surface conique demandée S.

2° La surface Σ peut être engendrée par une courbe C se mouvant parallèlement à elle-même, de manière à changer de grandeur en restant toujours semblable et semblablement placée, l'un de ses points m parcourant une courbe gauche D. La surface Σ est alors l'enveloppe d'un cône mobile Δ, et si l'on conçoit le cône S tangent à la surface Σ, la courbe de contact K du cône S et de la surface Σ coupera respectivement la courbe C en chacune de ses diverses positions; désignons par p, p'..... les points de rencontre de la courbe K et des diverses positions C, C'..... de la courbe mobile et génératrice C; pour chaque point p d'intersection, la surface Σ et les deux surfaces coniques Δ et S sont tangentes entre elles, et ont par conséquent même plan tangent. Or, le plan tangent à la surface conique S demandée doit passer par son sommet s. Si donc par ce point s on mène le plan tangent à la surface conique Δ déterminée par deux positions successives de la courbe génératrice C (n° 225), la génératrice droite de contact ira couper la courbe C en un point p, qui sera par conséquent un point de la courbe K. En répétant cette construction pour un grand nombre de positions successives de la courbe C, on aura autant de points que l'on voudra de la courbe K, qui, avec le sommet s, fera connaître la surface conique demandée S.

3° Enfin, la surface Σ peut être engendrée par une courbe plane C, se mouvant de manière que l'un de ses points m parcoure une courbe gauche D, et que son plan reste toujours normal à cette courbe D. Deux positions successives P et P' du plan de la courbe *génératrice* C se coupent suivant une droite A perpendiculaire au plan osculateur à la courbe D et au point m, en lequel le plan P coupe cette courbe *directrice* D; dans le mouvement infiniment petit à effectuer pour passer de la position P à la position P', la courbe C peut être considérée comme tournant autour de l'axe A et engendrant dès lors une portion infiniment petite de surface de révolution; de sorte que dans ce cas la surface Σ peut être considérée comme composée d'une infinité de portions infiniment petites de surfaces de révolution Φ, dont les méridiennes sont toutes égales à la courbe C et dont les parallèles sont des cercles tangents aux courbes analogues à D parcourues par les divers points de la génératrice C. La surface Σ est alors l'enveloppe de cette surface de révolution mobile Φ.

Si l'on conçoit le cône tangent S demandé, la courbe de contact K de ce cône et de la surface donnée Σ coupera la courbe C en chacune de ses positions C, C', C''..... et respectivement en les points p, p', p''..... pour chaque point p la surface Σ, la surface de révolution Φ et la surface conique S sont tangentes,

c'est-à-dire qu'elles ont même plan tangent; mais le plan tangent à la surface conique S passe par son sommet *s*; si donc par le point *s* on mène un plan tangent à la surface de révolution Φ, le point de contact sera un point de la courbe K. Mais par un point extérieur à une surface de révolution Φ, on peut mener une infinité de plans tangents à cette surface qui auront pour *enveloppe* un cône tangent à cette surface Φ. Il faudra donc dès lors par le point *s*, comme sommet, construire un cône M tangent à la surface de révolution Φ; la courbe de contact B des deux surfaces Φ et M ira couper la courbe C en un point qui appartiendra à la courbe K (*).

382. Problème 1. *Construire à une surface de révolution* Σ *un cône* S *tangent et ayant son sommet en un point donné.* On donne le sommet *s* de la surface conique S, elle sera donc entièrement déterminée, si l'on trouve sa directrice ou sa courbe de contact K avec la surface de révolution Σ; or, par chaque point de cette courbe K passe un *parallèle* et un *méridien* de la surface de révolution; on pourra donc déterminer cette courbe K de deux manières : 1° en cherchant sur chaque cercle ou *parallèle* les points qui appartiennent à cette courbe K de contact; 2° en faisant la même recherche pour chaque courbe *méridienne* de la surface de révolution Σ.

1° Pour employer la première méthode, dite *méthode du parallèle*, nous remarquons que la surface de révolution peut être considérée (n° 250, 6ᵉ *mode*) comme l'enveloppe d'un cône mobile δ ayant son sommet sur l'axe de la surface de révolution donnée Σ et dont les génératrices droites font avec cet axe un angle variant suivant une loi déterminée (loi qui est ordinairement écrite *graphiquement* au moyen de la courbe méridienne de la surface Σ). Si par le point *s* on mène un plan tangent à chacune de ces surfaces coniques δ que l'on doit considérer comme des *enveloppées* de la surface Σ, les génératrices droites de contact iront couper le *parallèle* correspondant en un point de la courbe K. La méthode exposée (n° 225) pour construire ce plan tangent exige que l'on connaisse le sommet du cône δ, mais on peut y suppléer comme il suit :

Soit (*fig.* 237) A l'axe, C la courbe méridienne de la surface de révolution donnée et Δ le *parallèle* sur lequel nous cherchons les points appartenant à la courbe de contact K. Le *parallèle* Δ coupe la méridienne C en un point *m*; en menant en ce point *m* la tangente Θ à la courbe C, on aura la génératrice droite de l'*enveloppée* conique particulière δ à laquelle on doit mener le plan tangent; pour cela, par le point *s* on fait passer un plan horizontal, qui coupe les droites A et Θ en des points *o* et *p*, et la surface conique δ suivant un cercle, ayant son centre en *o* et pour rayon *op*; puis par le point *s* on mène des tangentes à ce

---

(*) *Voyez* pour plus amples détails sur les divers modes de génération d'une surface, l'ouvrage qui a pour titre : *Développement de géométrie descriptive*, chapitre VII et dernier.

cercle ; on unit les projections horizontales des points de contact avec le point A^h, qui est en même temps la projection horizontale du sommet du cône δ, et l'on a les génératrices de contact des plans tangents menés par le point s, elles vont couper Δ^h en des points x^h et x'^h que l'on projette verticalement en x^v et x'^v, et l'on a ainsi deux points x et x' de la courbe K cherchée.

2° Quant à la seconde méthode dite *méthode du méridien*, on remarque qu'un plan méridien coupe tous les *parallèles* en des points tels qu'en menant en ces points des tangentes à ces parallèles, ces tangentes sont parallèles entre elles et perpendiculaires au plan méridien ; elles forment donc une surface cylindrique $\mathcal{C}$ qui (ayant une courbe méridienne C pour base) est tangente à la surface de révolution Σ et tout le long de cette méridienne C ; si donc par le point s, on mène un plan tangent à cette surface cylindrique $\mathcal{C}$, lequel plan sera perpendiculaire au plan méridien correspondant à la courbe C, la génératrice droite de contact coupera la méridienne C en un point de la courbe K cherchée. Ici encore on peut avantageusement modifier la méthode générale. En effet, si l'on fait tourner autour de l'axe A (*fig.* 238) le système formé de la surface de révolution Σ, du cylindre tangent $\mathcal{C}$ et du point s, jusqu'à ce que le plan méridien M soit venu en M' parallèle au plan vertical de projection, le plan tangent T à la surface cylindrique $\mathcal{C}$ sera alors venu en T' perpendiculaire au plan vertical de projection (n° 247), donc s'^v se trouvera sur $V^{T'}$; de même, l'intersection Θ' de ce plan T' par le plan méridien M' se projettera sur $V^{T'}$; mais Θ' est tangente à la courbe méridienne située dans le plan M' ; donc si du point s'^v on mène une tangente Θ'^v à la projection verticale de cette méridienne, le point de contact x' représentera le point x de la courbe cherchée, ce point x étant ramené en x' dans le plan méridien M', qui est *parallèle au plan vertical de projection ;* si donc on ramène la tangente Θ' dans sa position naturelle, à savoir celle où elle passe par le point s, le point x' viendra prendre la position x, et ce point x sera un point de la courbe K cherchée ; en répétant la même construction pour d'autres courbes *méridiennes*, on aura tant de points que l'on voudra de la courbe de contact K demandée. Je ferai remarquer que dans le mouvement de rotation le point s décrit un cercle B, et pour avoir la position s', il suffit de prendre sur B^h l'arc $s^h s'^h = aa'$.

Si l'on voulait avoir le point situé sur le plan méridien passant par a'', il faudrait prendre $s^h s''^h = a''a'$, et ainsi de suite. Les points a, a'', etc..... étant les intersections du cercle B^h par des diamètres de ce cercle B^h, sont aussi bien déterminés que possible, c'est pourquoi je crois la méthode que je viens d'expliquer préférable (sous le point de vue graphique) à celle que l'on donne ordinairement et qui conduit à décrire le cercle B_1 sur le diamètre $A^h s^h$ et à prendre ses intersections p^h avec les traces horizontales des divers plans méridiens, le plan p étant

alors le pied d'une perpendiculaire au plan méridien M et dès lors ce point *p* appartient à la tangente Θ.

382 *bis*. Les deux méthodes précédentes employées pour la solution du problème proposé : *construire la courbe de contact d'un cône et d'une surface de révolution*, donnent lieu à des remarques importantes sous le point de vue *graphique*.

On sait que l'on ne peut admettre en géométrie descriptive une solution comme suffisamment exacte, si elle est fondée sur la construction de la tangente en un point d'une courbe inconnue. Tandis que l'on admet très-bien toute solution fondée sur le tracé (au moyen de la règle et de l'équerre) d'une tangente à une courbe inconnue (*géométriquement* parlant, mais donnée par son *tracé*), cette tangente étant assujettie à passer par un point fixe ou à être parallèle à une droite fixe; parce qu'alors l'erreur commise n'existera que sur la position réelle du point de contact de la courbe et de la tangente et que le point de contact sera toujours suffisamment approché de la position géométrique qu'il devrait réellement occuper. Or dans la première méthode pour obtenir chacun des cônes *enveloppés* de la surface de révolution, on considère un point *m* sur la courbe méridienne M de la surface de révolution, on mène en *m* une tangente θ à la courbe M, laquelle vient couper l'axe A de la surface de révolution en un point *d* et ce point *d* est le sommet d'un cône tangent à la surface de révolution tout le long du parallèle Δ engendré par le point *m*.

Si la tangente θ est menée au moyen d'une règle et à vue par rapport à la courbe M, on ne sera pas assuré de la position du point *d*, car le point *m* étant à une distance assez grande de l'axe A, la tangente θ′ que l'on aura tracée pourra, n'occupant pas la position rigoureuse et géométrique θ, quoique faisant avec elle un angle excessivement petit, couper l'axe Δ en un point *d′* distant du point *d* (que l'on aurait dû avoir) de plusieurs millimètres, de telle sorte que la droite *d′s* (qui unit le point *d* et le sommet *s* du cône dont on veut construire la courbe de contact avec la surface de révolution) coupera le plan du parallèle Δ en un point *q′* assez éloigné du point *q* en lequel ce plan serait coupé par la droite *ds* laquelle serait la position géométrique de la droite unissant le point *s* et le sommet *d* du cône *enveloppée* de sa surface de révolution par rapport à la caractéristique Δ. Dès lors la tangente T′ menée du point *q′* au parallèle Δ donnera un point de contact *x′* très-différent du point *x* contact de la tangente T qui aurait dû être menée du point *q*.

Le point *x′* pourra donc être entaché d'une grave erreur en sa position sur l'*épure*. On est donc conduit à prendre sur l'axe A un point *d*, à mener par ce point une tangente θ à la courbe méridienne M, et l'erreur commise sur la position du point de contact *m* ne pourra être *sur l'épure* que d'un demi-millimètre environ. On aura donc une incertitude sur la position du parallèle Δ, mais il est

évident que le point x que l'on construira sera entaché d'une erreur graphique qui ne pourra pas s'élever à plus d'un millimètre.

La première méthode devra donc être modifiée ainsi que je viens de le dire, lorsque l'on ne saura pas construire géométriquement une tangente en un point de la courbe méridienne.

Au lieu de se donner le parallèle Δ pour construire approximativement la position du point d, on se donne le point d pour construire approximativement la position du parallèle Δ.

Quant à la seconde solution, on voit de suite qu'elle peut être employée, soit que l'on sache construire géométriquement une tangente à la courbe méridienne, soit qu'on ne le sache pas (*).

383. Problème 2. *Par une droite donnée mener un plan tangent à une surface donnée.* Il est évident que le problème est quelquefois impossible suivant la nature de la surface et la position de la droite par rapport à elle. Si, par exemple, la surface est développable, le plan tangent doit contenir une génératrice droite de la surface; si donc la droite donnée, et qui sera contenue dans ce plan tangent, est parallèle à cette génératrice, ou la coupe, elle sera nécessairement tangente à la surface donnée, dans le premier cas en un point situé à l'infini sur la génératrice de contact, ou dans le second cas en son point d'intersection avec cette génératrice; il faudra donc par la droite donnée faire passer un plan de direction arbitraire et coupant la surface donnée suivant une courbe γ; si la droite est tangente à cette courbe γ en un point g, on construira la génératrice droite G de la surface passant par le point de contact g, et le plan de cette génératrice et de la droite donnée sera le plan tangent demandé; mais si la droite donnée coupe la courbe d'intersection γ le problème sera impossible.

Si la surface est gauche, on cherchera le point où elle est percée par la droite donnée, on construira la génératrice droite G de la surface gauche passant par ce point; cette génératrice G et la droite donnée détermineront un plan qui sera nécessairement tangent à la surface en un certain point de cette génératrice G (n° 210); dans ce cas, le problème est toujours possible et généralement susceptible de plusieurs solutions lorsque la droite donnée rencontre la surface.

Si la surface est de révolution, le problème n'est pas toujours possible; dans le cas où le plan tangent existe, on peut l'obtenir par les diverses méthodes suivantes :

1° Par un point quelconque s de la droite donnée D, comme sommet, on con-

---

(*) Les réflexions précédentes s'appliquent évidemment au problème : *Construire la courbe de contact d'une surface de révolution et d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à une droite donnée.*

struit une surface conique tangente à la surface de révolution (n° 382); tout plan tangent à cette surface conique sera en même temps tangent à la surface de révolution et au point où la génératrice droite de contact du cône et du plan tangent coupe la courbe de contact des deux surfaces; le problème sera donc possible chaque fois que par la droite D on pourra mener un plan tangent à la surface conique.

2° Le point *s* peut être choisi à l'infini sur la droite D, alors la surface conique dégénère en une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à la droite donnée D; menant donc par cette droite D un plan tangent à cette surface cylindrique, on aura le plan tangent demandé.

3° Le cylindre employé dans la seconde méthode serait déterminé, si l'on connaissait sa courbe de contact C avec la surface de révolution; or, cette courbe rencontre un *parallèle* Δ de la surface de révolution en un point par lequel passe une génératrice droite, qui appartient en même temps à une autre surface cylindrique ayant pour directrice ce *parallèle* Δ et pour génératrices droites des parallèles à la droite D, et il est évident que ces deux surfaces cylindriques auront même plan tangent suivant leur génératrice commune, puisque l'une et l'autre auraient en ce point même plan tangent que la surface de révolution, ce plan étant déterminé pour l'une par la génératrice et la tangente à la courbe C, pour l'autre par la génératrice et la tangente au parallèle Δ; donc les bases de ces surfaces cylindriques sont tangentes. En faisant donc passer par tous les *parallèles* de la surface de révolution des surfaces cylindriques ayant leurs génératrices droites parallèles à la droite donnée D, puis traçant une courbe B qui enveloppe toutes leurs bases horizontales, cette courbe B sera la base horizontale d'un cylindre tangent à la surface de révolution; dans l'exécution, on ne pourra construire qu'un certain nombre de cylindres *enveloppées* et la courbe B *enveloppe* de leurs bases tendra d'autant plus à se confondre avec la véritable base du cylindre tangent que l'on aura employé un plus grand nombre de *parallèles;* il faudra ensuite mener par la droite D un plan tangent à la surface cylindrique ayant pour base cette courbe B et pour génératrices droites des parallèles à D; il sera facile de trouver le point de contact avec la surface de révolution, en cherchant le point où elle est rencontrée par la génératrice droite de contact, ou encore en construisant le *parallèle* directeur du cylindre qui est l'*enveloppée* correspondante.

4° Enfin, *Monge* a résolu le problème en concevant une seconde surface de révolution engendrée par la droite D tournant autour de l'axe A de la surface de révolution proposée; cette seconde surface est gauche, de sorte que le plan cherché passant par la génératrice D, sera un plan tangent à cette surface, et par conséquent ce sera un plan tangent commun aux deux surfaces de révolution. Si l'on

cherche la courbe méridienne de cette seconde surface, et si l'on construit une tangente commune aux deux courbes méridiennes situées dans un même plan méridien, cette tangente, en tournant autour de l'axe A, engendrera une surface conique de révolution tangente à la fois aux deux surfaces de révolution précédentes (n° 248). Si par la droite D on peut mener un plan tangent à cette surface conique, ce sera le plan demandé; dans le cas contraire, le problème est impossible.

383 *bis*. Si la surface est engendrée par un cercle B de rayon constant R, dont le centre parcourt une courbe gauche C, le plan du cercle mobile étant normal en toutes ses positions à la courbe *directrice* C, cette surface prend le nom de *surface-canal*, et l'on pourra, pour la solution du problème : *Mener un plan tangent par une droite* D *à une surface-canal*, employer la méthode indiquée ci-dessus (paragraphe 3°), et en effet :

Imaginons dans l'espace un cercle B du rayon R et ayant son centre *o* sur une droite A et son plan P étant perpendiculaire à la droite A, concevons ensuite une droite D faisant un angle quelconque α avec la droite A.

Cela posé : concevons que le cercle B est la directrice d'un cylindre Σ dont les diverses génératrices droites G seront parallèles à la droite D, et coupons ce cylindre Σ par un plan quelconque Q.

Ce plan Q coupera le cylindre oblique Σ suivant une ellipse E. Or si nous traçons sur le cercle B deux diamètres M et N rectangulaires entre eux, ils seront projetés obliquement sur l'ellipse E par des plans parallèles au cylindre Σ en des diamètres M^o et N^o qui seront conjugués entre eux. Parmi les systèmes de diamètres rectangulaires M et N du cercle B on peut choisir celui pour lequel le diamètre M est horizontal; alors sa projection oblique M^o lui sera égale en longueur et le diamètre N étant une ligne de plus grande pente du plan P sera projeté obliquement sur le plan Q, par un plan X parallèle à la droite D, suivant une droite N^o parallèle à la projection orthogonale D^h de la droite D sur ce plan Q (considérant le plan Q comme un plan horizontal de projection) et la longueur de N^o sera égale à $\frac{N}{\cos\alpha}$ en désignant par α l'angle que le plan P fait avec le plan Q.

De plus, le diamètre M^o qui est parallèle au diamètre M et égal à 2R, sera didirigé perpendiculairement à la projection orthogonale A^h de la droite A sur le plan Q.

Cela posé : on devra pour résoudre le problème énoncé, projeter orthogonalement la courbe C en C^h sur le plan horizontal et C^v sur le plan vertical, et encore obliquement en C^o sur le plan horizontal par des droites parallèles à la droite D ou par un cylindre oblique Δ.

Les cercles B seront projetés obliquement par des cylindres obliques Σ et parallèlement à la droite D suivant des ellipses E, qui auront leurs centres sur la courbe C^o et dont un système de diamètres conjugués sera donné par une droite N^o parallèle à D^h et égale à $\frac{2R}{\cos\alpha}$ (α prenant des valeurs différentes, ou, en d'autres termes, variant suivant les inclinaisons des plans des cercles B sur le plan horizontal) et par une droite M^o perpendiculaire à la projection T^h de la tangente T à la courbe C au point *o* centre du cercle B considéré et cette droite M^o étant égale à 2R ou au diamètre du cercle B.

1° On voit donc que pour les diverses ellipses E, E′, E″, etc., on aura un diamètre constant 2R, mais variable de position par rapport à la ligne de terre (puisque les tangentes T, T′, T″, etc., à la courbe C se projettent nécessairement suivant des droites T^h, T'^h, T''^h, etc., qui ne sont point parallèles entre elles), et un diamètre de longueur variable $\frac{2R}{\cos\alpha}$ (puisque l'angle α varie, les tangentes T, T′, T″, etc., de la courbe C ne faisant pas un angle constant *en général*, avec le plan horizontal de projection), mais de direction constante puisqu'il sera toujours parallèle à la droite D^h.

Ayant construit une série d'ellipses E, E′, E″, etc., on les enveloppera par une courbe K, et en menant par la trace horizontale de la droite D une tangente à la courbe K on aura la trace H^Θ du plan Θ demandé.

2° La construction des ellipses E, E′, E″, etc., serait longue, car ce sont des ellipses différentes entre elles, mais si la courbe C était plane et de plus horizontale, et que l'on eût, par exemple, une surface comme le *tore* ou *surface annulaire*, alors les constructions seraient simplifiées, car toutes les ellipses E, E′, E″, etc., auraient non-seulement leurs diamètres M^o égaux entre eux, mais encore les diamètres N^o, puisque l'angle α serait constant, étant égal à un angle droit pour chaque cercle B. Mais les diamètres conjugués M^o et N^o de l'ellipse E, ne comprendraient pas entre eux le même angle que les diamètres M'^o et N'^o de l'ellipse E′, en sorte que quoique les constructions se trouvent simplifiées, la solution graphique en définitive exige toujours la construction séparée de chacune des ellipses E, E′, E″, etc., chacune de ces ellipses étant donnée par un système de diamètres conjugués.

3° Mais si le plan Q ou plan horizontal de projection était perpendiculaire à la droite D, le plan du cercle C lieu des centres des cercles B de la surface annulaire étant oblique à ce plan Q, alors les diverses ellipses E, E′, E″, etc., etc., seraient données par leurs axes et non par un système de diamètres conjuguées.

Et en effet :

Projetons orthogonalement le cercle C sur le plan Q on aura C^h, le centre *o* d'un cercle B se projettera en o^h sur le plan Q, et le diamètre horizontal M de B se projettera en une droite M^h égale à 2R et normale à la courbe C^h. Le diamètre N de B et perpendiculaire à M sera une ligne de plus grande pente du plan P de ce cercle B; il fera donc avec le plan horizontal un angle α qui sera celui que le plan P fait avec le plan horizontal Q, et cet angle α variera pour chaque cercle B puisque le cercle C n'est pas horizontal; mais ce diamètre N sera perpendiculaire à la tangente T menée au point *o* au cercle C, et le plan (T, N) sera perpendiculaire au plan Q, il ne sera donc autre que le plan projetant T en T^h, T^h étant tangente en o^h à C^h. Par conséquent le diamètre N se projettera sur T^h; or T^h et M^h sont perpendiculaires entre eux, ils seront donc les axes de l'ellipse E ou B^h.

Il est évident que toutes les ellipses E, E', E'', etc., que l'on obtiendra sur le plan Q, auront toutes leurs axes (normaux à la courbe C^h) égaux entre eux; mais leurs axes dirigés suivant les tangentes à cette courbe C^h seront inégaux parce que l'angle α varie en passant d'un cercle B à son voisin B'.

Il faudrait donc tracer une suite d'ellipses sur des axes inégaux, ce qui serait assez long, puis envelopper ces ellipses par une courbe K.

4° Si le cercle C était horizontal, la droite D étant verticale, alors tous les cercles B se projetteraient sur le plan horizontal Q suivant des lignes droites normales à C^h, et C^h ne serait autre qu'un cercle identique à C.

Dans ce cas particulier la courbe K serait facile à tracer, car il suffirait de mener par chaque point o^h de la courbe C^h une normale Z à cette courbe et de porter sur Z à droite et à gauche du point o^h, le rayon R du cercle B, on aurait deux points *z* et *z'* qui appartiendraient à la courbe K; et l'on voit de suite que dans ce cas la courbe K est formée de deux branches K' et K'' parallèles et équidistantes de la courbe C^h, en sorte que les trois courbes K', K'', C^h ont même *développée*.

5° Mais la courbe K peut être très-facilement construite dans tous les cas précédemment examinés, si l'on remarque que la surface engendrée par un cercle B de rayon R constant et dont le centre parcourt une courbe gauche C, son plan étant normal à cette courbe *directrice* C, peut être considérée comme l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère de rayon constant dont le centre parcourt la courbe directrice, gauche ou à double courbure C (*).

Car, étant donnée une sphère S du rayon R, concevons son centre en un point *o*

(*) *Voyez* dans l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, ce que nous avons dit dans le chapitre VII et dernier au sujet des *surfaces des canaux*.

d'une droite T; si la sphère S passe en une position successive et infiniment voisine S', le centre sera placé au point o' qui sur la droite T sera le successif et infiniment voisin de o.

Les deux sphères S et S' se couperont suivant un grand cercle B (dès lors du rayon R) et dont le plan sera perpendiculaire à la droite T et dont le centre sera le point o ou le point o', suivant que l'on marchera de gauche à droite sur la droite T ou de droite à gauche sur cette droite.

Cela établi :

Considérons une sphère S du rayon R ayant son centre en un point o de la directrice C, la *caractéristique* de la surface sera le cercle B du rayon R dont le plan sera *perpendiculaire* au point o à la tangente T menée en o à la courbe directrice C.

En sorte que la surface peut être considérée comme engendrée ou par son *enveloppée* sphérique S ou par sa *caractéristique* circulaire B.

Cela posé :

Si nous concevons un cylindre Δ tangent à la surface et dont les génératrices droites seront parallèles à la droite D, ce cylindre touchera la surface suivant une courbe δ et sera coupé par le plan Q suivant la courbe K.

Si nous concevons un cylindre Δ_1 tangent à la sphère S et dont les génératrices droites soient parallèles à la droite D, ce cylindre touchera la sphère S suivant un grand cercle X dont le plan sera perpendiculaire à la droite D. Si par le cercle B on mène un cylindre Δ_2, dont les génératrices droites soient parallèles à D, ce cylindre sera coupé par le plan Q suivant une ellipse E.

Or les deux cylindres Δ_2 et Δ_1 se couperont suivant deux génératrices droites passant par les points x et x' en lesquels se coupent les deux cercles X et B; la droite xx' passera par le centre o et sera perpendiculaire au plan Y mené par la tangente T en o à la courbe C et parallèlement à la droite D, puisque le cercle X est perpendiculaire à D et que le cercle B est perpendiculaire à T.

Et je dis que les deux cylindres Δ_1 et Δ_2 se touchent parce que nous avons démontré ci-dessus que les cylindres Δ_2 et Δ se touchaient et qu'il est évident que les cylindres Δ_1 et Δ se touchent; et les points x et x' ne peuvent être autres que ceux en lesquels les trois courbes X, B et δ se croisent.

Par conséquent en menant par les points x et x' des droites parallèles à D, elles iront couper le plan Q en des points qui appartiendront à la courbe K.

Mais comme les points x et x' sont sur une droite I perpendiculaire au plan qui passant par T est parallèle à D, plan que nous désignerons par (T), il s'ensuit qu'il faudra mener par la projection oblique o^o du point o de la courbe C une droite I^o perpendiculaire à la trace horizontale (sur le plan Q) du plan (T) et

porter à droite et à gauche du point o^v sur I^v une longueur égale à $\frac{R}{\cos\alpha}$, α étant l'angle que la droite I fait avec le plan Q; et l'on obtiendra ainsi deux points appartenant l'un à la branche K′ et l'autre à la branche K″ dont se compose la courbe K.

6° Si le plan Q était perpendiculaire à la droite D, alors le cercle X serait horizontal et les points x et x' seraient situés sur une horizontale I perpendiculaire à la tangente T en o à la courbe directrice C. Dès lors il suffira pour avoir les points de la courbe K, de porter à droite et à gauche du point o^v sur la normale I^h menée à C^h en ce point o^h, une longueur égale au rayon R.

On voit donc que la considération des sphères *enveloppées* nous a conduit à simplifier la construction de la courbe K, et de plus le cas particulier qui vient d'être résolu nous permet de conclure ce qui suit, savoir : que lorsqu'on a une suite d'ellipses E, E′, E″,..... successives et infiniment voisines, dont les centres sont situés sur une courbe C^h et que ces ellipses sont telles que leurs axes dirigés suivant des normales à la courbe C^h sont égaux entre eux (quel que soit le rapport qui existe entre leurs axes dirigés suivant les tangentes à la courbe C^h), ces ellipses se coupent deux à deux en des points qui sont situés sur des normales à la courbe C^h, en sorte que l'*enveloppe* de ces ellipses est une courbe K parallèle ou équidistante de la courbe C^h; en d'autres termes les courbes K et C^h sont des développantes d'une même *développée*.

383 *ter*. Si la surface est donnée par des sections horizontales, qu'on désigne sous le nom de *courbes de niveau* et que l'on veuille par une droite D mener un plan tangent à cette surface, il faudra toujours, par un point s de cette droite donnée, mener un cône tangent à la surface, puis mener par la droite D un plan tangent à cette surface conique; mais pour déterminer le cône tangent il s'agit de construire sa courbe de contact avec la surface donnée. Pour cela, par le point s, on fait passer une série de plans verticaux qui coupent les diverses courbes de niveau en des points et l'on unit par une courbe continue tous les points fournis par un même plan sécant, et l'on mène par le point s une tangente à cette courbe, le point de contact est un des points de la courbe cherchée. Ordinairement on se propose seulement de déterminer le point de contact; on construit alors les courbes de contact de deux surfaces coniques (ayant leurs sommets en deux points s et s' de la droite donnée D) avec la surface donnée; le point de contact devant se trouver à la fois sur les deux courbes sera à leur intersection. Mais dans ce cas qui donne la solution du problème de fortification, qui a pour but de trouver le plan de *site* et par suite le plan de *défilement*, on emploie les plans *cotés* (*).

(*) *Voyez* dans la première partie de ce Cours ce qui a été dit relativement aux plans *cotés* et *nivelés*.

Soient donc (*fig.* 239) la surface du terrain donnée par des sections horizontales équidistantes et D la droite par laquelle doit passer le plan de site, ce plan devant dès lors être tangent à la montagne; pour mettre à couvert les hommes et les travaux placés derrière le parapet à élever dans la direction de la droite D, il faut par une droite D′, position que la droite D prend en s'élevant verticalement d'une certaine hauteur *h*, mener un plan tangent, non au terrain, mais à la surface Σ que l'on obtiendrait en supposant que le terrain est relevé verticalement de la hauteur *h*. Le plan passant par la droite D′ et tangent à la surface Σ est dit *plan de défilement;* en sorte que les plans de *site* et de *défilement* sont parallèles entre eux.

Cela posé, pour résoudre le problème proposé, on coupe le terrain par une série de plans verticaux P passant par un point *s* de la droite D; on rabat chacun des plans P autour de son intersection avec le plan de comparaison, intersection qui est parallèle à H^p (n° 157) (je prends ici une droite K qui lui est parallèle et ayant pour *cote* 4^m), puis par les points d'intersection de H^p avec les projections des courbes de niveau, on élève des perpendiculaires jusqu'à la rencontre de K, et on porte les distances $b'b = 5^m - 4^m = 1^m$, $c'c = 2^m$, etc... $g'g = 5^m$; par le point *s* de la droite D, on mène une tangente à la courbe *a′bcd*..... et on projette sur le plan horizontal le point de contact *m*, et l'on trouvera ainsi tant de points que l'on voudra de la projection horizontale C^h de la courbe de contact C du terrain avec une surface conique ayant son sommet au point *s* de la droite D, ce point *s* ayant pour *cote* 9^m.

Dans les applications sur le terrain, il arrive très-souvent, et presque toujours, que la courbe *a′bcd*..... est assez aplatie, de sorte que la position du point de contact *m* de la tangente menée à cette courbe *a′bcd*..... par le point *s*, peut offrir quelque incertitude; pour obvier à cet inconvénient on décuple l'échelle des hauteurs verticales, et dès lors on construit une courbe δ ayant mêmes abscisses que la courbe *a′bcd*..... mais dont les ordonnées sont dix fois plus grandes que celles de la courbe de section *a′bcd*..... le point de contact *n* de la tangente menée à la courbe δ par le point *s* aura même projection horizontale que le point *m* (n° 345 *sept*). Or, il est évident que les inflexions insensibles de la courbe *a′bcd*..... deviendront d'autant plus sensibles sur la courbe δ, que le rapport entre les ordonnées des courbes δ et *a′bcd*..... sera plus grand.

Prenant le point *s′* situé sur la droite D et dont la cote est 7^m pour sommet d'une seconde surface conique, nous construirons de la même manière la courbe de contact C′ de ce second cône avec le terrain, et le point d'intersection *x* des deux courbes de contact C et C′ sera le point de contact demandé. Pour avoir la *cote* de ce point *x*, nous pouvons faire passer un plan vertical par ce point et le

Or, il est évident que les deux génératrices intersection du cône par tout plan passant par l'axe A, feront entre elles un angle plus petit que l'angle $\widehat{G, G'}$ et plus grand que l'angle $\widehat{K, K'}$.

Cela posé :

Abaissons du centre o de l'ellipse E deux perpendiculaires om et om' sur les droites G et G', et aussi deux perpendiculaires on et on' sur les droites K et K'; il est évident que l'on aura $\overline{om} = \overline{om'}$, $\overline{on} = \overline{on'}$, et que l'on aura aussi $\overline{om} > \overline{on}$.

Décrivons du point o comme centre et avec le rayon $\overline{om}$ une sphère S. Cette sphère S sera coupée par le plan M et M' suivant deux cercles C et C' de même rayon $\overline{om}$.

Le cercle C sera tangent aux droites G et G' en les points m et m', et le cercle C' coupera la droite K en les points p et q et la droite K' en les points p' et q'.

Cela posé :

Les plans M et M' sont des plans de symétrie par rapport au cône et à la sphère; par conséquent la courbe δ suivant laquelle le cône et la sphère se coupent sera symétrique par rapport à ces deux plans M et M'. Cette courbe δ passera par les points m, m', p, q, p', q' : elle se projettera sur le plan L'T' suivant deux *lignes* $\overline{q^{v'}m^{v'}p'^{v'}}$ et $\overline{q'^{v'}m^{v'}p^{v'}}$. Or, je dis que ces *lignes* ne sont autres que des lignes *droites*.

Et en effet :

Concevons la sphère S du rayon $\overline{om}$ et ayant son centre en o coupé par les deux plans M et M' suivant les cercles C et C'; du point s menons dans le plan M' les deux droites K et K' coupant le cercle C' en les points p et q, p' et q'.

Unissons les points q et p' par une droite et considérons cette droite $\overline{qp'}$ comme la trace V'^{a} d'un plan R perpendiculaire au plan vertical L'T', et coupant dès lors la sphère S suivant un cercle δ projeté verticalement sur le plan L'T' en la corde $\overline{q^{v'}p'^{v'}}$.

Imaginons un cône Σ ayant le point s pour sommet et le cercle δ pour directrice. Ce cône Σ coupera la sphère suivant un autre cercle δ' qui se projettera sur le plan vertical L'T' en la corde $\overline{p^{v'}q'^{v'}}$.

Les deux cordes $\overline{q^{v'}p'^{v'}}$ et $\overline{q'^{v'}p'^{v}}$ se couperont en un point qui sera la projection verticale $x^{v'}$ et $x'^{v'}$ des deux points x et x' en lesquels se coupent dans l'espace les deux cercles δ et δ'.

Or, il est évident que les points x et x' seront situés sur le plan M; et il est encore évident que les droites $\overline{sx}$ et $\overline{sx'}$ qui sont des génératrices du cône Σ, seront situées dans le plan M et tangentes au cercle C section de la sphère S par ce plan M.

Ces droites $\overline{sx}$ et $\overline{sx'}$ se projetteront donc sur le plan vertical LT suivant les droites G^{v} et G'^{v}.

Le cône Σ sera nécessairement coupé par le plan horizontal suivant une ellipse E′ qui aura pour centre le point o, centre de la sphère S, et pour axe $\overline{aa'}$ et $\overline{bb'}$, les points a et a', b et b' étant ceux en lesquels le plan horizontal coupe les génératrices droites K, K′, $\overline{sx}$ ou G, $\overline{sx'}$ ou G′, de ce cône Σ.

Or, l'ellipse donnée E a pour centre le point o et pour *axes* les mêmes longueurs $\overline{aa'}$ et $\overline{bb'}$; donc les ellipses E et E′ se confondent; donc le cône Σ n'est autre que le cône proposé; donc le cône proposé coupe la sphère S suivant deux cercles δ et δ'; donc les points x et x' ne sont autres que les points m et m'; donc les points $q^{v\prime}$, $m^{v\prime}$, $p^{\prime v\prime}$ et $q^{\prime v\prime}$, $m^{v\prime}$, $p^{v\prime}$ sont en ligne droite.

Donc enfin, tout cône oblique à base section-conique jouit de la propriété d'être coupé par deux séries de plans (parallèles entre eux et également inclinés à l'axe, mais en sens contraire) suivant des *cercles;* et de plus il est démontré que les plans des *sections circulaires* du cône oblique sont perpendiculaires au plan M′ qui passe par le petit axe de l'ellipse E section du cône oblique par un plan perpendiculaire à l'*axe* intérieur A de ce cône oblique.

385. PROBLÈME 4. *Construire un angle trièdre dont on connaît les trois angles dièdres.* Ayant choisi pour plan horizontal de projection le plan de l'une des faces, et un plan vertical perpendiculaire à l'une des arêtes, cette arête H^p sera en même temps la trace horizontale du plan de l'une des autres faces, donc V^p doit faire avec LT l'un des angles dièdres donnés $\widehat{\gamma}$, le plan Q de la troisième face doit faire avec le plan horizontal un angle donné $\widehat{\beta}$ et avec le plan P un autre angle donné $\widehat{\alpha}$. Pour construire le plan Q, nous prendrons une sphère de rayon arbitraire R, ayant son centre sur LT au point de rencontre des traces du plan P, elle sera coupée par le plan horizontal suivant un grand cercle C et par le plan vertical suivant un autre grand cercle C′, qui rabattu se confond avec C. Prenant ensuite une surface conique Σ dont l'axe K soit vertical et dont la génératrice droite G fasse avec le plan horizontal l'angle $\widehat{\beta}$, cette surface conique Σ étant tangente à la sphère, le plan Q devra être tangent à ce cône Σ, il sera de même tangent à une seconde surface conique Σ′, tangente à la sphère S, l'axe K′ de ce cône Σ′ étant perpendiculaire au plan P et ses génératrices droites G′ faisant avec ce plan P l'angle $\widehat{\alpha}$; la trace V^q devra donc passer par les sommets s et s' des deux cônes Σ et Σ′ et être perpendiculaire à R^v, puis H^q doit être perpendiculaire à R^h. Il est évident que ce problème est susceptible de plusieurs solutions que l'on obtiendrait en variant les positions des génératrices G et G′ par rapport à LT. Ce problème ne diffère du précédent qu'en ce que le plan vertical de projection est remplacé par un plan P ayant une direction oblique dans l'espace.

Ce problème a déjà été résolu (n° 370), mais la solution précédente montre comment, à mesure que l'on avance dans la science dite : *géométrie descriptive*, on parvient à simplifier certaines questions.

Construction d'une section conique donnée par diverses conditions, l'une de ces conditions étant un foyer.

385 *bis*. Étant donné le *foyer* d'une section conique, combien de conditions, *droites-tangentes* et *points*, peut-on se donner pour que cette section conique soit complétement déterminée?

Puisque l'on sait que pour tout cône de révolution Σ coupé par un plan P suivant une section conique E, la sphère S tangente à ce cône Σ et au plan P, touche ce plan P en un point f qui est le foyer de la courbe E, on voit de suite que le sommet s du cône Σ sera déterminé par trois conditions et que par conséquent on peut énoncer les problèmes suivants, dont les *données* sont dans un plan.

1. Étant donnés le *foyer* f et trois droites D, D', D'', construire la section conique tangente à ces trois droites.

2. Étant donnés le *foyer* f et deux droites D et D' et un point m, construire la section conique passant par le point m et tangente aux droites D et D'.

3. Étant donnés le *foyer* f et une droite D et deux points m et m', construire la section conique passant par les deux points m et m' et tangente à la droite D.

4. Étant donnés le *foyer* f et trois points m, m', m'', construire la section conique passant par les trois points m, m', m''.

5. Étant donnés le *foyer* f et deux droites D et D', et un point a sur la droite D, construire la section conique ayant pour tangentes les droites D et D' et pour point de contact avec D le point a.

6. Étant donnés le *foyer* f et une droite D et un point a sur D et un point m hors de D, construire la section conique passant par le point m et tangente à la droite D au point a.

Lorsque l'on exige que la section conique soit une parabole, alors on ne peut se donner, outre le *foyer* f, que deux conditions, *droite-tangente* ou *point*, parce que le sommet s du cône Σ doit être sur un plan T mené tangentiellement à la sphère S et parallèlement au plan P de la section conique (parabole). On peut donc se proposer les problèmes suivants.

7. Étant donnés le *foyer* f et deux droites D et D', construire la *parabole* tangente à ces deux droites.

8. Étant donnés le *foyer* f et une droite D et un point m, hors de cette droite construire la *parabole* passant par le point m et tangente à la droite D.

9. Étant donnés le *foyer* f et deux points m et m', construire la *parabole* passant par ces deux points.

10. Étant donnés le *foyer* f, une droite D et un point a sur D, construire la *parabole* tangente à la droite D et au point a.

Solution des dix problèmes précédents.

Pour tous les problèmes proposés nous construirons préalablement une sphère S d'un rayon arbitraire et tangente en un point f au plan P sur lequel les *données* sont tracées.

Problème 1. Par chacune des droites D, D′, D″, nous mènerons des plans $\Theta, \Theta', \Theta''$, tangents à la sphère S. Ces trois plans se couperont en un point s qui sera le sommet du cône Σ qui tangent à la sphère S sera coupé par le plan P, suivant la section conique demandée. Le problème est toujours possible.

Problème 2. Par chacune des droites D et D′ nous mènerons le plans Θ et Θ' tangents à la sphère S, ces deux plans se couperont suivant une droite I; par le point m donné et par la droite I nous ferons passer un plan qui coupera la sphère S suivant un cercle δ; du point m nous mènerons deux tangentes au cercle δ, lesquelles couperont la droite I en deux points s et s' qui seront les sommets de deux cônes Σ et Σ' qui tangents à la sphère S s'entre-couperont suivant deux courbes planes dont l'une sera située sur le plan P et sera la section conique demandée.

Le problème aura toujours une solution, car la possibilité du problème dépend seulement de la condition de pouvoir mener du point m une tangente au cercle δ, or le point m étant sur le plan P et ce plan P étant tangent en f à la sphère S, le point m sera toujours hors de la sphère S et dès lors extérieur au cercle δ.

Problème 3. Par la droite D nous mènerons un plan Θ tangent à la sphère S, puis nous regarderons chacun des points m et m' comme le sommet de deux cônes Δ et Δ' tangents à la sphère S; ces deux cônes de révolution Δ et Δ' seront coupés par le plan Θ suivant deux sections coniques 6 et $6'$ qui ne seront jamais des paraboles puisque le plan Θ n'est pas parallèle au plan P qui est respectivement tangent aux cônes Δ et Δ' suivant les génératrices droites de ces cônes fm et $\overline{fm'}$.

Ces courbes 6 et $6'$ se couperont donc en *deux* ou *quatre* points ou n'auront aucun point commun.

Chaque point d'intersection sera le sommet s d'un cône Σ qui tangent à la sphère S sera coupé par le plan P suivant une section conique E (ellipse ou hyperbole) satisfaisant à la question proposée.

Problème 4. On regardera chacun des points donnés m, m', m'', comme le sommet de trois cônes $\Delta, \Delta', \Delta''$, tangents à la sphère S ; ces cônes considérés deux à deux, auront deux plans tangents communs, ils se couperont donc suivant deux courbes planes ou sections coniques.

Ainsi les cônes	Δ et Δ'	se couperont suivant	les courbes	α, α'
—	Δ' et Δ''	—	—	$6, 6'$
—	Δ et Δ''	—	—	γ, γ'

Nous désignerons par	A et A'	les plans des courbes	α et α'
—	B et B'	—	6 et $6'$
—	K et K'	—	γ et γ'

Les six courbes $\alpha, \alpha', 6, 6', \gamma, \gamma'$ combinées trois à trois s'entre-couperont en huit points qui ne seront autres que ceux en lesquels se couperont trois à trois les plans A, A', B, B', K, K', ces plans étant combinés de la manière suivante :

$$(A, B, K),\ (A', B, K),\ (A, B', K),\ (A', B', K)$$
$$(A, B, K'),\ (A', B, K'),\ (A, B', K'),\ (A', B', K').$$

Chacun des huit points pourra être considéré comme le sommet s d'un cône Σ qui, tangent à la sphère S, sera coupé par le plan P suivant une section conique E satisfaisant au problème qui en général paraît admettre huit solutions.

Problème 5. Par chacune des droites D et D' nous mènerons deux plans Θ et Θ' tangents à la sphère S ; ces deux plans se couperont suivant une droite I ; par le point a et la droite I nous mènerons un plan qui coupera la sphère S suivant un cercle δ et par le point a nous mènerons une tangente θ au cercle δ, laquelle droite θ coupera la droite I en un point s qui sera le sommet d'un cône Σ qui, tangent à la sphère S, sera coupé par le plan suivant la section conique demandée. Le problème est toujours possible.

Problème 6. Par la droite D nous mènerons un plan Θ tangent à la sphère S ; nous considérerons les points a et m comme les sommets de deux cônes Δ et Δ' tangents à la sphère S ; ces deux cônes Δ et Δ' auront deux plans tangents communs et se couperont suivant deux courbes planes ou sections coniques α et α', et comme le plan Θ est tangent au cône Δ ayant le point a pour sommet (puisque ce point a est situé sur le plan Θ), il s'ensuit que le plan Θ touchera chacune des courbes α et α' en un point, et ces deux points seront les sommets de deux cônes Σ et Σ' qui tangents à la sphère S seront coupés par le plan P, chacun suivant une section conique E et E' résolvant le problème proposé.

On aurait pu résoudre le problème en considérant un cylindre ψ tangent à la sphère S suivant un grand cercle C, les génératrices de ce cylindre ψ étant paral-

lèles à la droite J unissant les points a et m; ce cylindre ψ sera coupé par le plan Θ suivant une ellipse γ.

Menant par le point a deux tangentes à la courbe γ, les points de contact seront les sommets des deux cônes Σ et Σ' précédents.

Il sera facile de reconnaître sur-le-champ, dans les six problèmes précédents, si la section conique E, qui résout le problème, doit être une *ellipse*, une *parabole* ou une *hyperbole*, car il suffira de mener un plan X tangent à la sphère S et parallèle au plan P sur lequel la courbe E doit être tracée : si le sommet s du cône Σ (qui tangent à la sphère S doit être coupé par le plan P suivant la courbe E demandée) est au-dessus du plan X, la courbe E sera une *ellipse;* si le point s est sur le plan X, la courbe E sera une *parabole;* si le point s est entre les plans X et P, la courbe E sera une *hyperbole*.

D'après ce qui vient d'être dit, on voit que, pour résoudre les quatre problèmes 7°, 8°, 9° et 10°, où l'on se propose de construire une *parabole*, dont le *foyer* f est donné, il faudra que le sommet s du cône Σ, tangent à la sphère S, soit situé sur le plan X, qui tangent à la sphère S sera parallèle au plan P de la courbe cherchée.

Problème 7. Par les droites D et D' on mènera deux plans Θ et Θ' tangents à la sphère S; ces deux plans se couperont suivant une droite I, laquelle percera le plan X en un point s qui sera le sommet du cône Σ.

Problème 8. Par la droite D on mènera un plan Θ tangent à la sphère S; les deux plans Θ et X se couperont suivant une droite L; par la droite L et le point m on mènera un plan coupant la sphère S suivant un cercle δ; par le point m on mènera une tangente θ au cercle δ, laquelle coupera la droite L en un point s qui sera le sommet du cône Σ.

Problème 9. On construira deux cônes Δ et Δ' tangents à la sphère S et ayant pour sommet respectif les points donnés m et m'; ces deux cônes Δ et Δ' seront coupés par le plan X suivant deux paraboles β et β'; la première a son axe infini parallèle à la droite $\overline{mf}$, la seconde aura son axe infini parallèle à la droite $\overline{m'f}$, car ces droites $\overline{mf}$ et $\overline{m'f}$ sont des génératrices situées respectivement sur les cônes Δ et Δ' et parallèles au plan X et elles sont situées dans le plan P qui est tangent à la fois aux deux cônes Δ et Δ'.

Ces deux paraboles pourront se couper en deux ou quatre points; autant il y aura de points d'intersection, autant il y aura de *paraboles* E satisfaisant à la condition d'avoir le point f pour *foyer* et de passer par les deux points m et m'.

Problème 10. Par la droite D on mènera un plan Θ tangent à la sphère S; les plans Θ et X se couperont suivant une droite L; les deux droites L et D seront parallèles, il suffira donc de mener une droite G par le point a et le point ι en

lequel le plan Θ touche la sphère S, et cette droite G coupera la droite L en un point s qui sera le sommet du cône Σ.

Application aux ombres.

386. La détermination de la partie éclairée et de la partie dans l'ombre d'un corps donné est une conséquence immédiate de ce qui a été dit précédemment sur les surfaces tangentes entre elles par une courbe; car si l'on suppose le corps éclairé par un point lumineux, il suffira de mener par ce point un cône tangent au corps donné; si le corps est terminé par des surfaces planes, celles-ci seront elles-mêmes limitées par des droites ou des courbes par lesquelles et par le point donné on fait passer des plans ou des surfaces coniques; les parties de ces surfaces comprises dans l'intérieur d'autres portions de surfaces ne donnent aucune partie de la courbe de séparation d'ombre et de lumière. Dans le cas où le point éclairant est à l'infini, les rayons lumineux doivent tous être parallèles à une même droite donnée de direction, et le cône tangent dégénère en un cylindre dont les génératrices sont parallèles à cette même droite donnée.

La détermination de l'ombre portée est encore une application directe d'un problème déjà résolu (chap. VI), car il s'agit seulement de trouver l'intersection du cône ou du cylindre lumineux avec la surface sur laquelle on suppose que le corps porte ombre. Nous pouvons remarquer aussi que cette ombre portée n'est autre chose qu'une projection conique ou oblique du corps, de sorte que le corps est complétement déterminé par sa projection horizontale, par exemple, et son ombre portée sur le plan horizontal (n°ˢ 158 et 159), quand d'ailleurs on connaît la position du point lumineux, ou la direction et l'inclinaison des rayons de lumière si le point lumineux est supposé à l'infini.

Nous avons indiqué (1ʳᵉ partie, chap. V) comment on trouve la ligne de séparation d'ombre et de lumière et l'ombre portée d'un polyèdre sur le plan horizontal; nous allons donner ici quelques exemples de surfaces courbes.

387. Problème 5. *Trouver l'ombre d'un cône de révolution dont l'axe est vertical.* Soient (*fig.* 241) s le sommet et B la base de ce cône, R la direction des rayons lumineux et supposés parallèles, il est évident que si l'on mène au cône deux plans tangents parallèles aux rayons R (n° 228), les génératrices de contact G et G′ formeront la ligne de séparation d'ombre et de lumière; de sorte que le secteur $s^h acb$ sera la projection horizontale de la partie du cône qui ne peut recevoir aucun rayon de lumière; mais en projection verticale la partie csb est cachée, de sorte que l'on ne doit marquer dans l'ombre que $a^v s^v b^v$. Enfin le triangle mixtiligne $pacb$ est évidemment l'ombre portée du cône sur le plan horizontal.

388. PROBLÈME 6. *Trouver l'ombre d'un trou-de-loup ou puits militaire*. Nous considérons le trou prolongé jusqu'au sommet du cône; soient donc A (*fig.* 242) l'axe vertical, B la base et *s* le sommet de la surface conique, R la direction des rayons lumineux. L'ombre sera déterminée par la surface cylindrique lumineuse ayant pour base B, nous sommes donc conduits à chercher l'intersection d'une surface cylindrique avec une surface conique (n° 352). Pour cela, par le sommet *s*, nous mènerons une parallèle K aux rayons de lumière R, puis par la trace horizontale *c* menant une série de droites, elles seront les traces horizontales de plans auxiliaires coupant les deux surfaces suivant des génératrices droites; mais si nous remarquons que la partie du cercle B située du côté du point *a* peut seule porter ombre, nous verrons qu'il faut prendre *a* pour trace horizontale de la génératrice D du cylindre lumineux, et le point *o* pour trace horizontale de la génératrice G de la surface conique, ces deux génératrices se coupent en un point *x* de la courbe cherchée et qui sera l'ombre portée sur la surface conique du creux. Si l'on voulait construire en ce point la tangente à cette courbe d'intersection des surfaces conique et cylindrique, il faudrait mener des plans tangents à ces deux surfaces et leurs traces horizontales seraient des tangentes à B aux points *a* et *b*; ces tangentes ne sont pas parallèles, elles se couperont donc en un point qui sera la trace horizontale de la tangente cherchée.

Si l'on voulait avoir le point de la courbe pour lequel la tangente est horizontale, on remarquerait qu'elle doit être donnée par l'intersection de deux plans tangents ayant leurs traces horizontales parallèles (n° 90), et par conséquent tangentes à B aux extrémités d'un même diamètre; il faudrait donc mener le plan P′ tel que H″′ passe par le centre du cercle B, *a*′ et *b*′ seront les traces horizontales des génératrices D′ et G′ qui se couperont au point *x*′ demandé.

389. PROBLÈME 7. *Trouver l'ombre de la niche.* Une niche est un creux demi-cylindrique pratiqué dans un mur et recouvert par un quart de surface sphérique.

Soient *pqrs* (*fig.* 243) la base du mur dans lequel la niche est pratiquée, B la base du cylindre de révolution, C le grand cercle horizontal et C′ le grand cercle vertical de la sphère, L la direction des rayons lumineux supposés parallèles, nous prenons pour plan horizontal de projection le plan de la base du cylindre et pour plan vertical de projection le plan du parement du mur; mais comme les projections horizontales et verticales se confondraient en partie, nous supposons qu'on ait reculé toutes les constructions relatives au plan vertical de manière que la ligne de terre LT soit venue dans la position parallèle $\underline{\text{LT}}$ et que les points correspondants se trouvent encore sur une perpendiculaire commune aux droites LT et $\underline{\text{LT}}$, en sorte que dans nos constructions toute projection horizontale devra être rapportée à la ligne de terre primitive LT et toute projection verticale à la ligne de

terre transportée LT. Cela posé, si par les points de l'arête vive ou saillante A on mène des parallèles à L, elles formeront un plan P dont la trace H^p donne un segment de cercle qui forme l'ombre portée sur le plan du cercle B, et qui coupe le cylindre suivant une génératrice droite G, qui forme la ligne de séparation d'ombre et de lumière dans le cylindre creux de la niche et jusqu'au point *b*, où elle rencontre le rayon lumineux R mené du point *a* le plus élevé de l'arête A; à partir de ce point, si l'on continue à mener des rayons lumineux par tous les points du cercle C′, ils formeront une surface cylindrique, dont l'intersection *bx* avec le cylindre de la niche donnera la continuation de cette ligne de séparation d'ombre et de lumière. Cette intersection s'obtiendra facilement (n° 352), en menant diverses génératrices du cylindre lumineux, et cherchant leurs intersections avec le cylindre de la niche.

Nous remarquerons que la courbe *bx* a pour tangente au point *b* la génératrice G, car en ce point *b* les plans tangents aux deux cylindres sont verticaux, puisqu'ils doivent passer, l'un par la génératrice verticale G et l'autre par la tangente verticale du cercle C′ au point *a*, de sorte que G est leur intersection. A partir du point *x*, le cylindre lumineux coupe le quart de sphère; or, ce cylindre pénétrant dans la sphère par un grand cercle C′ ne peut en sortir que par un autre grand cercle E (n° 371), donc la projection verticale sera une ellipse. Pour la construire, remarquons que les cercles C′ et E, ce dernier cercle étant l'intersection du cylindre lumineux et de la sphère, sont perpendiculaires à un même plan parallèle aux rayons lumineux, et que nous prendrons comme un nouveau plan horizontal de projection, de sorte que L′T′ doit être parallèle à L^v; la sphère se projette sur ce plan suivant un grand cercle $C''^{h'}$. Le rayon lumineux R, passant par l'extrémité *o* du diamètre de ce cercle parallèle à L′T′, se projette suivant $R^{h'}$, que l'on a en prenant $o^{h'}d^{h'} = o^h d^h$ et joignant $o^{h'}d^{h'}$, il coupe le cercle C″ en un second point *e* qui détermine le petit axe *oe* de l'ellipse E^v, *ol* étant le grand axe, car il est le seul diamètre du cercle, donné en vraie grandeur, et par conséquent le plus grand diamètre de la courbe E^v.

Les courbes *bx* et E vont se croiser en un point *x* du cercle C, que l'on peut obtenir directement; en effet, ce point appartient à l'intersection du plan S du cercle C et du plan Q du cercle E; or le plan S est perpendiculaire au plan vertical de projection et le plan Q est perpendiculaire au second plan horizontal de projection, donc leur intersection I a ses projections respectivement situées sur H'^q et sur V^s; pour avoir sa projection horizontale sur le plan horizontal de projection primitif, nous prendrons un point *m* sur cette intersection I, et ayant abaissé $m^v i$ perpendiculaire sur LT, nous prendrons $im^h = i'm^{h'}$, l'intersection I des deux plans passe d'ailleurs évidemment par le centre de la sphère, donc on con-

naît I^h ; le point x devant se projeter à la fois sur I^h et sur C^h, on connaît x^h, d'où l'on conclut x^v. La droite A et le cercle C se *raccordant* (étant tangentes l'une à l'autre) au point a, il est évident que G^v et b^vx^v doivent se *raccorder* au point b^v et de même b^vx^v et E^v doivent se *raccorder* au point x^v.

390. Réciproquement, étant donnée une niche ombrée, on peut se demander de trouver la direction des rayons lumineux. Pour cela, remarquons que la génératrice G fait connaître immédiatement R^h, et par suite L^h, puis le point l donne l'axe ol de l'ellipse E^v, auquel R^v ou L^v est perpendiculaire.

Cela posé, la projection verticale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière peut affecter six formes différentes : 1° elle peut être composée d'une droite G^v et de deux arcs de courbe b^vx^v et x^vl ayant leur convexité tournée du côté de l'ombre ; 2° elle peut être composée d'une droite G^v, d'un arc de courbe b^vo ayant sa convexité tournée du côté de l'ombre, et enfin d'une autre droite ol; 3° on peut avoir une droite G^v, un arc de courbe tel que b^vx^v ayant sa convexité tournée vers l'ombre, et un arc d'ellipse ayant au contraire sa concavité tournée vers l'ombre ; dans ces trois cas, le rayon lumineux est dirigé comme dans la figure 243, seulement il est plus ou moins incliné sur le plan vertical de projection ; 4° la projection verticale de la ligne de séparation d'ombre et de lumière peut se composer d'une droite G^v et d'un arc d'ellipse x^vl ayant sa convexité tournée vers l'ombre ; 5° elle peut se réduire à une seule droite passant par o; 6° elle peut être formée d'une droite G^v et d'un arc d'ellipse ayant sa concavité tournée vers l'ombre ; dans ces trois cas, les points b^v et x^v coïncident, l'axe ol de E^v est perpendiculaire à LT, et le rayon lumineux est parallèle au plan horizontal de projection. On pourrait varier la forme de la niche, et l'on parviendra par des méthodes analogues à la détermination de l'ombre portée.

391. Problème 8. *Construire la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur la sphère.* Soient o (*fig.* 244) le centre de la sphère, C le grand cercle parallèle au plan horizontal, C′ le grand cercle parallèle au plan vertical, R la direction des rayons lumineux.

La série des rayons lumineux tangents à la sphère forme un cylindre de révolution, et la courbe de contact E est un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à R ; les projections de la courbe E seront donc des ellipses (n° 314).

Cherchons d'abord E^h : les projections des diamètres de E sont des diamètres de E^h, et un seul, le diamètre horizontal ab, se projette en vraie grandeur, a^hb^h sera donc le grand axe de E^h. Pour avoir le petit axe, remarquons que si par le centre o on mène une droite A parallèle à la droite R, cette droite A sera l'axe du cylindre lumineux, et si l'on suppose que le plan projetant horizontalement A tourne autour de l'horizontale passant par le centre o, A viendra se rabattre en A′ et le

rayon oe, dont la projection horizontale est le petit axe cherché, se rabat en $o^h_u e'$; revenant ensuite de ce rabattement aux projections, le point e' se projettera en e^h ; décrivant une ellipse sur les deux demi-axes $o^h a^h$ et $o^h e^h$, on aura E^h ; la portion aeb, étant tracée sur la partie supérieure de la sphère, est seule vue, et en projection horizontale on ne doit ombrer que la partie $a^h e^h b^h e' a^h$.

Nous opérerons de même pour obtenir E^v, c'est-à-dire que nous ferons tourner le plan projetant verticalement la droite A autour de la verticale passant par le centre o, A viendra en A″, le rayon of dont la projection verticale est le petit axe de E^v se rabat en $o^v f''$, d'où l'on conclut la projection f^v ; d'ailleurs, le diamètre cd de E parallèle au plan vertical de projection se projette seul en vraie grandeur et donne par conséquent le grand axe $c^v d^v$ de E^v ; on pourra donc tracer cette ellipse. Nous remarquerons que la partie cbd, située sur la moitié antérieure de la sphère, est seule vue, ce qui fixe la portion que l'on doit ombrer sur le plan vertical de projection.

Ajoutons en passant que si l'on demandait de mener par la droite R un plan tangent à la sphère, la chose serait facile, car ayant construit comme ci-dessus la courbe de contact E d'un cylindre tangent dont les génératrices sont parallèles à R, il n'y aurait plus qu'à mener par R un plan tangent à ce cylindre, ce qui s'effectuerait (n° 235) en prenant l'intersection de la droite R et du plan de la courbe E ; menant par ce point deux tangentes à E, l'on obtiendrait les points de contact (*).

392. La détermination du point x dans l'ombre de la niche conduit à la solution du problème suivant : *Étant donnés deux diamètres conjugués d'une ellipse, en trouver les axes en direction et en longueur.* En effet le cylindre lumineux est coupé par le plan S suivant une ellipse dont on peut facilement obtenir deux diamètres conjugués, car le plan tangent au cylindre le long de la génératrice passant au point l est perpendiculaire au plan vertical, sa trace sur le plan S est donc perpendiculaire à V^s et par conséquent parallèle à od ; elle est d'ailleurs tangente à l'ellipse au point y où le rayon lumineux R_2 coupe le plan S ; donc oy est un demi-diamètre ayant son conjugué dirigé suivant od ; pour avoir la longueur de celui-ci, il suffit de faire passer par od et une parallèle aux génératrices droites du cylindre, un plan qui coupera ce cylindre suivant la génératrice R, donnant od pour la longueur du second demi-diamètre. Remarquons ensuite que a, b, x sont des points de l'ellipse.

Cela posé, soient yy' et dd' (*fig.* 246) deux diamètres conjugués d'une ellipse,

---

(*) *Voyez*, au sujet des courbes d'égales teintes *réelles* et *apparentes*, et des points et lignes *brillantes*, le chapitre III de l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive.*

du centre *o* menons *ab* perpendiculaire sur le diamètre *dd'*, concevons sur ce diamètre un cercle vertical rabattu en C' et faisons passer la droite *ab* sur le plan de ce cercle, il suffit évidemment de mener *yi*, puis de mener d'un point quelconque *k* les droites *kn* et *kp* respectivement parallèles à *yi* et *yo*, puis *pn* perpendiculaire à *dd'* et la droite *on* sera la droite *ab* ramenée dans le plan du cercle, et elle le coupera en un point *z* d'où menant *zb* parallèle à *yi*, on déterminera le point *b* qui appartiendra à l'ellipse.

Ce point *b* étant obtenu, si l'on décrit un cercle du rayon *ob*, et que l'on trouve le point *x* en lequel il coupe l'ellipse, *bx* et *ax* seront deux cordes supplémentaires rectangulaires auxquelles les axes sont parallèles (nº 314, 2º). Pour obtenir ce point il faut faire les constructions indiquées dans l'ombre de la niche; afin qu'on en suive mieux l'analogie nous prendrons trois cercles C', C'', C''' (*fig.* 247), représentant les cercles C^{iv}, C', C''^{iv} de la figure 243, ces trois cercles superposés donnent le cercle C de la figure 248 dans laquelle chaque lettre marque les points portant les mêmes lettres dans la figure 247 et qui se sont superposés. Il faut donc abaisser *yf* perpendiculaire sur *ab*, mener la tangente *fl*, qui correspond à la projection verticale du rayon lumineux, mener les diamètres *ol* et *oc*, d'un point quelconque *j* de *ab* abaisser *ji* perpendiculaire sur *oc*, et rencontrant *oe* en *m*, élever *jk* perpendiculaire sur *ab* et prendre $jk = im$, enfin joindre *ko* qui coupe le cercle C au point *x* demandé; menant alors les cordes supplémentaires *ax*, *bx* et du centre *o* des parallèles à ces cordes, on aura les directions des axes de l'ellipse; pour en trouver les sommets, il faudrait faire passer ces axes dans le plan du cercle C' (*fig.* 246) et opérer comme on l'a fait pour déterminer le point *b*, on trouverait ainsi les points *n* et *q* d'où l'on conclurait les points *p* et *r* et par suite les longueurs *np* et *qr* des axes de l'ellipse (*).

(*) Cet article aurait dû être placé après les théorèmes relatifs à deux cercles qui tracés sur une sphère sont enveloppés par une surface conique.

Mais j'ai préféré le mettre après l'ombre de la niche, parce que c'est en examinant de près cette *épure* que j'ai vu que la recherche du point particulier *x* de l'ombre portée, conduisait à la solution du problème, *Étant donné un système de diamètres conjugués d'une ellipse, trouver la direction et la grandeur des axes de cette courbe*, et à ce sujet je ferai les réflexions suivantes.

Il faut, en géométrie descriptive, apprendre à lire l'*épure* qui donne la solution d'un problème particulier, de manière à en déduire tout ce qu'elle peut nous enseigner. Ainsi en *analyse*, lorsque l'on est parvenu à l'*Équation* qui donne la solution d'un problème, il faut interpréter cette équation et en tirer tous les résultats qu'elle renferme et non pas seulement celui qui était l'objet de la question proposée; il faut, si je puis m'exprimer ainsi, *interroger l'équation finale* pour en tirer tout ce qu'elle peut apprendre. Il en est de même en géométrie descriptive, une *épure* peut renfermer, non-seulement la solution de la question spéciale pour laquelle elle a été construite, mais encore la solution de plusieurs autres questions, qui paraissent n avoir aucune connexité avec la première; il faut donc savoir *interroger* une *épure* et en tirer tout ce qu'elle peut apprendre. Nous en avons donné plusieurs

Application à la perspective.

393. Dans toute question de *perspective* on a deux problèmes à résoudre :

1° Trouver le *contour apparent* d'un *corps;* il suffit pour cela de mener par l'*œil* ou par le point en lequel on le suppose placé, et que l'on nomme *point de vue* (n° 159), un cône tangent au corps proposé (n° 377); dans ce cas, comme dans la théorie des ombres, si le corps est terminé par des arêtes saillantes, il faut par chaque arête *droite* et par le point de vue faire passer un plan, et par chaque arête *courbe* faire passer une surface conique dont l'*œil* est le sommet, et ne conserver pour contour apparent que les lignes répondant aux plans ou aux cônes les plus extérieurs.

2° Trouver la *perspective* d'un objet proposé; c'est tout simplement trouver l'intersection par le tableau des rayons visuels menés du point de vue à chacun des points de l'objet.

394. PROBLÈME 9. *Trouver la perspective d'un cône de révolution ayant son axe vertical.* Nous avons donné (1re partie, chap. V) la manière de mettre un polyèdre en perspective, nous n'ajouterons ici que cette question simple, elle suffira pour indiquer les procédés *graphiques* que l'on doit suivre. Soient B (*fig.* 245) la base et *s* le sommet de la surface conique, LT la ligne de terre ou base du tableau, que nous supposerons transporté parallèlement à lui-même en L̲T̲; soient *v* le point de vue; ou projection orthogonale de l'œil sur le tableau, *d* et *d'* les points de distance, la droite H est la trace sur le tableau d'un plan horizontal, mené par l'œil, on la nomme *ligne d'horizon.*

Pour avoir la perspective de la base B, on lui inscrit et circonscrit des carrés ayant chacun deux côtés perpendiculaires et deux côtés parallèles à LT; pour avoir la perspective du carré circonscrit *abce*, nous remarquerons que les diagonales sont inclinées à 45° sur LT, si donc on prolonge *ab* et *ce* jusqu'à leur rencontre avec L̲T̲ et qu'on joigne ces points α et y avec v, si l'on prolonge *ca* jusqu'à LT, qu'on projette β sur L̲T̲, et qu'on joigne les points 6 et d, cette droite $6d$ coupera αv et yv aux points a^p et c^p par lesquels menant les horizontales a^pe^p, c^pb^p puis les droites a^pb^p et c^pe^p, nous aurons la perspective du carré *abce*, les diagonales a^pc^p et b^pe^p se croisent au point o^p par lequel on mènera une horizontale et la droite o^pv, pour avoir les perspectives des points de contact du cercle B avec les quatre côtés

---

fois l'exemple dans ce cours; ainsi lorsque nous avons cherché *l'intersection de deux plans donnés chacun par une trace et un point*, nous en avons déduit plusieurs théorèmes relatifs aux transversales; lorsque nous avons construit *la section droite d'un cylindre*, nous en avons déduit le problème qui fait le sujet du n° 373 *bis;* plus loin, de l'*intersection de deux surfaces coniques*, *nous déduirons diverses propriétés relatives à deux sections coniques situées sur un même plan*, etc., etc.

du carré. Si nous prolongeons les côtés du carré inscrit perpendiculaires à LT jusqu'à LT, et si nous joignons les points de rencontre au point *v*, nous obtiendrons les perspectives des points d'intersection du cercle B avec les diagonales du carré. Pour avoir la perspective du sommet, il faut encore par ce sommet mener deux horizontales, l'une perpendiculaire au tableau et l'autre inclinée à 45°; leurs perspectives sont *sv* et *σd*, elles se coupent au point s^p. Pour avoir la perspective du contour apparent, il faudrait par l'œil mener deux plans tangents au cône (n° 225) et chercher comme ci-dessus les perspectives des traces des génératrices de contact et les joindre avec s^p (*).

CHAPITRE X.

DE CERTAINES COURBES ET SURFACES COURBES QUI SONT SOUVENT EMPLOYÉES DANS LES ARTS ET LES CONSTRUCTIONS.

395. Si l'on suppose une courbe C et une tangente T à cette courbe, et que la droite T roule, sans glisser, sur la courbe C de manière à lui rester toujours tangente, un point quelconque *m* de T décrira une *développante* de la courbe C (n° 101). La construction de la développante est très-simple, car ayant fixé sur la courbe C un point *o* pour origine de la développante et le sens dans lequel on suppose que le développement doit s'effectuer, on mènera aux divers points de la courbe C des tangentes sur lesquelles on portera, à partir du point de contact et du côté de l'origine, des longueurs égales à l'arc de courbe (*rectifiée*), compris entre ce point de contact et l'origine. La tangente à la développante n'offre aucune difficulté puis-

(*) On pourrait demander le lieu des points que doit occuper dans l'espace l'œil du spectateur pour que le cercle situé sur le plan horizontal ait pour perspective un cercle. *Voyez* à ce sujet, dans l'ouvrage qui a pour titre : *Complément de géométrie descriptive*, le mémoire qui a pour titre : *Des projections stéréographiques*, mémoire que j'ai publié pour la première fois dans le 26e cahier du Journal de l'École polytechnique.

qu'elle doit être perpendiculaire à la tangente à la *développée* et menée par le point de contact proposé (n° 201).

Mais si l'on suppose que la tangente T glisse sur la courbe C en même temps qu'elle roule sur cette courbe, le point *m* engendrera une *développante raccourcie* ou *rallongée* suivant que T glissera dans le sens de son mouvement sur C ou en sens contraire (*).

Des Hélices.

On appelle *hélice* toute courbe qui, tracée sur une surface développable, se transforme en une droite lorsque la surface est étendue sur un plan.

396. L'*Hélice* que nous allons étudier est une courbe à double courbure tracée sur un cylindre de révolution et dont la transformée est une ligne droite, on lui donne le nom d'*hélice cylindrique* et *circulaire* (**). Il résulte de là que nommant C la base ou section droite du cylindre, et E l'hélice, si l'on développe la surface cylindrique (n° 373), et que l'on prenne sur la droite C' transformée du cercle C des points également distants les uns des autres et que par chacun de ces points on élève des perpendiculaires à la droite C', ces perpendiculaires représentant au développement les diverses génératrices de la surface cylindrique, elles iront couper la transformée E' de l'hélice E en des points équidistants entre eux et dont les ordonnées seront équidifférentes entre elles, d'où l'on conclut : que l'hélice tracée sur un cylindre de révolution est une courbe telle que ses ordonnées rapportées à une section droite C, du cylindre, sont proportionnelles aux abscisses curvilignes comptées sur C et à partir du point d'intersection des courbes C et E, point que l'on nomme l'*origine* de l'hélice. On peut donc dire aussi que l'hélice tracée sur un cylindre de révolution serait engendrée par un point glissant le long d'une génératrice droite de la surface cylindrique pendant que cette génératrice tourne autour de l'axe et de telle manière que le point s'élève de quantités égales pour des angles de rotation égaux décrits, autour de l'axe du cylindre, par la génératrice droite.

Lorsque la génératrice droite aura fait un tour complet autour de l'axe du cylindre, elle reprendra sa première position et le point générateur se sera élevé d'une quantité H que l'on nomme le *pas de l'hélice;* la portion d'hélice comprise

---

(*) *Voyez*, pour les *développantes planes*, *cylindriques*, *coniques* et *hyperboloïdiques* d'un cercle, l'ouvrage qui a pour titre : *Théorie géométrique des engrenages*, etc., publié en 1842. *Voyez*, pour les *développantes rallongées et raccourcies*, le chapitre Ier de l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*.

(**) Si la section droite du cylindre était une parabole, ou une ellipse, etc., on lui donnerait le nom d'hélice cylindrique et *parabolique*, ou cylindrique et *elliptique*, etc.

entre ce point et l'*origine* se nomme une *spire*. Enfin, les éléments rectilignes de l'hélice font tous le même angle avec les génératrices droites du cylindre. Désignons cet angle par α et par R le rayon du cercle C; après le développement, la portion de cylindre comprise entre le cercle C, une spire de l'hélice et la génératrice droite correspondant à l'*origine* de l'hélice donne un triangle rectangle ayant pour base une droite égale en longueur à $2\pi R$ et pour hauteur une droite égale à H, l'angle au sommet de ce triangle étant égale α; nous aurons entre ces trois quantités $2\pi R$, H et α la relation

$$\tang \alpha = \frac{2\pi R}{H}$$

ce qui montre que l'hélice est complétement déterminée quand on donne deux des trois choses α, R, H.

397. Il résulte de ce qui précède un moyen très-simple de construire par points les projections d'une hélice.

Soient A (*fig.* 249) l'axe vertical d'un cylindre, B sa base, on donne le *pas* aa_1 de l'hélice et son *origine* a; si l'on divise le cercle B en un certain nombre de parties égales à la hauteur $a^va^v_1$ en un même nombre de parties égales, par exemple en 8; que par les points de division du cercle B, on élève des perpendiculaires à LT, et que par les points de division de $a^va^v_1$ on mène des parallèles à LT, les droites menées par des points de division correspondants et portant dès lors les mêmes *numéros* se couperont en des points qui appartiendront à E^v; quant à la projection E^h, elle se confond évidemment avec le cercle B.

398. Soit proposé, *de mener la tangente* Θ *à l'hélice* E *en un de ses points* m. La projection horizontale Θ^h est tangente à E^h au point m^h (n° 217); elle est en même temps la trace horizontale d'un plan tangent au cylindre, et si l'on suppose que l'on fende la surface cylindrique le long de la génératrice passant par l'origine a de l'hélice et qu'on la déroule sur le plan tangent en m, le point a décrira la développante D, et le point a viendra en un point b qui sera la trace de la droite *transformée* de l'hélice, et par conséquent aussi la trace horizontale de la tangente Θ (n° 372); donc en projetant ce point b en b^v, et le joignant avec m^v nous aurons Θ^v. La même méthode devant donner la tangente en tout autre point de l'hélice, nous voyons que la développante D du cercle B ayant même *origine* a que l'hélice E est le lieu des traces horizontales des tangentes à cette courbe E, et par conséquent cette courbe D est la section faite par le plan horizontal dans la surface développable Σ, lieu des tangentes à l'hélice; nous reviendrons plus loin sur cette surface Σ.

399. Cherchons maintenant le plan osculateur à l'hélice au point x pour lequel

le plan tangent au cylindre est parallèle au plan vertical de projection. Ce plan doit contenir la tangente au point x et au point x' successif et infiniment voisin du point x (n° 198) ; or, la projection horizontale de la tangente au point x est parallèle à LT et rencontre la développante D au point c, qui sera un point de la trace horizontale du plan cherché ; la tangente au point x' successif et infiniment voisin de x rencontrera la courbe D en un point c' successif et infiniment voisin du point c, et par conséquent la trace horizontale du plan osculateur, devant passer par deux points successifs et infiniment voisins de la courbe D, lui sera tangente, elle sera donc perpendiculaire à $x^h c$ (n° 395), et par conséquent à LT ; donc le plan P sera perpendiculaire au plan vertical de projection, et par suite au plan tangent au cylindre. Si l'on cherchait le plan osculateur en un autre point m, on pourrait changer le plan vertical et prendre un nouveau plan parallèle au plan tangent au cylindre en ce point m, et l'on trouverait le même résultat que ci-dessus. Donc enfin *tout plan osculateur à l'hélice est normal au plan tangent mené au cylindre par le point de contact.*

400. Si l'on fait glisser une droite sur l'hélice cylindrique et circulaire E, cette droite se mouvant suivant une loi telle que chacun de ses points décrive une hélice, elle engendrera une surface, qui prend généralement le nom de surface *héliçoïde ;* cette surface est généralement gauche, mais pour certaines conditions imposées pour le mouvement de la génératrice droite, la surface sera développable ; les héliçoïdes développables sont le cône *héliçoïdal*, et la surface lieu des tangentes à une hélice, surface que l'on désigne particulièrement sous le nom d'*héliçoïde développable ;* nous examinerons ces deux surfaces sans entrer dans tous les détails.

Du cône héliçoïdal.

401. Si par un point quelconque on mène une série de droites s'appuyant sur l'hélice E, on formera un cône héliçoïdal, mais nous supposerons ici le sommet s (*fig.* 249) pris sur l'axe A. La trace horizontale de cette surface conique est une *spirale hyperbolique ;* en effet par le point s menons un plan horizontal N venant couper l'hélice en un point e que nous prendrons pour *origine*, et considérons les génératrices du cône passant par deux points quelconques m et x de l'hélice E, leurs traces horizontales seront en p et q, pour lesquels les rayons vecteurs sont $op = \rho$ et $oq = \rho'$; désignons les angles mesurés par les arcs $e^h m^h$ par ω et $e^h x^h$ par ω' ; supposons que l'on fasse tourner les génératrices sp et sq autour de l'axe A pour les rendre parallèles au plan vertical de projection, les triangles $s^v o^v p'^v$ et $s^v m'^v k'^v$ sont semblables, ainsi que $s^v o^v q'^v$ et $s^v x'^v k'^v$, on a donc $o^v p'^v : o^v s^v :: s^v k'^v :: k'^v m'^v$ et $o^v q'^v : o^v s^v :: s^v k'^v : k'^v x'^v$, d'où $\rho : \rho' :: k'^v x'^v : k'^v m'^v$; mais d'après la génération de

l'hélice (n° 395) on a $k'^{v}x'^{v} : k'^{v}m'^{v} :: e^{h}x^{h} : e^{h}m^{h}$, donc $\rho : \rho' :: \omega' : \omega$ d'où $\rho\omega = \rho'\omega'$, c'est-à-dire que la base ou trace horizontale C du cône héliçoïdal est une courbe telle que pour chacun de ses points le produit du rayon vecteur ρ et de l'angle ω est constant, ce qui est le caractère de la spirale *hyperbolique*.

402. La tangente en un point p de cette spirale hyperbolique est la trace horizontale du plan tangent au cône héliçoïdal mené le long de la génératrice G; or, ce plan contient la tangente Θ menée au point m à l'hélice directrice, et la trace horizontale de Θ est en b sur la développante D (n° 398), donc bp sera la tangente demandée.

Si l'on veut avoir l'asymptote de la spirale hyperbolique C, nous remarquerons que la génératrice droite du cône héliçoïdal au lieu d'être menée au point m de l'hélice E doit passer par le point e de cette hélice E, car elle doit être horizontale; il faudra donc mener à la courbe E^{h} la tangente $e^{h}r$, et par le point r, où elle rencontre la développante D, mener une parallèle à $s^{h}e^{h}$ ou une perpendiculaire à $e^{h}r$, ou enfin une tangente à la courbe D (n° 395), et ce sera l'asymptote demandée.

403. Remarquons qu'en considérant toutes les génératrices droites du cône héliçoïdal, qui s'appuyant sur l'hélice cylindrique et circulaire E passent par des points de cette hélice située au-dessous du point e, on voit qu'elles coupent le plan horizontal en des points qui s'approchent indéfiniment du point o sans jamais l'atteindre, et qu'il en est de même pour les génératrices rencontrant l'hélice E au-dessus du point e. Cette seconde *nappe* de la surface conique *héliçoïdale* donnerait une seconde courbe identique à la courbe C mais placée dans une position symétrique; cette seconde branche de la spirale hyperbolique coupe l'hélice E en un point qu'on peut se proposer de déterminer; or, il est évident que si l'on fait tourner la génératrice passant par ce point pour la rendre parallèle au plan vertical, elle prendra la position $s^{v}a^{v}$, et le point où elle rencontre E sera venu se porter en y', nous le ramènerons en y; puis remarquant que ce point, situé au-dessus du plan N, est sur la partie antérieure du cylindre (donc au-dessous du point s) on voit que la génératrice du cône passe derrière le plan méridien parallèle au plan vertical de projection et que le point cherché est en a' à l'autre extrémité du diamètre mené au point y^{h}. Le point o est dit : *point asymptote* de la spirale hyperbolique (*).

De la surface dite héliçoïde développable.

404. La surface lieu des tangentes à l'hélice E est dite *héliçoïde développable*

(*) *Voyez*, dans l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, le chapitre II, où j'ai exposé en détail les propriétés des trois spirales, d'Archimède, hyperbolique et logarithmique.

et elle est coupée par le plan horizontal de projection suivant une développante D du cercle B' base du cylindre (n° 398), cette courbe ayant pour origine le point *a*, en lequel ce plan coupe l'hélice. Mais si nous rapportions la figure à un autre plan horizontal de projection parallèle à l'ancien, il est évident que la même proposition serait encore vraie, donc *tous les plans perpendiculaires à l'axe du cylindre coupent l'héliçoïde développable suivant des développantes du cercle qui est la base du cylindre sur lequel est tracée l'hélice, arête de rebroussement de la surface.*

Il résulte de là que si l'on fait mouvoir la développante D, de manière que son plan reste perpendiculaire à l'axe A, et que son origine *a* parcoure l'hélice E, elle engendrera l'héliçoïde développable qui aurait été primitivement engendrée par la tangente Θ se mouvant de manière à rester toujours tangente à l'hélice E.

405. Dans ce mouvement de la développante D ou de la tangente Θ, il est évident que tous les points s'élèvent en même temps de quantités égales, et décrivent aussi en même temps autour de l'axe A des angles égaux, donc un point *a* parcourant une hélice E, tous les autres points de l'espace liés à ce point *a* et d'une manière invariable se mouvront sur des hélices concentriques et de même pas que l'hélice E ; donc l'*héliçoïde développable est coupé par des cylindres de révolution, ayant même axe que celui sur lequel est tracée l'hélice arête de rebroussement, suivant des hélices de même pas que cette dernière.* Mais la génératrice Θ ne serait tangente à aucune de ces hélices, car R ayant augmenté, pour que la relation $\frac{2\pi R}{H} = \tang \alpha$ soit encore satisfaite, il faut augmenter aussi la valeur de α. Si donc on considérait une de ces hélices comme directrice de la surface, Θ serait assujettie à se mouvoir sur cette hélice de manière à conserver la même inclinaison α avec les génératrices du cylindre, et à rester constamment tangente à un cylindre de rayon moindre, de sorte que H et α étant connus, pour que l'héliçoïde fût développable, il faudrait déterminer R (rayon du cylindre auquel Θ reste tangente) par la relation

$$2\pi R = H \tang \alpha,$$

et si les trois quantités H, α, R, sont données, on reconnaîtra que l'héliçoïde est développable ou gauche suivant que ces trois quantités satisferont ou ne satisferont pas à l'équation précédente.

Toutefois nous remarquerons que dans le cas de l'héliçoïde gauche les sections cylindriques sont encore des hélices, ce que l'on reconnaîtra facilement; mais les sections faites par des plans perpendiculaires à l'axe ne sont plus des développantes. En effet, si H et R étant invariables, la valeur de α est plus grande que celle qui satisfait à l'équation de condition, la génératrice passe au-dessus de la tangente à l'hélice, et les points de la courbe de section sont en dehors de la déve-

loppante, cette courbe est alors une *développante rallongée;* si au contraire la valeur de α est plus petite que celle qui satisfait à l'équation de condition, la génératrice passe au-dessous de la tangente à l'hélice, et les points de la courbe de section sont en dedans de la développante, cette courbe est alors une *développante raccourcie.*

Je ne m'étendrai pas davantage ici sur les propriétés relatives à certaines surfaces gauches, les propriétés dont jouissent en général les surfaces gauches ne peuvent être données complétement que dans un chapitre spécial, et qui sera le chapitre XI. C'est dans ce chapitre XI que nous étudierons les *conoïdes*, la surface du *biais-passé* et les surfaces *héliçoïdes gauches* qui terminent et forment les filets des *vis* (*carrée* et *triangulaire*); l'emploi de ces diverses surfaces gauches est fréquent dans les arts et les constructions.

406. Le plan tangent à l'héliçoïde développable contient deux tangentes successives et infiniment voisines de l'hélice E qui est l'arête de rebroussement de la surface, il est donc osculateur à cette courbe, et par conséquent il est normal à la surface cylindrique sur laquelle elle est située (n° 399). Ce plan coupe le cylindre suivant une ellipse F (n° 287), dont le petit axe est horizontal et passe au point de contact, mais les trois points successifs m, m', m'' de E étant sur le plan sécant appartiennent aussi à l'ellipse F, les courbes E et F sont donc osculatrices au point m (n° 197), elles ont donc au point m même cercle osculateur; or, quelle que soit la position du point m le plan sécant sera toujours également incliné sur l'axe du cylindre, donc toutes les ellipses F seront égales et elles auront pour demi-petit axe le rayon R et pour demi-grand axe $\frac{R}{\cos\alpha}$; mais le rayon ρ du cercle osculateur à l'ellipse F construit à l'extrémité du petit axe est égal au carré du demi-grand axe divisé par le demi-petit axe (*), on aura donc pour la valeur du rayon du cercle osculateur à l'hélice cylindrique et circulaire et en un point quelconque de cette hélice

$$\rho = \frac{R}{\cos^2\alpha}$$

De là on peut conclure qu'en développant (ou étendant sur un plan) une surface héliçoïde et développable Σ, son arête de rebroussement se transformera en un cercle du rayon ρ auquel les génératrices droites de la surface Σ deviendront toutes tangentes au développement. Les diverses autres hélices de la surface Σ, venant couper toutes les génératrices droites de cette surface Σ en des points également

(*) *Voyez*, dans l'ouvrage qui a pour titre: *Complément de géométrie descriptive*, le mémoire qui a pour titre: *Construction du cercle osculateur en un point d'une section conique*, mémoire que j'ai publié pour la première fois dans le Journal de mathématiques pures et appliquées, de M. Liouville.

distants des points de contact correspondants, auront toutes pour *transformées* des cercles concentriques.

407. J'ai employé la surface héliçoïde développable, ayant une hélice cylindrique et circulaire pour arête de rebroussement, pour former les dents de l'une des roues de l'engrenage destiné à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes non situés dans un même plan (*).

Concevons la plus courte distance D des deux axes A et A′ non situés dans un même plan (*fig.* 250), prenons sur la droite D un point *m*; considérons *om* et *o′m* comme les rayons de deux cylindres de révolution ayant respectivement pour axes A et A′, ces deux cylindres seront tangents au point *m*; considérant le plan du cercle C perpendiculaire à l'axe A comme un plan horizontal de projection, H^{r} sera la trace du plan tangent commun à ces deux cylindres dont G et K seront respectivement les génératrices droites de contact. Dans le plan P, menons une droite Θ perpendiculaire au plan horizontal de projection, puis faisons rouler ce plan P sur le cylindre ayant A′ pour axe; la droite Θ, faisant toujours le même angle avec les génératrices K de ce cylindre (A′), restera tangente à une hélice E et formera un héliçoïde développable Σ. Faisons de même rouler le plan P sur le cylindre (A) ayant la droite A pour axe, la droite Θ restera toujours tangente à G et engendrera une surface cylindrique S ayant pour section droite la développante D du cercle C décrite par le point *z*, trace horizontale de la droite Θ.

Cela posé, le plan tangent T à ce cylindre S contiendra la génératrice Θ et la tangente H^{r} à la développante D, et ces deux droites seront perpendiculaires à H^{r}; ce plan T sera donc perpendiculaire au plan P, ou normal au cylindre (A′); ce plan T sera donc tangent à l'héliçoïde Σ; les deux surfaces Σ et S sont donc tangentes le long de leur génératrice commune Θ.

Si l'on imprime un mouvement de rotation au cylindre (A′) autour de son axe A′ de manière que la génératrice droite K′ vienne en K, le point *y* de l'hélice E viendra en *y′* et la tangente en *y* à l'hélice E viendra prendre une position verticale, car alors elle sera dans le plan P et parallèle à Θ et elle rencontrera dès lors H^{r} en *z′*; la développante D aura été entraînée et sera venue en D′, de sorte que les surfaces Σ et S auront pris de nouvelles positions Σ′ et S′ ayant encore une génératrice commune Θ′, et l'on démontrerait comme ci-dessus que ces deux surfaces sont tangentes l'une à l'autre le long de cette génératrice commune Θ′.

Les deux surfaces Σ et S étant employées pour les surfaces des dents de deux roues dentées ou roues d'engrenage, ces roues se conduiront uniformément et l'on

---

(*) *Voyez* l'ouvrage qui a pour titre : *Théorie géométrique des engrenages destinés à transmettre le mouvement de rotation uniforme, entre deux axes situés ou non dans un même plan* (1842).

pourra ainsi transmettre à l'axe A un mouvement de rotation imprimé directement à l'axe A'.

Des cycloïdes et des épicycloïdes.

408. Si un cercle C roule, sans glisser, sur une droite D, un point quelconque du plan de ce cercle décrit une courbe, qu'on désigne en général sous le nom de *cycloïde*. Si le point *générateur* est sur la circonférence du cercle, on obtient la cycloïde *parfaite*, que l'on nomme simplement *cycloïde;* si le point générateur est hors du cercle on obtient une *cycloïde rallongée;* si le point générateur est dans le cercle la cycloïde est *raccourcie.* Si le cercle se meut en restant toujours dans un même plan la cycloïde est *plane*, si le plan du cercle varie d'inclinaison par rapport à un plan fixe passant par la droite D pendant le mouvement de rotation du cercle C, la cycloïde est *gauche.* On peut se proposer de trouver les projections de cette courbe (cycloïde *plane* ou *gauche*) et de lui mener une tangente.

409. Lorsqu'un cercle C roule, sans glisser, sur un autre cercle C' fixe, un point quelconque du plan du cercle mobile décrit une courbe qu'on désigne en général sous le nom d'*épicycloïde.* Si le point générateur est sur la circonférence du cercle mobile, l'on obtient l'épicycloïde *parfaite;* si le point est hors du cercle, l'épicycloïde est *rallongée;* s'il est dans l'intérieur du cercle, l'épicycloïde est *raccourcie;* si le cercle fixe et le cercle mobile sont dans un même plan pendant tout le temps du mouvement *de roulement*, l'épicycloïde est *plane;* si les deux cercles ne sont pas toujours dans un même plan, l'épicycloïde est *gauche.* Si les deux cercles sont tangents l'un à l'autre et extérieurement, l'épicycloïde est *extérieure;* si les deux cercles sont tangents l'un à l'autre et intérieurement, l'épicycloïde est *intérieure.*

On pourrait *généraliser* le mode de génération des *cycloïdes* et des *épicycloïdes* en prenant le point générateur situé ou non dans le plan du cercle mobile, pourvu qu'on le suppose invariablement lié à ce cercle.

410. Lorsque les plans des deux cercles C et C' font un angle constant pendant tout le temps du mouvement de roulement de l'un de ces cercles C sur l'autre cercle C', on peut considérer ces deux cercles C et C' comme les bases de deux surfaces coniques de révolution ayant même sommet et en contact par la génératrice passant au point de contact des deux cercles C et C', de sorte que tous les points des deux bases C et C' de ces cônes sont à la même distance du sommet commun à ces deux cônes, et par conséquent les deux cercles C et C' se trouvent sur une sphère ayant son centre en le point qui est le sommet commun. Tous les

points de l'épicycloïde sont alors situés sur cette surface sphérique, de là le nom d'*épicycloïde sphérique* sous lequel on la désigne (*).

411. Si le cône mobile se réduit à un plan tangent au cône fixe, et que le cercle situé sur ce plan tangent ait son centre au sommet du cône fixe, l'épicycloïde engendrée par un point de sa circonférence prend le nom de *développante sphérique.* Le sommet du cône de révolution, qui a pour base le cercle fixe, étant arbitraire, on voit qu'en général la développante sphérique sera engendrée par un point d'une circonférence dont le centre serait situé en un point arbitrairement choisi sur une perpendiculaire menée au plan du cercle fixe et élevée par le centre de ce cercle (**).

Les constructions nécessaires pour trouver les projections de l'épicycloïde sphérique ordinaire et de la développante sphérique, étant identiquement les mêmes, ainsi que celles qui conduisent à la tangente à cette courbe, nous nous contenterons de les exécuter pour la développante sphérique qui donnera lieu à une remarque, qui lui est spéciale.

412. Prenons pour plan horizontal de projection le plan du cercle fixe B (*fig.* 251), et pour plan vertical de projection le plan passant par l'axe A du cône, et par le point a de contact dans la position actuelle des deux cercles; la sphère (S) qui contient les deux cercles B et C est coupée par le plan vertical suivant le grand cercle S. Rabattons le plan P du cercle mobile C autour de H^p, le point s sommet du cône fixe et centre du cercle mobile C, vient en s' et le cercle C en C'; soit o l'origine de l'épicycloïde ou développante sphérique, il est évident que le point *générateur* de la développante sphérique, qui était primitivement en o, est distant maintenant du point de contact a d'un arc am' égal à l'arc oa rectifié; ramenant ensuite ce point m' dans le plan P, il décrit un arc de cercle dans un plan parallèle au plan vertical de projection et vient se placer en m, puisque le plan P est perpendiculaire au plan vertical de projection.

Pour avoir la position du point générateur quand les cercles sont en contact au point b, on pourrait changer de plan vertical de projection en prenant pour nouvelle ligne de terre le rayon $s^h b$, mais ces nombreux changements de plans compliqueraient la figure; c'est pourquoi nous adopterons la méthode des mouvements de rotation ainsi qu'il suit :

Concevons qu'on fasse tourner le nouveau plan vertical de projection ayant $s^h b$

(*) *Voyez*, dans l'ouvrage qui a pour titre: *Développements de géométrie descriptive*, ce qui est relatif aux épicycloïdes annulaires, chapitre V, page 219.

(**) *Voyez*, dans l'ouvrage qui a pour titre: *Complément de géométrie descriptive*, le mémoire qui a pour titre: *De la surface enveloppe des plans normaux à l'épicycloïde sphérique*, mémoire que j'ai publié pour la première fois dans le 23e cahier du Journal de l'École polytechnique.

pour ligne de terre L'T', autour de l'axe A pour le ramener sur l'ancien plan vertical ayant LT pour ligne de terre, et que dans son mouvement il entraîne toute la figure, le point de contact b viendra en a, et rabattant alors le cercle mobile en C', le point générateur se trouvera distant du point a d'un arc an'', qui rectifié sera égal à l'arc ob rectifié ; ramenant le cercle C' dans le plan P, le point n'' viendra en n', puis pour ramener ce point n' dans la position n qu'il doit occuper par rapport au plan vertical L'T', il faut faire tourner le plan vertical LT autour de l'axe A ; dans ce mouvement le point n' décrira un angle égal à $\widehat{bs^ha}$; mais remarquons que $n'^h i'$ est la projection horizontale d'une perpendiculaire I abaissée du point n' sur le plan vertical LT, cette perpendiculaire tournant en même temps que le plan vertical LT ne cessera pas de lui être perpendiculaire, donc en sa nouvelle position I' sa projection horizontale sera perpendiculaire au rayon $s^h b$ ou L'T', et le point i' pied de cette perpendiculaire sur le plan vertical LT viendra en un point i pied de la nouvelle position I' (de la perpendiculaire I) sur le plan vertical L'T', et ce point i sera tel que l'on aura : $s^h i = s^h i'$; dès lors prenant $in^h = i'n'^h$ nous aurons en n^h la projection horizontale du point n, sa projection verticale doit être à la rencontre d'une perpendiculaire et d'une parallèle à LT, menées respectivement par les points n^h et n'^v. On obtiendra de la même manière tant d'autres points que l'on voudra, et en les unissant par une courbe D, on aura la développante sphérique demandée.

413. Proposons-nous maintenant de construire la tangente à cette courbe D au point m. Pour cela remarquons que la développante sphérique D est située sur la surface sphérique (S), donc sa tangente au point m est contenue dans le plan tangent mené à cette sphère et au point m. Les deux cercles B et C, étant en contact par le point a, ont deux points a et a' successifs et infiniment voisins en commun, et lorsque le cercle C se meut, l'un de ces deux points, et ainsi a, cesse de leur être commun, et ils ont alors en commun le second point a' et un troisième point a'' successif et infiniment voisin de a', de sorte que pendant un instant infiniment petit, le point générateur s'est mu autour du point a' ou a (*), et par conséquent est resté sur une surface sphérique Σ ayant son centre en ce point ; donc l'élément rectiligne de la courbe D, élément rectiligne qui prolongé détermine la tangente T, étant sur cette surface sphérique, la tangente T sera située dans le plan tangent mené à cette nouvelle surface Σ et au point m. Donc enfin la tangente à la courbe D est l'intersection des plans tangents à deux surfaces sphériques, passant l'une et l'autre par le point m, et ayant respectivement

(*) Car l'on peut supposer que le cercle C, avant d'être en contact avec le cercle B par l'élément rectiligne aa', était en contact par l'élément précédent.

pour centre les points s et a. Ces plans tangents étant perpendiculaires aux rayons qui passent par le point de contact m, la tangente en ce point m est perpendiculaire à ces mêmes rayons, et par conséquent à leur plan; or le rayon R, de la sphère (S), a sa trace horizontale en c, et sa trace verticale en s sur V^s, le point a est évidemment la trace horizontale et en même temps la trace verticale du rayon de la seconde sphère Σ, donc le plan N de ces rayons est connu, et dans le cas actuel il n'est autre que le plan P lui-même; par conséquent H^n est perpendiculaire à LT; donc T^h est parallèle à LT, et par conséquent la tangente T est parallèle au plan vertical de projection; T^v est perpendiculaire à la génératrice de contact sa, et elle fait avec la ligne de terre l'angle que fait la tangente T avec le plan horizontal de projection, or cet angle $\widehat{m^v za}$ est le complément de l'angle $\widehat{m^v az}$ que fait la génératrice du cône avec le même plan horizontal.

En opérant de même, par rapport à tout autre point de la développante sphérique, on trouvera toujours que la tangente en ce point et la génératrice correspondante du cône font avec le plan horizontal des angles complémentaires. Mais le cône étant de révolution toutes ses génératrices font avec le plan horizontal un même angle, donc aussi toutes les tangentes à la développante sphérique font avec le plan horizontal un même angle; donc enfin la développante sphérique est une hélice cylindrique, en se rappelant la définition donnée (n° 396) pour l'hélice, et ainsi nommant *hélice* toute courbe tracée sur une surface développable et qui a pour *transformée* une droite. Il est évident que la propriété remarquable dont nous venons de démontrer l'existence pour la développante sphérique ne peut exister pour une épicycloïde sphérique quelconque; d'ailleurs, il est facile de le démontrer ou mieux de s'en convaincre en exécutant l'*épure* soit pour une épicycloïde sphérique soit pour une développante sphérique et en *lisant* attentivement les deux épures.

414. L'épicycloïde sphérique est *le cas général* des épicycloïdes, des cycloïdes, et des développantes soit planes, soit gauches ou à double courbure; car si l'on suppose que l'angle au sommet du cône mobile augmente jusqu'à devenir égal à deux droits, on obtient la développante sphérique; si c'est le cône fixe qui dégénère en un plan, l'épicycloïde devient, par rapport aux épicycloïdes sphériques ordinaires, ce qu'est la cycloïde plane par rapport aux épicycloïdes planes. Si l'on suppose que le sommet commun du cône fixe et du cône mobile s'éloigne jusqu'à l'infini, les cônes se transforment en cylindres, les deux cercles B *fixe* et C *mobile* sont alors dans un même plan, et l'on obtient l'épicycloïde plane. Si en même temps que le sommet s'est transporté à l'infini, le cône fixe a dégénéré en un plan, et si dès lors le cercle fixe B est devenu une droite fixe, alors

un point du cercle mobile C engendre la cycloïde ordinaire; si c'est au contraire le cône mobile, qui devient un plan, le cercle mobile se réduit à une tangente au cercle fixe B, et par conséquent un des points de cette tangente décrit une développante de cercle.

415. Lorsque l'on considère deux courbes quelconques U et U′ tangentes l'une à l'autre en un point a, elles ont en ce point un élément rectiligne en commun, et ainsi elles ont en commun deux points a et a' successifs et infiniment voisins. Si l'on suppose que la courbe U reste fixe et que la courbe U′ se meuve d'une manière arbitraire, mais en roulant sur la courbe U, alors un point a''_1 appartenant à la courbe U′ et infiniment voisin du point a' viendra se superposer avec un point a'' appartenant à la courbe U et infiniment voisin du point a'.

Pendant le mouvement de roulement, la courbe U′ pivote donc sur le point a' et pendant tout le temps nécessaire pour que les deux points a'' et a''_1 viennent se superposer. Dès lors, il est évident qu'un point x situé dans l'espace d'une manière arbitraire, mais lié à la courbe U′ d'une manière invariable, décrira une courbe D et que pendant le temps infiniment petit et employé par le point a''_1 à venir se superposer sur le point a'', le point x décrira dans l'espace un *élément sphérique*, ayant le point a' pour centre et ayant pour rayon la droite $\overline{a'x}$.

Ainsi, l'on peut dire que la courbe D aura son élément rectiligne xx' situé sur une sphère S ayant le point a pour centre et $\overline{ax}$ pour rayon.

Et cela aura lieu, quelles que soient les courbes U et U′ et quelle que soit la position du point x par rapport à la courbe mobile U′, ce point x étant d'ailleurs (comme point générateur de la courbe D) supposé lié à la courbe U′ d'une manière invariable, et quelles que soient les *oscillations* que fera la courbe U′ en roulant sur la courbe U; ainsi si l'on considère deux cercles C et C′ et que l'on imagine que le plan du cercle C′ soit tangent à une surface conique oblique Σ ayant le cercle C pour base, et que ce plan reste tangent à cette surface Σ pendant que le cercle C′ roule sur le cercle C, un point x fixé au cercle C′ engendrera une courbe D dont l'élément rectiligne xx' sera sur une sphère S ayant pour centre le point a contact des deux cercles C et C′ et pour rayon la droite $\overline{ax}$. Cette sphère S variera de position et de rayon, puisque le point a deviendra successivement chacun des points du cercle C.

Ainsi pour chaque point de la courbe D engendrée par le point x, on connaîtra une normale à cette courbe, et cela en vertu de ce que la courbe C′ roule sur la courbe C.

Il sera facile de mettre en projection les divers points de la courbe D, mais la *construction graphique* de la tangente en un point de cette courbe D ne paraît possible que pour des cas très-particuliers, et qui seraient tels qu'en vertu des *don-*

nées nous pourrions reconnaître la nature géométrique ou le mode de génération d'une seconde surface Δ, sur laquelle la courbe D serait tout entière tracée, ou sur laquelle se trouverait placé l'élément rectiligne de la courbe D correspondant au point en lequel on veut mener la tangente; car alors le plan tangent à la sphère mobile S et le plan tangent à la surface Δ (pour le point considéré sur la courbe D) se couperaient suivant la tangente demandée.

Mais si les deux courbes U et U′ sont planes et situées dans un même plan P, la courbe D engendrée par un point x situé dans le plan P et lié à la courbe U′ d'une manière invariable engendrera une *roulette plane* D et pour le point x de la courbe D nous connaîtrons la normale, car elle sera la droite $\overline{ax}$, le point a étant le point de contact des courbes U et U′ à l'instant où le point *générateur* de la courbe D se trouve occuper la position x sur le plan P.

On connaîtra donc pour ce point x la tangente à la courbe D, car il suffit de connaître la normale d'une courbe plane pour connaître sa tangente.

Mais pour une courbe à double courbure, il faut connaître le plan normal de cette courbe *gauche* pour connaître sa tangente, il faut dès lors connaître pour le point considéré sur cette courbe deux normales à cette courbe.

Toutes les fois que les deux courbes U et U′ à double courbure pourront être placées sur deux surfaces développables roulant l'une sur l'autre, alors on pourra construire la tangente à la *roulette gauche* D; et en effet, concevons la surface développable V sur laquelle se trouve placée la courbe fixe U et la surface développable V′ sur laquelle se trouve placée la courbe mobile U′; désignons par E et E′ les arêtes de rebroussement des deux surfaces développables; concevons les courbes U et U′ en contact en un point a et les deux surfaces V et V′ en contact par une droite G passant par ce point a et tangentes à E en b et à E′ en b'; il faudra pour que les surfaces V et V′ puissent rouler l'une sur l'autre que les points b et b' se confondent, il faudra donc que les arêtes de rebroussement E et E′ soient tangentes l'une à l'autre et roulent l'une sur l'autre pendant que les courbes U et U′ rouleront l'une sur l'autre. Dans ce cas on voit qu'un point x de l'espace et fixé d'une manière invariable à la courbe U′ pourra être considéré comme lié d'une manière invariable à la courbe E′ et dès lors le point x décrira dans l'espace une *roulette gauche* D dont l'élément rectiligne xx' sera situé 1° sur une sphère S ayant son centre au point a contact des courbes U et U′, et 2° sur une sphère Δ ayant son centre au point b contact des courbes E et E′. Il est évident que l'élément rectiligne xx' appartiendra au cercle δ intersection des deux sphères S et Δ et que dès lors la tangente θ au point x de la *roulette gauche* D, fera un angle droit avec la génératrice droite G suivant laquelle les surfaces développables V et V′ sont en contact, puisque cette droite G unit les centres a et b des deux sphères S et Δ.

Il est facile de reconnaître que la *développante sphérique* est un cas particulier du cas général que nous venons d'examiner; la surface développable V est le cône fixe ayant pour base le cercle B qui remplace la courbe U, le plan du cercle mobile C est la surface développable V', le cercle mobile C' remplace la courbe mobile U' et le sommet *s* du cône fixe qui est en même temps le centre du cercle mobile C remplace les deux arêtes de rebroussement E et E'.

116. Lorsque (nº 114) nous avons construit graphiquement la tangente en un point de la développante sphérique, nous avons employé deux normales à cette courbe, mais cette méthode (dite *par le plan normal*) n'est pas la seule que l'on puisse employer; on peut construire la tangente en un point d'une *épicycloïde sphérique* par trois autres méthodes.

1° L'épicycloïde sphérique étant toute ~~entière~~ située sur une sphère Δ dont le centre est le sommet *s* commun aux deux cônes de révolution, savoir : l'un fixe ayant le cercle fixe B pour base et l'autre mobile ayant le cercle C mobile pour base, et l'élément rectiligne de l'épicycloïde sphérique, pour le point en lequel on veut mener une tangente à cette courbe, étant situé sur la sphère mobile S et de rayon variable (ci-dessus indiquée), on voit que la première *manière graphique* de construire la tangente en un point de l'épicycloïde sphérique, consistera à mener au point x de cette courbe un plan T tangent à la sphère invariable Δ et un plan Θ tangent à la sphère *variable* S; ces deux plans T et Θ se couperont suivant la tangente demandée. Cette méthode est la méthode générale, en ce sens qu'elle est celle qu'il faut employer pour *mener la tangente en un point de l'intersection de deux surfaces, quel que soit le mode de génération de ces surfaces.*

La méthode que nous avons donnée (nº 214) et qui est connue sous le nom de *méthode du plan normal*, rentre dans le cas où l'on a à construire la tangente à la courbe intersection de deux surfaces de révolution. Cette méthode doit donc être considérée comme une méthode particulière et devant dès lors être employée en vertu du problème particulier que l'on a à résoudre, parce qu'elle simplifie les *constructions graphiques.*

2° Si l'on se rappelle que l'épicycloïde sphérique a en chacun de ses points x un élément rectiligne situé sur la sphère invariable Δ et sur une des sphères mobiles S, on voit de suite que la tangente au point x à cette courbe sera la tangente au cercle δ intersection des deux sphères Δ et S; en exécutant les constructions graphiques d'après cette idée, la tangente se trouve très-facilement déterminée et de plus on reconnaît de suite que la projection de la tangente θ à l'épicycloïde sphérique pour le point correspondant au plan Z qui passe par le sommet *s* commun aux deux cônes de révolution (*s*, E) et (*s*, C) et le point *a* de contact des deux cercles B et C, on voit, dis-je, que la projection, de la tangente θ sur le plan Z est toujours

perpendiculaire à la droite $\overline{sa}$ quels que soient d'ailleurs les rayons des cercles B et C et l'angle compris entre les plans de ces cercles.

3° La méthode de *Roberval* s'applique avec facilité et *exactitude* à la construction de la tangente en un point de l'épicycloïde sphérique (*).

CHAPITRE XI.

DES SURFACES GAUCHES.

417. Une surface *réglée* est celle qui est engendrée par le mouvement d'une droite. Trois conditions sont nécessaires et suffisent pour déterminer, dans l'espace, le mouvement d'une droite.

Les surfaces *réglées* sont divisées en deux espèces : 1° *les surfaces développables*, pour lesquelles deux génératrices droites successives et infiniment voisines se coupent, et 2° *les surfaces gauches*, pour lesquelles deux génératrices successives et infiniment voisines ne se coupent pas.

Lors donc qu'une surface *réglée* est engendrée par une droite en vertu de certaines conditions auxquelles le mouvement de la droite génératrice est assujetti, il faut, d'après ces conditions, rechercher si la surface *réglée* est *développable* ou si elle est *gauche*.

Ainsi par exemple, étant donnée une courbe à double courbure C, si l'on conçoit les plans osculateurs successifs P, P′, P″, P‴,..... de cette courbe C et en ses points successifs m, m', m'',..... et si l'on fait mouvoir un plan Q tangentiellement à cette courbe C et prenant des positions dans l'espace telles que le plan Q tangent au point m à la courbe C soit perpendiculaire au plan P.

Q′	—	m'	—	P′.
Q″	—	m''	—	P″.
etc.,	—	etc.,	—	etc.,

(*) *Voyez* à ce sujet ce que j'ai dit dans les *Développements de géométrie descriptive* (chapitre V) touchant les *épicycloïdes annulaires*.

l'enveloppe de l'espace parcouru par le plan Q sera une surface *réglée* Σ qui sera *développable*.

Mais si l'on fait mouvoir une droite G sur la courbe C de manière à ce que ses diverses positions

G passant	par le point	m	soit perpendiculaire	au plan P.
G′	—	m'	—	P′.
G″	—	m''	—	P″.
etc.,	—	etc.,	—	etc.,

la surface Σ_1 *lieu* des diverses droites G, G′, G″,..... sera encore une surface *réglée*, mais qui sera *gauche*.

La surface Σ est une surface *développable*, parce que les plans Q et Q′ se coupant suivant une droite R, les plans Q′ et Q″ se coupant suivant une droite R′, et ainsi de suite; les droites R, R′,..... sont les génératrices droites de la surface *réglée* Σ; mais R et R′, se coupent, car ces deux droites sont situées dans le plan Q′, donc la surface Σ est *développable*.

La surface Σ_1 est *gauche*, car la droite G′ passant par le point m' de la courbe C est perpendiculaire au plan osculateur P passant par les points successifs m, m', m'', de cette courbe C, la droite G′ est donc perpendiculaire à l'*élément rectiligne* $\overline{m'm''}$ de la courbe C. La droite G″ successive de G′ et qui passe par le point m'' de la courbe C est perpendiculaire au plan osculateur P′ qui passe par les points successifs m', m'', m''' de cette courbe C, cette droite G″ est donc perpendiculaire à l'*élément rectiligne* $\overline{m'm''}$ de la courbe C; et ainsi de suite. Or, les deux génératrices successives G′ et G″ de la surface *réglée* Σ_1, ne se rencontrent pas, puisqu'elles ont pour plus *courte distance*, l'élément rectiligne $\overline{m'm''}$ de la courbe *directrice* C.

418. On peut engendrer un grand nombre de surfaces *réglées*, soit *développables*, soit *gauches*, en variant les conditions du mouvement de la droite génératrice; mais quelles que soient les conditions auxquelles se trouve assujetti le mouvement d'une droite lorsqu'elle engendre une surface *réglée-gauche*, on peut toujours considérer cette surface *gauche* comme ayant été engendrée, en *définitive*, par l'un ou l'autre des deux *modes* ci-après exposés, *modes* de génération qui facilitent *singulièrement* la recherche et la démonstration de certaines propriétés *fondamentales* dont jouit une surface *gauche*, quel que soit d'ailleurs son mode primitif de génération.

Ces deux modes remarquables consistent en ce que l'on peut considérer toute surface *gauche* comme engendrée :

1° Par une droite G se mouvant sur trois courbes *directrices* C, C′, C″;

2° Par une droite G se mouvant sur deux courbes *directrices* C et C', et parallèlement à un *cône directeur* Δ.

419. La surface gauche la plus simple que l'on puisse obtenir par le premier mode de génération est *l'hyperboloïde à une nappe* qui est engendrée par une droite G se mouvant sur trois droites K, K', K''.

420. La surface gauche la plus simple que l'on puisse obtenir par le second mode de génération est le *paraboloïde hyperbolique* qui est engendré par une droite G se mouvant sur deux droites K et K' et parallèlement à un *plan directeur* P.

Du premier mode de génération d'une surface gauche.

421. Étant données les trois courbes *directrices* C, C', C'' à simple ou à double courbure, nous prendrons sur la courbe C un point a que nous regarderons comme le sommet commun à deux cônes, savoir : l'un B' ayant la courbe C' pour *directrice* et l'autre B'' ayant la courbe C'' pour *directrice*. Ces deux cônes B' et B'' se couperont suivant des génératrices droites puisque ces deux cônes B' et B'' ont même sommet a.

Je désigne par G l'une de ces génératrices droites, elle coupera la courbe C' au point a' et la courbe C'' au point a''.

Prenons maintenant sur la courbe C, les points a_1, a_2, a_3, etc., successifs et infiniment voisins, et opérons pour chacun d'eux comme nous l'avons fait pour le point a, nous obtiendrons les génératrices droites G_1, G_2, G_3, etc., qui seront successives et infiniment voisines, car puisque par hypothèse le point a_1 est le successif du point a sur la courbe C, on ne peut placer entre les points a et a_1 un point qui approche plus près de a que a_1 n'en approche, dès lors on ne peut placer, d'après ce mode de génération, une droite qui approche plus près de G que G_1 n'en approche; et dès lors G_1 coupant respectivement les courbes C' et C'' aux points a'_1 et a''_1, il s'ensuit que d'après le mode de génération adopté, le point a'_1 est le successif et infiniment voisin de a' sur la courbe C' et que le point a''_1 est le successif et infiniment voisin de a'' sur la courbe C''.

Ainsi la tangente θ au point a de C ne sera autre que l'élément rectiligne $\overline{aa_1}$ prolongé, et de même les tangentes θ' et θ'' aux points a' et a'' des courbes C' et C'' ne seront autres que les éléments rectilignes $\overline{a'a'_1}$ et $\overline{a''a''_1}$ (de ces courbes C' et C'') prolongés.

Il est évident que les génératrices successives et infiniment voisines G et G_1 ne peuvent être dans un même plan qu'autant que les tangentes θ, θ' et θ'' seront elles-mêmes dans un même plan.

Nous pouvons donc dire :

La surface engendrée par une droite G se mouvant sur trois courbes C, C′, C″, est *gauche* tout le long de chacune de ses génératrices droites G, car pour chacun des points de cette génératrice G le plan tangent à la surface change de position dans l'espace (n° 417) puisque deux génératrices droites successives et infiniment voisines de cette surface ne sont pas dans un même plan.

Nous pouvons encore dire : Une surface *gauche* peut, dans certains cas, présenter une *forme développable* tout le long d'une de ses génératrices droites G, et cela aura lieu lorsqu'en chaque point de cette génératrice droite G, le plan tangent à la surface sera le même.

Du deuxième mode de génération d'une surface gauche.

422. Soient données deux courbes C et C′ et un cône Δ ayant son sommet en un point *s* de l'espace et pour *directrice* une *ligne* M à simple ou à double courbure.

Prenons sur la courbe C un point *a* et joignons les points *a* et *s* par une droite D; faisons glisser le cône Δ parallèlement à lui-même de manière à ce que son sommet *s* se transporte en *a*, en glissant sur la droite D; le cône Δ prendra la position Δ′.

Cela posé :

Considérons le point *a* comme le sommet d'un cône B′ ayant la courbe C′ pour *directrice*, les deux cônes Δ′ et B′ se couperont suivant une ou plusieurs génératrices droites, puisqu'ils ont même sommet *a*.

Je désigne par G l'une de ces génératrices droites, elle coupera la courbe C′ en un point *a′* et elle sera située sur le cône Δ′; en ramenant le cône Δ′ en sa position primitive Δ, la génératrice G prendra sur le cône Δ la position γ qui sera une droite parallèle à G.

Cela posé :

Prenons sur la courbe C une suite de points a_1, a_2, a_3, etc., successifs et infiniment voisins, et opérons pour chacun d'eux comme nous l'avons fait pour le point *a*, nous obtiendrons les génératrices droites successives et infiniment voisines G, G_1, G_2, G_3, etc., coupant la courbe C′ aux points a', a'_1, a''_2, a'''_3, etc., et étant parallèles aux génératrices droites successives et infiniment voisines γ, γ_1, γ_2, γ_3, etc., du cône Δ.

La surface engendrée par la droite G sera *gauche* tout le long d'une quelconque de ses génératrices droites G; mais si pour les points homologues *a* et *a′* les tangentes θ et θ' aux courbes *directrices* C et C′ sont parallèles, ou si elles sont situées dans un même plan, la surface sera *développable* tout le long de la génératrice particulière G (n° 417).

423. Une surface *gauche* Σ est donc complétement définie ou déterminée, lorsque l'on se donne 1° les trois courbes *directrices* C, C′, C″ ou 2° les deux courbes *directrices* C et C′ et le *cône directeur* Δ, puisque l'on peut construire autant de génératrices droites G de la surface Σ que l'on voudra.

Mais il est utile de bien faire remarquer que ce n'est que par *la pensée* que l'on peut immédiatement considérer une surface gauche Σ donnée par *l'un* des deux *modes* précédents de génération, comme étant susceptible d'être aussi engendrée par *l'autre mode*.

En effet :

1° Si la surface Σ est déterminée par trois courbes directrices C, C′, C″, il faudra construire le cône *directeur* Δ qui doit remplacer la troisième courbe *directrice* C″; et pour construire ce cône Δ, il faudra : 1° construire toutes les génératrices droites G, G_1, G_2, etc., de la surface Σ, puis 2° il faudra, par un point *s* arbitrairement pris dans l'espace, faire passer une suite de droites γ, γ_1, γ_2, γ_3, etc., respectivement parallèles à ces droites G, G_1, G_2, G_3, etc., enfin 3° il faudra couper, par un plan P ou une surface S, les diverses droites γ, γ_1, γ_2, γ_3, etc., et l'on obtiendra la *directrice* M du cône *directeur* Δ demandé.

2° Si la surface Σ est déterminée par deux courbes *directrices* C et C′ et un cône *directeur* Δ, il faudra construire la troisième courbe directrice C″ qui doit remplacer le cône Δ; et pour construire cette courbe C″, il faudra avoir construit toutes les génératrices droites G, G_1, G_2, etc., de la surface Σ, pour les coupant par un plan P ou une surface S obtenir cette courbe C″.

On voit donc que lorsque l'on exécute une *épure* on ne peut considérer une surface *gauche* que comme étant donnée par l'un des deux modes de génération précédents, sans s'inquiéter de l'autre mode; et que l'on ne peut, en examinant une surface *gauche* Σ, la considérer indistinctement comme étant le résultat de l'un ou de l'autre *mode* de génération que lorsque l'on se propose de trouver, par le *raisonnement géométrique*, les *propriétés* dont peut jouir cette surface Σ.

De la surface gauche engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites non parallèles entre elles et non parallèles à un même plan.

424. Dans l'ouvrage qui a pour titre : *Développements de géométrie descriptive*, j'ai démontré que la surface engendrée par une droite s'appuyant sur trois droites était *doublement réglée*; qu'elle avait un *centre*, un *cône asymptote*, qui avait pour directrice une section conique; que tout plan, quelle que fût sa direction, coupait le cône asymptote et la surface gauche suivant deux courbes *concentriques*, *semblables et semblablement placées*, et que dès lors tout plan coupait cette surface

gauche (à laquelle on a donné le nom d'*hyperboloïde à une nappe*) suivant une section conique, *ellipse, parabole* ou *hyperbole*, et cela en vertu des trois positions que pouvait affecter ce plan sécant par rapport au cône asymptote (*).

Nous ne reproduirons donc point ici la démonstration donnée d'une manière complète dans l'ouvrage cité ci-dessus, mais nous allons nous occuper en détail de l'*hyperboloïde à une nappe et de révolution*, ainsi que nous l'avons annoncé (n° 250).

425. Soient donnés un axe A perpendiculaire au plan horizontal de projection et une droite G oblique au plan horizontal et parallèle au plan vertical de projection (*fig.* 252). Ces deux droites A et G ne se rencontrant point, auront pour plus courte distance une droite $\overline{op}$ qui sera horizontale et perpendiculaire au plan vertical de projection et les droites G et A feront entre elles un angle α qui sera *écrit* ou donné sur l'*épure* par l'angle α que font entre elles les droites G^v et A^v.

Cela posé :

Faisons tourner la droite G autour de l'axe A, elle engendrera une surface de révolution Σ qui sera *réglée.*

C'est cette surface Σ qui a reçu le nom d'*hyperboloïde à une nappe et de révolution.*

426. Démontrons d'abord que la surface Σ est doublement réglée.

Par la droite G menons un plan Y parallèle au plan vertical de projection; puis, par le point p pied de la plus courte distance $\overline{op}$ sur la droite G, menons dans ce plan Y les droites A' parallèles à A et K faisant avec A' l'angle α

Il est évident que les droites K^v et A^v feront entre elles l'angle α.

Si l'on fait tourner la droite K autour de l'axe A, elle engendrera une surface de révolution Σ', et je dis que les deux surfaces Σ et Σ' ne sont qu'une seule et même surface.

Et en effet : coupons tout le système par un plan X horizontal, ou, en d'autres termes, perpendiculaire à l'axe de rotation A.

Ce plan X coupera la droite G au point m, la droite K au point n, et l'axe A au point q; or, il est évident que les droites $\overline{qn}$ et $\overline{qm}$ sont égales en longueur; donc les points m et n décriront, pendant la rotation des droites K et G autour de l'axe A, un même cercle δ.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

L'hyperboloïde à une nappe et de révolution est une surface doublement réglée.

427. Démontrons maintenant que la surface Σ est gauche.

Si la surface Σ est gauche, elle aura en chacun des points de l'une quelconque de ses génératrices droites G, un plan tangent différent; en d'autres termes, elle

(*) *Voyez* la page 231 des *Développements de géométrie descriptive.*

n'aura pas même plan tangent en chacun des points de la droite G, comme cela a lieu pour une surface développable.

Le plan tangent T au point m de la droite G passera par cette droite G et la tangente θ_1 au *parallèle* δ; le plan tangent Θ au point p de la droite G passera par la tangente au cercle C et la droite G; le plan tangent T_1 au point g, trace horizontale de la droite G, passera par la droite G et la tangente θ au point g du cercle B (cercle qui est dit *trace horizontale* de la surface Σ). Tous ces cercles C, δ, B étant horizontaux, leurs tangentes seront horizontales; et pour que tout le long de la droite G il existe un plan tangent unique (comme pour les surfaces développables), il faudra que ces tangentes soient parallèles entre elles, et que dès lors leurs projections horizontales soient parallèles entre elles. Or, il est évident que les tangentes au point p^h du cercle C^h, m^h du cercle δ^h, g du cercle B ne peuvent être parallèles, puisque ces cercles sont concentriques.

Ainsi, l'on peut énoncer le théorème suivant :

La surface hyperboloïde à une nappe et de révolution est une surface gauche.

Du plan tangent à l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ.

428. Si l'on prend un point x sur la surface Σ, et si l'on fait tourner la génératrice G autour de l'axe A, enfin elle arrivera en G_1 passant par ce point x; de même en faisant tourner la génératrice K autour de l'axe A, enfin elle arrivera en K_1 passant par ce même point x.

On a donc deux génératrices droites G_1 du *premier système* G.... et K_1 du *second système* K.... se croisant au point x de la surface Σ.

Le plan T tangent en x à la surface Σ sera donc déterminé par les deux droites G_1 et K_1 de *systèmes différents* se croisant au point x.

Construisons ce plan T.

Soit donnée (*fig.* 253) la génératrice droite G_1 par ses projections G_1^h et G_1^v; prenons sur cette droite G_1 un point m, et cherchons la génératrice K_1 du *second système* qui passe par ce point m.

Toutes les génératrices droites du système G, ainsi que toutes les génératrices droites du système K, auront leurs traces horizontales g et k situées sur le cercle B trace horizontale de la surface Σ.

Toutes les génératrices du système G et du système K se projettent sur le plan du cercle de gorge C suivant des tangentes à ce cercle; dès lors, sur tout plan parallèle au cercle de gorge C, les projections G^h et K^h des droites G et K seront des tangentes au cercle C^h. D'après cela, il nous suffira de mener par le point m^h une tangente K_1^h à la projection C^h du cercle de gorge C et nous aurons la projection horizontale de la génératrice K_1 passant par le point m.

La droite K_1^h coupe le cercle B en deux points k_1 et r, mais il est évident que si l'on fait tourner la droite G_1 dans le sens de la flèche f, le point g viendra en r et la droite G_1 viendra prendre dans l'espace une position G_2 telle qu'elle se projetterait horizontalement suivant K_1^h; dès lors les deux droites G_1 et G_2 appartenant au système G ne pourraient se couper, puisque les génératrices d'un même système (quelque rapprochées qu'on les suppose) ne peuvent se couper, la surface Σ étant gauche.

Ainsi la génératrice K_1 percera le plan horizontal au point k_1 du cercle B. Le plan T tangent au point m à la surface Σ aura donc pour trace la droite H^T, qui unit les points g_1 et k_1.

En faisant varier la position du point m sur la droite G_1, le plan T variera de position, car la trace H^T passant toujours par le point g_1 passera par un point k_1 qui changera de position sur le cercle B, comme le montre la figure 253, en prenant le point m' au lieu du point m.

Ainsi, l'on pourrait, par la figure même et *directement* montrer que la surface Σ est gauche, puisque par la droite G_1 on peut faire passer une infinité de plans et que chacun d'eux est tangent à cette surface Σ, en des points différents m, m', etc., et tous situés sur cette génératrice droite G_1.

429. Parmi tous les plans tangents T menés à la surface Σ par l'une de ses génératrices droites G, il faut en distinguer deux, savoir : 1° celui qui est vertical, ou, en d'autres termes, qui est parallèle à l'axe de rotation A et qui fait dès lors un angle droit avec le plan horizontal de projection, et 2° celui qui fait avec le plan horizontal de projection et avec l'axe A, des angles qui, complémentaires l'un de l'autre, sont respectivement égaux à ceux que la génératrice G fait avec le plan horizontal de projection et avec l'axe A.

Si par le point g_1 on fait passer une suite de droites H^T, $H^{T'}$, etc., chacune d'elles représente la trace d'un plan tangent T, T'...... à la surface Σ en un point m, m', etc. de la droite G_1.

Par le point g_1 on peut faire passer deux droites particulières, l'une qui se confondra avec G^h_1 et qui représentera la trace H^{Θ_1}, et l'autre H^{Θ} perpendiculaire à G_1^h ou à H^{Θ_1}.

Le plan Θ_1 et le plan Θ seront l'un et l'autre tangents à la surface Σ; déterminons leur point de contact avec cette surface Σ.

Le plan Θ_1 est le plan projetant horizontalement la droite G_1; ce plan Θ_1 est parallèle à l'axe A, et dès lors perpendiculaire au plan du cercle de gorge C; ce plan Θ_1 coupe donc la surface Σ suivant deux génératrices droites de *systèmes différents* K' et G_1 se coupant au point p en lequel la droite G_1 coupe le cercle de gorge C; ce plan Θ_1 cst donc tangent à la surface Σ au point p.

On peut donc énoncer ce qui suit :

Tout plan tangent à l'hyperboloïde à une nappe et de révolution, parallèle à l'axe de rotation est tangent à cette surface en un point situé sur le cercle de gorge.

Si par le point g_1 nous menons une droite H^θ perpendiculaire à G^h_1 elle coupera le cercle B trace horizontale de la surface Σ en un point k_2, et menant par ce point k_2 une tangente K_2^h au cercle C^h projection du cercle de gorge C, cette droite K_2^h sera évidemment parallèle à G_1^h et les deux droites K_2 et G_1 seront parallèles dans l'espace.

Le plan Θ qui passera par K_2 et G_1 passera par le centre *o* du cercle de gorge C et sera tangent à la surface Σ au point en lequel K_2 et G_1 se coupent, c'est-à-dire à l'infini, puisque ces droites K_2 et G_1 sont parallèles:

Or, il est évident que le plan Θ fait avec l'axe A un angle égal à celui que G_1 fait avec ce même axe A.

On peut donc énoncer ce qui suit :

Tout plan passant par une génératrice droite du système G *ou du système* K *et par le centre du cercle de gorge est un plan asymptote de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution; et ce plan asymptote fait avec l'axe de rotation un angle qui est égal à celui que font avec cet axe les diverses génératrices droites de la surface.*

430. D'après ce qui précède, nous voyons qu'il sera toujours facile de résoudre graphiquement, au moyen des projections et en prenant l'axe A (de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution) vertical, ou, en d'autres termes, perpendiculaire au plan horizontal de projection, les deux problèmes suivants :

1° *Étant donnés une génératrice droite* G *et un point* m *sur cette droite, construire le plan tangent à la surface hyperboloïde.*

2° *Étant donnés une génératrice droite* G *et un plan* Θ *passant par cette droite, construire le point de contact* m *du plan* Θ *avec la surface hyperboloïde.*

Et par suite il sera facile de résoudre le troisième problème suivant :

3° *Etant donnée une génératrice droite* G *d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution* Σ, *construire le plan tangent* Θ *qui passant par* G, *fait avec l'axe de révolution* A *un angle* α.

Et en effet, pour résoudre ce troisième problème, on prendra le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe A et dès lors le plan Θ devra faire avec ce plan horizontal un angle 6 complémentaire de l'angle α. On devra donc faire passer par la droite G un plan Θ faisant avec le plan horizontal un angle β (n[os] 123 et 124, 1[re] partie de ce *Cours*).

Du cône asymptote de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution.

431. Menons (*fig.* 255) deux plans verticaux Y et Y′ parallèles entre eux et au plan vertical de projection et tangents au cercle de gorge C aux points p et p'. Le plan Y coupera la surface hyperboloïde Σ suivant deux génératrices droites et de *systèmes différents* G et K se croisant au point p; le plan Y′ coupera la même surface Σ suivant deux génératrices droites et de *systèmes différents* G′ et K′ se croisant au point p'. Les droites G et K′, G′ et K seront parallèles et le plan Q passant par G et K′ sera un plan asymptote de la surface Σ, tout comme le plan P passant par G′ et K; les deux plans P et Q auront leurs traces H^p et H^q parallèles entre elles et perpendiculaires aux traces H^y et $H^{y'}$ des plans Y et Y′.

Ces quatre traces $H^p, H^q, H^y, H^{y'}$. se couperont deux à deux en un point et les quatre points ainsi obtenus g, k', k, g' qui ne sont autres que les traces horizontales des droites G, K′, K, G′ forment un rectangle dont les côtés $\overline{kg}$ et $\overline{k'g'}$ sont tangents au cercle C^h projection du cercle de gorge C.

Cela posé :

Si par l'axe A on mène un plan méridien M parallèle aux plans Y et Y′, ce plan M coupera le plan P suivant une droite L_1 parallèle et équidistante aux droites K et G′; ce même plan M coupera le plan Q suivant une droite L parallèle et équidistante aux droites G et K′, et les deux droites L et L_1 se croiseront au point o centre du cercle de gorge C.

Cela posé:

Si l'on fait tourner tout le système autour de l'axe A, les droites G, G′, K, K′, engendreront l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ, et les droites L et L_1 engendreront un cône Δ ayant le centre o du cercle de gorge C pour sommet.

Et comme les plans P et Q sont perpendiculaires au plan méridien M, ces plans seront en leurs diverses positions tangents au cône Δ, et leurs lignes de contact avec ce cône Δ seront les positions respectivement prises pondant le mouvement de rotation par les droites L_1 et L.

432. Le cône Δ est dit cône *asymptote* de l'hyperboloïde Σ.

Et en effet : le plan P étant tangent au cône Δ tout le long de la droite L_1 lui sera tangent au point situé à l'infini sur L_1; mais le plan P étant tangent à la surface Σ en un point situé à l'infini sur les droites parallèles K et G′ et ce point situé à l'infini étant le même que celui considéré sur la droite L_1 puisque les trois droites G′, K, et L_1 sont parallèles, il s'en suit que le plan P est tangent à l'infini et à la surface Σ et au cône Δ; le cône Δ et la surface Σ sont donc tangents l'un à l'autre en un point situé à l'infini sur la droite L_1.

Or ce que l'on vient de dire pour la droite L_1 on le dira pour chacune des positions prises par cette droite L_1 pendant qu'elle tourne autour de l'axe A ; les deux surfaces Σ et Δ sont donc *asymptotes* l'une à l'autre ; et ainsi se trouve démontré, savoir : que le cône Δ touche la surface Σ, suivant un *parallèle* ou cercle d'un rayon infini, ce cercle étant situé à l'infini et ayant son centre situé à l'infini sur l'axe A.

Ainsi l'on peut énoncer ce qui suit :

Tout plan tangent Θ *au cône asymptote* Δ *suivant une génératrice droite* L, *passe par le centre* o *du cercle de gorge* C *de l'hyperboloïde* Σ *et coupe cette surface* Σ *suivant deux génératrices droites de systèmes différents et parallèles entre elles et à la droite* L.

Des sections planes de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution.

433. Démontrons maintenant que tout plan, quelle que soit sa direction, coupe l'hyperbole Σ à une nappe et de révolution suivant une *section conique*.

Coupons la surface Σ et son cône asymptote Δ par un plan quelconque X, ce plan coupera le cône Δ suivant une section conique E (puisque ce cône est de révolution) et il coupera la surface Σ suivant une courbe E_1 qui enveloppera évidemment la courbe E, puisque le cône Δ est enveloppé par la surface Σ.

Cela posé :

Prenons un point quelconque x sur la section conique E et menons par ce point un plan Θ tangent au cône Δ suivant une génératrice droite L, ce plan Θ passera par le centre o du cercle de gorge C et coupera l'hyperboloïde Σ suivant deux génératrices droites de systèmes différents K et G parallèles entre elles, et la droite L sera équidistante de ces deux droites G et K.

Le plan Θ coupera le plan X suivant une droite θ tangente en x à la section conique E, et cette droite θ coupera la courbe E_1 en des points g et k qui ne seront évidemment autres que ceux en lesquels les droites G et K coupent la courbe E_1.

Or comme la droite L est équidistante des droites K et G, et qu'elle est située avec elles dans le plan Θ, il s'ensuit que ce point x est le milieu de la corde $\overline{gk}$.

En vertu de ce qui a été dit (n° 342 *bis*) la courbe E_1 n'est donc autre qu'une *section conique*, et les deux courbes E et E_1 sont dès lors deux sections coniques concentriques, semblables et semblablement placées.

Ainsi l'on peut énoncer ce qui suit :

Tout plan, quelle que soit sa direction coupe l'hyperboloïde à une nappe et de révolution suivant une section conique, qui sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole,

suivant que ce plan coupera le cône asymptote suivant une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

434. Démontrons maintenant que tout plan méridien M coupe l'hyberboloïde à une nappe et de révolution Σ suivant une hyperbole ayant pour asymptotes les droites suivant lesquelles ce plan M coupe le cône asymptote de la surface Σ.

Menons par l'axe de rotation A un plan méridien M, ce plan coupera le cône asymptote et de révolution Δ suivant deux génératrices droites L et L_1 qui se croiseront au point o sommet du cône Δ et centre du cercle de gorge C de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ.

Ce plan M coupera la surface Σ suivant une courbe E évidemment composée de deux branches infinies, symétriques : 1° par rapport à l'axe A, et 2° par rapport à la droite V suivant laquelle le plan M coupe le plan du cercle de gorge C; cette droite V passe par le centre o du cercle C.

Les points v et v' en lesquels le cercle C est coupé par la droite V seront les sommets de la courbe E, car la droite V coupera en deux parties égales les cordes de la courbe E qui sont parallèles à l'axe A.

Cela posé :

Prenons sur la courbe E un point quelconque x et menons par ce point x et dans le plan M une suite de droites divergentes Z, Z', Z'', etc.

La droite Z coupera la courbe E aux points			x et y
— Z'	—		x et y'
— Z''	—		x et y''
— etc.,	—		etc.,
La droite Z coupera les droites L et L_1 aux points			l et l_1
— Z'	—	—	l' et l'_1
— Z''	—	—	l'' et l''_1
— etc.,	—	—	etc.

Si nous démontrons que l'on a :

$$\overline{xl}=\overline{yl_1},\ \overline{xl'}=\overline{y'l'_1},\ \overline{xl''}=\overline{y''l''_1},\ \text{etc.}$$

en vertu de ce qui a été dit (n° 235, 4°) il sera démontré que la courbe E est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites L et L_1.

Or : menons par les droites Z, Z', Z'', etc., des plans U, U', U'', etc., perpendiculaires au plan M.

Le plan U coupera le cône Δ suivant une section conique 6_1 et l'hyperboloïde Σ suivant une section conique 6; les courbes 6 et 6_1 sont concentriques, semblables et semblablement placées, donc en vertu de ce qui a été dit (n° 342 *bis*),

l'on a $\overline{xl}=\overline{yl_1}$; le plan U' coupera le cône Δ suivant une section conique $\mathfrak{G}_1'$ et l'hyperboloïde Σ suivant une section conique $\mathfrak{G}'$ concentrique, semblable et semblablement placée par rapport à $\mathfrak{G}_1'$; on a donc :

$$\overline{xl'}=\overline{yl'_1}.$$

Et ainsi de suite : donc, etc.

On peut donc énoncer ce qui suit :

Un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ *peut être engendré par un hyperbole* E *tournant autour de son axe non transverse* A, *les asymptotes* L *et* L_1 *de l'hyperbole* E *engendrent le cône* Δ *asymptote de la surface* Σ.

Construction des projections de la section faite par un plan dans l'hyperboloïde à une nappe et de révolution.

135. Construisons maintenant les divers points de la courbe de section d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ par un plan P.

Un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ est connu, c'est-à-dire complétement déterminé, lorsque l'on connaît 1° la longueur N de la plus courte distance existant entre l'axe A de rotation et la génératrice droite G qui par son mouvement de rotation autour de l'axe A engendre la surface Σ, et 2° l'angle α que font entre elles les droites A et G.

Nous pourrons donc prendre le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe A et le plan vertical de projection parallèle à la droite G.

Dès lors l'axe A se projettera horizontalement en le point A^h, et la génératrice G se projettera horizontalement en la droite G^h parallèle à la ligne de terre et à une distance du point A^h telle que la perpendiculaire abaissée du point A^h sur la droite G^h sera égale à N; de plus la droite G se projettera verticalement en la droite G^v faisant avec la ligne de terre un angle $\mathfrak{G}$ complémentaire de l'angle donné α (*fig.* 252).

Cela posé :

On peut construire un point de la courbe E intersection de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ par un plan P, en se servant de quatre méthodes différentes que nous allons exposer successivement.

Première méthode. On peut regarder la surface Σ comme une surface de *révolution*. Dès lors coupant le système par un plan horizontal X (*fig.* 252) ce plan X coupera la génératrice G en un point *x* qui décrira un *parallèle* D de la surface Σ, ce plan X coupera le plan P suivant une droite I perpendiculaire au plan vertical de projection; le cercle D et la droite I étant contenus dans un même plan X, leurs

projections I^h et D^h, I^v et D^v se couperont respectivement en deux points y^h, y^v et y'^h, y'^v qui seront les projections des points y et y' en lesquels les *lignes* I et D se coupent dans l'espace (*fig.* 252).

Deuxième méthode. On peut regarder la surface Σ comme étant une surface *réglée*. Dès lors on construira les projections horizontales et verticales G^h, G^v et G'^h, G'^v et G''^h, G''^v, etc., des diverses génératrices droites G, G′, G″, etc., de la surface Σ, et l'on déterminera les projections y^h, y^v et y'^h, y'^v et y''^h, y''^v, etc., des points y, y', y'', etc., en lesquels les diverses droites G, G′, G″, etc., percent respectivement le plan sécant P.

Troisième méthode. Le plan P coupant l'hyperboloïde Σ et son cône asymptote Δ suivant des courbes E et E_1 concentriques, semblables et semblablement placées, les projections E^h et E_1^h, E^v et E_1^v seront aussi des sections coniques, concentriques, semblables et semblablement placées.

Ayant donc construit les projections E_1^h et E_1^v de la section E_1 du cône Δ par le plan P, il nous suffira de connaître les projections d'un point y de la courbe E pour construire ses divers points, ou, en d'autres termes, pour construire les divers points de ses projections E^h et E^v.

Quatrième méthode. On pourra, par le point z en lequel le plan sécant P coupe l'axe A, mener une série de droites B, B′, B″, etc., toutes situées dans le plan P, et chercher les projections des points en lesquels chacune de ces droites B, B′, B″, etc., perce la surface Σ. Le problème est donc ramené au suivant.

Étant donnés un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ *et une droite* B *s'appuyant sur son axe* A, *construire les projections du point* y *en lequel la droite* B *perce la surface* Σ.

Ce problème n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général et qui s'énonce ainsi :

Trouver les projections du point ou des deux points en lesquels une droite B *de direction arbitraire perce un hyperboloïde à une nappe et de révolution.*

La droite B peut affecter trois positions par rapport à l'axe de révolution A de la surface Σ.

1° La droite B peut couper l'axe A.

2° La droite B peut être parallèle à l'axe A.

3° La droite B peut n'être pas située dans un même plan avec l'axe A.

De l'intersection d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution par une droite.

436. Nous allons résoudre le problème, dans chacun des trois cas énoncés ci-dessus, et la solution du premier cas nous donnera la solution du problème

proposé précédemment, savoir : *Trouver les projections de la courbe* E *section d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution* Σ *par un plan* P.

PREMIER CAS. *La droite* B *coupant l'axe* A.

Lorsque deux surfaces de révolution ont même axe de rotation A, si elles se coupent, elles ne peuvent se couper que suivant des cercles (des *parallèles*) engendrés par le mouvement de rotation autour de l'axe commun A des points en lesquels se coupent leurs courbes méridiennes situées dans un même plan méridien. Si donc on fait tourner une droite B coupant l'axe A en un point z, cette droite B engendrera un cône Σ_1 ayant le point z pour sommet et la droite A pour axe de révolution.

Les deux surfaces *conique* Σ_1 et *hyperboloïde à une nappe* Σ se couperont donc (si elles se coupent) suivant des *parallèles* ou, en d'autres termes, suivant des cercles dont les plans seront perpendiculaires à l'axe A.

Désignant par δ un de ces *parallèles*, on voit que ce parallèle δ sera complétement connu si l'on connaît un de ses points, puisque son centre doit être sur l'axe A et que son plan est perpendiculaire à cet axe A.

Il nous suffira donc, pour connaître complétement les *parallèles* δ..... suivant lesquels les deux surfaces Σ et Σ_1 se coupent, de déterminer un point de chacun d'eux.

Cela posé :

On peut déterminer un point d'un des *parallèles* δ suivant lesquels le *cône* Σ_1 et *l'hyperboloïde* Σ se coupent, ou 1° en cherchant l'*intersection* d'une des génératrices droites du cône Σ_1 avec la surface Σ, ou 2° en cherchant l'*intersection* d'une des génératrices droites de l'hyperboloïde Σ avec le cône Σ_1.

Jusqu'à présent nous ne savons pas trouver les points de rencontre d'une droite coupant l'axe A avec un hyperboloïde à une nappe ayant cet axe A pour axe de révolution, car c'est précisément le problème à résoudre.

Mais nous savons (n° 351) trouver les points de rencontre d'une droite, quelle que soit sa position dans l'espace, avec un cône.

C'est donc en ramenant le problème proposé, savoir : *Trouver les points de rencontre d'une droite* B *coupant l'axe* A *avec l'hyperboloïde à une nappe* Σ au problème : *Trouver les points de rencontre d'une génératrice droite* G *d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution* Σ *avec le cône* Σ_1 *engendré par une droite* B *coupant l'axe* A *au point* z *et tournant autour de cet axe* A, que nous pourrons résoudre avec facilité le problème proposé.

Et pour le résoudre, nous n'aurons qu'à faire passer par le sommet z du cône Σ_1 et la génératrice G de l'hyperboloïde Σ un plan Q ; ce plan Q coupera le cône Σ_1 suivant deux génératrices droites B_1 et B_2, lesquelles couperont la droite G en

deux points b_1 et b_2, et ces points engendreront par leur rotation autour de l'axe A deux *parallèles* δ_1 et δ_2, lesquels couperont la droite B en deux points y et y' qui seront ceux en lesquels cette droite B perce l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ.

Deuxième cas. *La droite* B *étant parallèle à l'axe* A.

La droite B étant parallèle à l'axe A engendre par son mouvement de rotation autour de cet axe A un cylindre de révolution Σ_2; on aura donc à construire les points en lesquels la génératrice droite G de l'hyperboloïde Σ perce ce cylindre Σ_2 (n° 351).

Troisième cas. *La droite* B *n'étant pas située dans un même plan avec l'axe* A.

Si l'on fait tourner la droite B autour de l'axe A, elle engendrera un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ_3, et dès lors on aura à chercher les points de rencontre de la génératrice droite G de l'hyperboloïde Σ avec l'hyperboloïde Σ_3 ou bien on aura à chercher les points de rencontre de la génératrice droite B de l'hyperboloïde Σ_3 avec l'hyperboloïde Σ.

Le problème à résoudre est donc, dans ce troisième cas, toujours le même.

Cependant par un *artifice* particulier, on peut ramener le problème proposé à celui où il s'agit de trouver l'intersection d'une droite et d'un cône de révolution.

Et en effet : si par la droite B nous faisons passer un plan Q coupant l'hyperboloïde Σ et son cône asymptote Δ suivant deux sections coniques E et E_1, les points y et y' en lesquels la courbe E sera coupée par la droite B seront ceux en lesquels cette droite B perce la surface hyperboloïde Σ.

Or, nous pouvons toujours par l'axe A mener un plan méridien M parallèle à la droite B; ce plan M coupera le cône Δ suivant deux génératrices droites L et L', et à la manière d'être de la trace V^q du plan Q par rapport aux droites L et L' (en prenant le plan M pour plan vertical de projection), on reconnaîtra (n° 284) si le plan Q coupe le cône Δ suivant une *ellipse* ou une *parabole* ou une *hyperbole;* on saura donc quelle espèce de section conique on a pour E et E_1.

Cela posé :

Imaginons la droite B et les sections coniques E et E_1 concentriques, semblables et semblablement placées; cette droite B coupe la courbe E aux points y et y'; joignons chacun de ces points y et y' avec le centre o commun aux deux courbes E et E_1, on aura deux droites qui couperont E_1 aux points y_1 et y'_1; unissons ces points y_1 et y_1' par une droite B_1, il est évident que les droites B et B_1 seront parallèles.

Si donc nous pouvons facilement déterminer un point de B_1, il suffira de mener par ce point une droite parallèle à B pour avoir B_1; par suite il sera facile de construire directement (sans avoir besoin de construire la courbe E_1) les points y_1 et

y'_1 en lesquels B_1 perce le cône Δ; puis, comme il est facile de déterminer le centre o de la courbe E_1 sans construire cette courbe, il suffira de mener les droites oy_1 et oy_1' qui viendront rencontrer la droite B aux points cherchés y et y'.

Or, il est très-facile de se procurer un point de la droite B_1; et en effet, ayant construit le centre o de la courbe E (point o qui est au milieu de la portion de V^v comprise entre les droites L et L′), on pourra construire un point m de la courbe E, section de l'hyperboloïde Σ par le plan Q, puis chercher le point m_1 en lequel la droite om perce le cône Δ.

Et le rapport entre les rayons vecteurs homologues des courbes semblables et semblablement placées E et E_1 sera connu, car il sera égal à $\frac{om}{om_1}=a$.

Si donc on prend sur la droite B un point arbitraire p, et que l'on joigne les points p et o par une droite, on pourra toujours sur op prendre un point p_1 compris entre o et p, et tel que l'on ait $\frac{op}{op_1}=a$.

Menant par le point p_1 une droite parallèle à B, on aura B_1.

437. Cependant la solution précédente pourrait offrir quelques difficultés, dans le cas où les courbes E et E_1 seraient deux hyperboles concentriques, mais inversement semblables; c'est pourquoi on cherchera à diriger d'abord le plan Q (mené par la droite B) de manière à avoir pour les sections E et E_1 deux courbes semblables et semblablement placées, ce que l'on pourra toujours faire quelle que soit la position de la droite B par rapport à l'hyperboloïde Σ, et l'on prendra le plan M perpendiculaire à ce plan Q, dès lors le plan M ne sera plus parallèle à la droite B.

Toutefois, si le plan Q passant par la droite B était dirigé par rapport à l'hyperboloïde Σ de telle manière que les courbes E et E_1 fussent deux hyperboles concentriques et inversement semblables, voyons si dans ce cas la solution précédente ne peut pas encore être employée, au moyen de certaines modifications.

Mais avant de résoudre cette question, examinons les sections *hyperboliques* que l'on peut obtenir dans un hyperboloïde à une nappe et de révolution en le coupant par un plan.

Des hyperboles obtenues en coupant un hyperboloïde à une nappe et de révolution par des plans parallèles.

438. Si l'on mène par le centre o (ou par le sommet o du cône asymptote Δ) d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ un plan P coupant le cône Δ suivant deux génératrices droites L et L′, on sait que si l'on mène un plan T

tangent au cône Δ suivant la droite L, il coupera l'hyperboloïde Σ suivant deux génératrices droites G et K de *systèmes différents* qui sont parallèles entre elles et à la droite L.

On aura de même deux génératrices droites de *systèmes différents* G′ et K′ de l'hyperboloïde Σ en menant un plan T′ tangent au cône Δ suivant la droite L′.

Les droites G et K, G′ et K′ se couperont en des points p et p' qui seront sur une droite Y passant par le centre o de la surface Σ. Nous savons encore que le plan Θ tangent en p à la surface Σ sera parallèle au plan Θ′ tangent en p' à la même surface Σ et les plans Θ et Θ′ seront parallèles entre eux et au plan P.

Cela posé :

Tout plan P′ parallèle au plan P coupera le cône Δ suivant un hyperbole E_1 et l'hyperboloïde Σ suivant une hyperbole E qui auront même centre situé au point o' en lequel le plan P′ coupe la droite Y ou (p, p'), et dont les asymptotes Z et Z′ seront respectivement parallèles, la première aux droites G, K et L, et la seconde aux droites G′, K′ et L′, car elles seront les intersections des plans T et T′ par le plan P′.

Cela posé :

Il pourra arriver 1° que les courbes E et E_1 soient situées dans les mêmes angles opposés par le sommet et formés par les droites Z et Z′, et alors ces courbes seront concentriques, semblables et semblablement placées, et c'est ce qui aura lieu toutes les fois que le plan sécant P′ sera situé entre les plans Θ et Θ′; ils pourra arriver 2° que les courbes E et E_1 soient situées dans les angles adjacents formés par les droites Z et Z′, et alors ces courbes seront concentriques et inversement semblables, et c'est ce qui arrivera toutes les fois que le plan sécant P′ sera situé au delà de l'un ou de l'autre des plans Θ et Θ′, et cela par rapport au centre o de la surface Σ.

439. Lorsque les hyperboles E et E_1 sont placés comme l'indique la *fig.* 255, les points homologues sont ceux en lesquels ces courbes sont coupées l'une et l'autre par une droite menée par leur centre commun.

440. Mais lorsque les hyperboles E et E_1 sont placées comme l'indique la *fig.* 256, comment doit-on construire leurs points homologues?

Menons (*fig.* 256) une droite quelconque mais parallèle à l'asymptote Z′ et coupant l'asymptote Z au point r', la courbe E au point m' et la courbe E_1 au point m_1', les points m' et m'_1 seront dits *points homologues*.

Menons une seconde droite parallèle à Z′ et coupant Z au point r, la courbe E au point m et la courbe E_1 au point m_1, en vertu de ce qui a été dit (nº 327) nous aurons :

$$m'r' \times or' = mr \times or$$

et

$$m'_1r' \times or' = m_1r \times or$$

d'où

$$\frac{m'r'}{mr} = \frac{m_1'r'}{m_1r} = b$$

On sait que si l'on unit les points m et m', m_1 et m_1' par des cordes, ces cordes prolongées iront se couper en un point i situé sur l'asymptote Z, et si l'on mène les tangentes θ en m' à la coube E et θ_1 en m'_1 à la courbe E_1, ces tangentes θ et θ_1 iront se couper en un point i' situé sur l'asymptote Z.

Maintenant joignons le centre o avec les *points homologues* m' et m'_1, la parallèle mm_1 à Z' coupera la droite B ou (o, m') au point x, et la droite B_1 ou (o, m'_1) au point x_1 et je dis que l'on aura :

$$\frac{xr}{x_1r} = b$$

Et cela est évident puisque l'on a : $\dfrac{m'r'}{m'_1r'} = b$ et que les droites mm_1 et $m'm'_1$ sont parallèles.

Cela posé ;

441. Étant donné un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ et son cône asymptote Δ et une droite B, si pour déterminer les points m' et m'' en lesquels la droite B perce la surface Σ, on obtient (par le plan Q passant par cette droite B) pour sections 1° dans la surface Σ un hyperbole E et 2° dans le cône Δ une hyperbole E_1, ces hyperboles étant telles qu'elles soient inversement semblables, on devra opérer de la manière suivante pour obtenir les points m' et m''.

On déterminera les asymptotes Z et Z' des courbes E et E_1; on construira un point quelconque m de la section E faite dans l'hyperboloïde Σ par le plan Q; par le point m on mènera une droite R parallèle à l'asymptote Z' et l'on cherchera le point m_1 en lequel cette droite R perce le cône Δ; ce point m_1 étant déterminé, on remarquera que la droite R coupe l'asymptote Z en un point r et la droite B en un point x, on déterminera sur la droite R ou (m, m_1) un point x_1 satisfaisant à la proportion :

$$mr : m_1r :: rx : rx_1$$

On unira le centre o des hyperboles E et E_1 avec le point x_1 et l'on aura une droite B_1 située dans le plan sécant Q; on déterminera le point m'_1 en lequel le cône Δ est percé par la droite B_1; ce point m'_1 étant déterminé, on fera passer par m'_1 une droite R' parallèle à Z' et R' coupera la droite B en un point m' qui sera celui en lequel cette droite B perce l'hyperboloïde Σ.

La droite B_1 coupera toujours le cône Δ en deux points m'_1 et m''_1 puisque si l'hyperbole E était construite, il est évident que la droite B_1 en vertu de ce qu'elle passe par le centre o de l'hyperbole E_1 couperait cette courbe en deux points.

Chacun des points m'_1 et m''_1 servira donc à déterminer sur la droite B un point, et ainsi on obtiendra sur B les deux points m' *homologue* de m'_1 et m'' *homologue* de m''_1.

442. Le problème : *trouver les points en lesquels une droite* B *perce un hyperboloïde à une nappe et de révolution* Σ, *l'axe* A *de la surface* Σ *et la droite* B *n'étant pas situés dans un même plan*, peut être facilement ramené à la solution du problème : *trouver les points en lesquels une droite* B' *perce un hyperboloïde à une nappe et de révolution* Σ', *la droite* B *et l'axe* A' *de la surface* Σ' *étant dans un même plan.*

Et en effet :

Concevons un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ ayant son centre en un point o et ayant pour axe de révolution une droite A.

Menons par le centre o un plan P perpendiculaire à l'axe A, nous couperons la surface Σ suivant son cercle de gorge C, et si nous faisons passer par l'axe A un plan méridien M et que par le centre o nous menions une droite N perpendiculaire au plan M, cette droite N percera le cercle C en un point q; et si par le point q nous menons un plan T parallèle au plan M, ce plan T sera tangent au point q à la surface Σ et la coupera suivant deux génératrices droites G et K de *systèmes différents* et qui feront avec une droite Y (menée parallèlement à l'axe A par le point q) des angles égaux α l'un à droite et l'autre à gauche, en sorte que les deux droites G et K comprendront entre elles un angle égal à 2α.

Cela posé :

Si nous coupons la surface Σ par un plan Q parallèle au plan M (ce plan Q étant situé entre les plans T et M), ce plan Q coupera le plan P suivant une droite D qui coupera le cercle de gorge C en deux points d et d', et ce plan Q coupera la surface Σ suivant un hyperbole E ayant les points d et d' pour sommets, et ses asymptotes Z et Z' seront respectivement parallèles aux droites G et K.

Cela posé :

Si dans le plan P nous traçons une série de cercles C', C'', C''', etc., coupant le cercle C aux points d et d' et ayant dès lors leurs centres o', o'', o''', etc., situés sur la droite N ou (o, q) et si par ces centres nous menons les droites A', A'', A''', etc., parallèle à l'axe A et si par les points q', q'', q''', etc., en lesquels ces cercles sont coupés par la droite N, nous menons les droites G' et K', G'' et K'', G''' et K''', etc., respectivement parallèles aux droites G et K, les droites G', G'', G''', etc., ou K', K'', K''', etc., en tournant respectivement autour des axes A', A'',

A''', etc., engendreront une suite d'hyperboloïdes à une nappe et de révolution Σ', Σ'', Σ''', etc., qui s'entre-couperont tous suivant l'hyperbole E.

Cela posé :

Si l'on a une droite B située dans le plan Q, cette droite percera l'hyperboloïde Σ en deux points y et y_1 situés sur l'hyperbole E (si la droite B était parallèle à l'une des asymptotes de la courbe E, elle ne percerait évidemment la surface Σ qu'en un seul point).

Par conséquent la droite B percera les divers hyperboloïdes Σ', Σ'', Σ''', etc., aux mêmes points y et y_1.

Si donc on prend parmi les hyperboloïdes Σ', Σ'', Σ''', etc., celui Σ' dont le cercle de gorge C' a la droite dd' pour diamètre, la droite B coupera l'axe A' de cet hyperboloïde Σ'; et en déterminant les points y et y_1 en lesquels la droite B perce cette surface Σ' on aura les points en lesquels elle perce la surface Σ.

Mais il faut remarquer, que le plan Q peut être en dehors du plan T par rapport au plan M, et que dès lors l'hyperbole E n'aurait pas ses sommets situés sur le cercle de gorge C puisque la droite D, suivant laquelle le plan P serait coupé (dans ce cas) par le plan Q, serait extérieur à ce cercle C.

443. Si ce qui vient d'être dit ci-dessus arrivait, nous ferons remarquer que pour obtenir la solution du problème, il sera toujours facile de mener par l'axe A un plan P_1 perpendiculaire au plan Q et le coupant suivant une droite D_1; on pourra facilement déterminer les points d_1 et d'_1 en lesquels la droite D_1 parallèle à l'axe A perce l'hyperboloïde Σ; ces points d_1 et d_1' seront les sommets de l'hyperbole E_1 suivant laquelle la surface Σ est coupée par le plan Q.

Dès lors décrivons dans le plan P_1 et sur la droite $d_1d'_1$ comme diamètre un cercle C_1, ce cercle aura son centre o_1 sur la droite N intersection des plans P et P_1; cette droite N percera le cercle C_1 aux points q_1 et q_2, et nous pourrons par le point q_1 mener une droite G_1 parallèle à G; la droite G_1 fera avec la droite D intersection des plans P et Q des angles complémentaires de ceux qu'elle fait avec la droite A, puisque les deux droites A et D sont rectangulaires entre elles.

En faisant tourner la droite G_1 autour de la droite D, prise pour axe de rotation, elle engendrera un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ'_1 qui coupera l'hyperboloïde Σ suivant l'hyperbole E_1; dès lors la droite B située dans le plan Q percera les deux hyperboloïdes Σ et Σ' en deux points y' et y'_1 qui seront situés sur la courbe E et nous aurons ainsi ramené le problème au cas simple où la droite B coupe l'axe de révolution D de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ'_1.

Reconnaître si l'hyperboloïde donné par trois droites directrices sera ou non de révolution.

444. Prenons un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ, ayant une droite

A pour axe de révolution. Sur cette surface Σ prenons une génératrice G du *premier système* et sur cette droite G une suite de points m, m', m'', m''', etc. Imaginons les génératrices droites du *second système* K passant par m

K'	—	m'
K''	—	m''
etc.,	—	etc.

les droites G et K font entre elles un angle aigu α et un angle obtus β, et l'on a : $(\alpha + \beta = 190°)$.

Si nous menons les plans T, T', T'', etc., tangents à la surface Σ aux points m, m', m'', etc., et si nous menons par chacun des points m, m', m'', etc., deux plans S et S_1, S' et S'_1, S'' et S''_1, etc., perpendiculaires aux plans T, T', T'', etc., et tels que les plans S divisent en deux parties égales les angles α que font entre elles la droite G et les droites K, et que les plans S_1 divisent en deux parties égales les angles β que font entre elles la droite G et les droites K, les plans S passeront tous par l'axe A et les plans S_1 se couperont deux à deux suivant des droites qui formeront une surface développable ξ.

445. Si donc on donne trois droites K, K', K'' dans l'espace, et si l'on construit une droite G s'appuyant sur ces trois droites et les coupant respectivement aux points m, m', m'', il faudra, pour que ces trois droites K, K', K'', appartiennent à un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ, que la série des plans S, ou la série des plans S_1 se coupent tous suivant une même droite A qui sera l'axe de la surface Σ.

En sorte que si nous désignons par J les droites d'intersection des plans T par les plans bissecteurs S des angles α et par J_1 les droites d'intersection des mêmes plans T par les plans S_1 bissecteurs des angles β, toutes les droites J s'appuieront sur l'axe A, et toutes les droites J_1 seront parallèles à un plan Q perpendiculaire à l'axe A, ou *vice versâ*.

Transformation de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution en un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

446. Imaginons un hyperboloïde Σ à une nappe et de révolution. Désignons par A son axe, par C son cercle de gorge et par G et K ses génératrices droites de *systèmes différents*.

Menons par l'axe A un plan méridien M et supposons deux génératrices droites G et K parallèles au plan M et se coupant dès lors en un point p situé sur le cercle de gorge C; le plan (G, K) sera perpendiculaire au plan du cercle C et le coupera suivant une droite θ tangente en p à ce cercle C.

Nous pourrons transformer l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ en un hyperboloïde à une nappe et non de révolution Σ_1 de diverses manières et en employant toujours le mode de *transformation cylindrique*; et en effet, coupons tout le système par une suite de plans X, X', X'', etc., perpendiculaires à l'axe A.

Chaque plan X coupera l'axe en un point q, la droite G en un point m, la droite K en un point n, la surface Σ suivant un cercle D ayant le point q pour centre et son rayon étant égal à $\overline{qm}$ ou à $\overline{qn}$, car on a : $qm = qn$, le plan M suivant une droite B.

Cela posé :

447. *Première transformation.* Par un point quelconque x du cercle D menons une perpendiculaire N au plan M, cette droite N coupera la droite B en un point b.

Prenons un point x_1 sur N tel que l'on ait $\frac{xb}{x_1b} = \text{constante} = a_1$.

Tous les points x_1 seront sur une ellipse D_1 ayant le diamètre du cercle D situé sur le plan M pour l'un de ses axes; et cet axe sera le petit axe de l'ellipse D_1 si l'on a : $a_1 < 1$ et il sera le grand axe de l'ellipse D_1 si l'on a : $a_1 > 1$.

Toutes les ellipses D_1 situées respectivement dans les divers plans X, X'..... formeront une surface Σ_1 qui sera la *transformée cylindrique* de la surface Σ.

Je dis que la surface Σ_1 sera un hyperboloïde à une nappe et non de révolution, et qu'ainsi elle sera une surface doublement réglée, et en effet :

Si l'on avait pris le point m de la droite G et abaissé de ce point m une perpendiculaire B_1 sur le plan M, cette droite B_1 aurait percé le plan M au point b_1; et prenant sur B_1 un point m_1 tel que l'on ait $\frac{b_1m}{b_1m_1} = a_1$, le point m_1 serait situé sur l'ellipse D_1.

Dès lors on voit que toutes les droites G, comme toutes les droites K, seront transformées en des droites G_1 et en des droites K_1 situées sur la surface Σ_1.

Le cône asymptote Δ de la surface de révolution Σ sera transformé en un cône non de révolution Δ_1 ayant la droite A pour *axe*, et ce cône Δ_1 sera asymptote de la surface Σ_1 tout comme le cône de révolution Δ l'était de la surface Σ.

Et par le mode de transformation cylindrique employé, il est évident que le plan (G, K) perpendiculaire au plan du cercle C sera transformé en un plan (G_1, K_1) aussi perpendiculaire au plan du cercle C, et que le cercle de gorge C sera transformé en une ellipse de gorge C_1; et que la tangente θ au cercle C et au point p sera transformée en une droite θ_1 tangente à l'ellipse C_1 au point p_1, le point p_1 étant le *transformé* du point p.

448. *Deuxième transformation.* Par chacune des droites B, B', B'', etc., menons

des plans X_1, X'_1, X''_1, etc., parallèles entre eux, les plans X et X_1, X' et X'_1,... comprenant entre eux un angle constant mais arbitraire θ.

Cela fait :

Par un point quelconque x du cercle D menons une perpendiculaire N au plan M, cette droite N percera la droite B au point b et sera située dans le plan X; menons par le point b dans le plan X_1 une droite N_1 perpendiculaire à la droite B et prenons sur N_1 un point x_1 tel que l'on ait

$$\frac{bx_1}{bx} = \text{constante} = a_2$$

Tous les cercles D..... seront transformés en des ellipses D_2..... qui formeront une surface Σ_2 qui sera doublement réglée comme la surface Σ.

449. *Troisième transformation.* Par un point quelcónque x du cercle D ayant mené une droite N perpendiculaire à la droite B et la coupant en un point b, nous mènerons par ce point b une droite N_1 située dans le plan X (dans le plan du cercle D) et faisant avec N un angle arbitraire α, et nous prendrons sur N_1 un point x_1 tel que l'on ait :

$$\frac{bx_1}{bx} = \text{constante} = a_3$$

tous les points x_1 ainsi déterminés, formeront une surface Σ_3 doublement réglée comme la surface Σ.

450. *Quatrième transformation.* Par un point quelconque x du cercle D ayant mené une droite N perpendiculaire à la droite B et la coupant au point b, nous mènerons par ce point b une droite N_1 située dans le plan X_1 et faisant avec la droite B non un angle droit, mais un angle arbitraire γ, puis nous prendrons sur N_1 un point x_1 tel que l'on ait :

$$\frac{bx_1}{bx} = \text{constante} = a_4$$

tous les points x_1 formeront une surface Σ_4 qui sera doublement réglée comme la surface Σ.

Ainsi les quatre surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, en lesquelles on peut transformer par le mode de *transformation cylindrique*, l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ, sont elles-mêmes des hyperboloïdes à une nappe et non de révolution, jouissant des mêmes propriétés que la surface Σ, sauf les modifications que le mode de transformation peut et doit apporter à chacune de ces propriétés.

La transformation cylindrique d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution en un hyperboloïde à une nappe non de révolution conduit à la solution du problème : trouver

les points de rencontre d'une droite et d'un hyperboloïde à une nappe non de révolution.

451. Si l'on se donne sur le plan horizontal une ellipse E comme trace d'un hyperboloïde Σ_1 à une nappe et non de révolution, si par le centre o de cette ellipse E on élève une verticale A qui sera l'axe de la surface Σ_1, si l'on mène un plan horizontal X coupant l'axe A en un point o' et que sur ce plan X, on construise une ellipse E' ayant le point o' pour centre et qui soit semblable et semblablement placée à l'ellipse E, prenant cette ellipse E' pour l'ellipse de gorge de la surface Σ_1 et faisant mouvoir une droite G_1 sur E et E' et de telle manière que G_1^h soit tangente à E'^h, on aura les diverses génératrices droites de la surface Σ_1.

Cela posé :

Si l'on a une droite B_1 et que l'on demande de construire les points en lesquels elle perce la surface Σ_1, on pourra transformer la surface Σ_1 en un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ ayant pour cercle de gorge le cercle C décrit sur le petit axe de l'ellipse E' comme diamètre, et pour opérer cette transformation, désignons par D le petit axe de l'ellipse E', on abaissera d'un point m_1 de la courbe E' une perpendiculaire sur la droite D, laquelle coupera la droite B en un point b et le cercle C en un point m, on connaîtra donc le rapport

$$\frac{bm}{bm_1} = a$$

Cela fait, on prendra deux points g_1 et g'_1 sur l'une des génératrices droites G_1 de la surface Σ_1, on abaissera de ces points des perpendiculaires sur le plan M déterminé par l'axe A et la droite D, ces perpendiculaires perceront le plan M aux points p et p'; on prendra sur la droite pg_1 un point g et sur la droite $p'g'_1$ un point g', tels que l'on ait :

$$\frac{pg}{pg_1} = \frac{p'g'}{p'g'_1} = a$$

et les points g et g' détermineront la génératrice droite G de l'hyperboloïde Σ ayant la droite A pour axe de rotation et le cercle C pour cercle de gorge.

Nous transformerons de la même manière la droite B_1 en une droite B (en vertu de la transformation cylindrique, il ne faut pas oublier que les droites B et B_1 se couperont en un point qui sera *forcément* situé sur le plan M). Il suffira ensuite de construire, par l'une des méthodes exposées ci-dessus, les points x et y en lesquels la droite B perce l'hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ pour connaître les points x_1 et y_1 en lesquels la droite B_1 perce l'hyperboloïde à une nappe et non de révolution Σ_1.

Construction directe d'un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

452. On peut construire directement un hyperboloïde à une nappe et non de révolution, par divers modes différents parmi lesquels nous indiquerons les *cinq* suivants.

453. *Première construction.* Concevons trois plans équidistants P, P' et P'', et prenons l'un d'eux P' pour plan horizontal de projection. Menons une droite A perpendiculaire à ces trois plans et les coupant aux points o, o' et o''.

Traçons dans le plan intermédiaire P une ellipse E ayant le point o pour centre, et dans les plans P' et P'' traçons aussi des ellipses E' et E'' ayant respectivement pour centre les points o' et o'' et supposons que les deux ellipses E' et E'' sont identiques ou superposables (en sorte que ces ellipses E' et E'' se projetteront sur le plan horizontal de projection P' suivant une seule et même courbe) et que les trois ellipses E, E', E'' sont semblables et semblablement placées; de plus admettons que l'ellipse intermédiaire E est plus petite que l'ellipse E' ou E''.

Cela posé :

En un point quelconque m^h de E^h menons (*fig.* 257) une tangente θ à E^h, elle coupera l'ellipse E'^h ou E''^h en deux points; cette tangente θ pourra être regardée comme la projection horizontale de deux droites G et K s'appuyant sur les trois ellipses E, E', E'' et se croisant au point m de l'ellipse intermédiaire.

Et cela aura lieu parce que les ellipses E^h et E'^h ou E''^h étant concentriques et semblables, on a : $m^h p'^h = m^h q''^h$ ou $m^h p''^h = m^h q'^h$.

Ainsi la surface engendrée par une droite se mouvant dans l'espace en s'appuyant sur les trois ellipses E, E', E'', sera une surface doublement réglée, et évidemment un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

454. *Deuxième construction.* Concevons trois plans parallèles équidistants entre eux Q, Q', Q'', dont l'un Q soit intermédiaire; traçons sur le plan Q une hyperbole E, et sur les plans Q' et Q'' des hyperboles E' et E'', telles que ces courbes se projettent sur un plan vertical de projection parallèle aux plans Q, Q', Q'', suivant des hyperboles semblables, semblablement placées et concentriques; les deux hyperboles E' et E'' se projetteront en une seule hyperbole E'^v ou E''^v et l'hyperbole E se projettent en une hyperbole E^v extérieure à l'hyperbole E'^v ou E''^v.

Si par un point m^v de E^v nous menons à cette courbe une tangente θ (*fig.* 258), elle coupera l'hyperbole E'^v en deux points et cette droite θ pourra être considérée comme la projection verticale de deux droites G et K s'appuyant sur les trois courbes E, E', E'' et se croisant au point m, et cela aura lieu parce que les courbes

E^v et E''^v (ou E'''^v) sont deux hyperboles concentriques, semblables et semblablement placées, et que l'on a : $m^v p'^v = m^v q''^v$ ou $m^v p''^v = m^v q'^v$.

La surface engendrée par une droite se mouvant dans l'espace sur les trois hyperboles E, E′, E″ sera donc une surface doublement réglée, et sera évidemment un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

455. Concevons un plan T tangent au cône asymptote Δ d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ, ce plan coupera la surface Σ suivant deux génératrices droites G et K′ de *systèmes différents*, lesquelles seront parallèles entre elles. Désignons par g et k' les points en lesquels ces droites G et K′ coupent respectivement le cercle de gorge C de la surface Σ.

Cela posé, imaginons deux plans P et P′ équidistants du plan T et parallèles entre eux et à ce plan T, le plan P coupera l'hyperboloïde Σ suivant une parabole E et le plan P′ coupera aussi la surface Σ suivant une parabole E′, ces deux paraboles E et E′ seront égales, mais tournées en sens inverse, et leurs sommets seront situés sur l'hyperbole méridienne que l'on obtiendra en coupant la surface Σ par un plan M perpendiculaire aux trois plans P, T et P′.

Il est évident que le sommets e de la courbe E et e' de la courbe E′ seront en ligne droite avec le centre o du cercle de gorge C et que ces deux sommets e et e' seront équidistants du point o.

Cela posé :

Projetons sur le plan T pris pour plan horizontal de projection, les droites G et K′, et les courbes E et E′.

Nous aurons la *fig.* 259, en supposant un plan vertical de projection parallèle au plan méridien M, et nous pourrons déduire la construction suivante :

Troisième construction. Étant donc données les paraboles E et E′, les droites G et K′ comme l'indique la *fig.* 259, si l'on fait mouvoir une droite G_1 sur la droite K′ et les paraboles E et E′, on engendrera une surface réglée Σ_1 qui sera un hyperboloïde à une nappe et de révolution, et si l'on fait mouvoir une droite K sur la droite G et les deux paraboles E et E′, on engendrera la même surface Σ_1.

Pour déterminer les droites G_1 et K_1 qui passent par un point m de la parabole E, il est évident que l'on devra exécuter les constructions suivantes.

Par le point m^h arbitrairement pris sur E^h, on mènera une perpendiculaire N aux droites G et K′ coupant K′ au point r et G au point r'.

On prendra sur la droite N deux points p et p' tels que l'on ait : $m^h r = rp$ et $m^{h\prime} r' = r'p'$ et par ces points p et p' on mènera les droites A et A′ parallèles entre elles et aux droites G et K′.

La droite A coupera la courbe E'^h en un point m'^h et la droite A′ coupera la même courbe E'^h en un point $m'_1{}^h$, les droites $G_1{}^h$ unissant les points m^h et m'^h et

K_1^h unissant les points m^h et $m_1'^h$ seront les projections des droites G_1 et K_1 génératrices de *systèmes différents* de la surface hyperboloïde Σ et se croisant au point *m*.

La droite G_1 coupera la droite K′ en un point *n* et la droite K_1 coupera la droite G en un point *n*′, et il est évident que l'on doit avoir dans l'espace $nm = nm'$ et $n'm' = n'm_1'$, ce qui est bien le résultat obtenu par notre construction.

456. En combinant la première et la seconde construction exposées ci-dessus, on peut déduire la quatrième construction suivante :

Quatrième construction. Si ayant deux plans perpendiculaires entre eux P et Q et se coupant suivant une droite L on trace : 1° dans le plan Q une ellipse E ayant son centre en un point *o* de la droite L et l'un de ses axes dirigé suivant cette droite L, et 2° dans le plan P une hyperbole H ayant le même point *o* pour centre, son axe transverse étant dirigé suivant la droite L, et si de plus les deux courbes E et H se coupent en leurs sommets situés sur la droite L, en faisant mouvoir une droite G sur les courbes E et H de telle manière que la projection orthogonale de G sur le plan P soit tangente à H ou que la projection orthogonale de G sur le plan Q soit tangente à E, l'on engendrera, dans les deux cas, une seule et même surface gauche qui sera doublement réglée et qui ne sera autre qu'un hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

457. Et l'on peut généraliser cette proposition de la manière suivante.

On peut prendre les deux plans P et Q faisant entre eux un angle α, et l'on peut supposer que la droite L soit dirigée suivant un diamètre de l'ellipse E et un diamètre de l'hyperbole H; alors, désignant par *m* l'un des deux points en lesquels E et H se coupent, et par θ la tangente en *m* à E, et par δ la tangente en *m* à H, il faudra supposer la droite G projetée sur le plan P par des droites parallèles à θ et supposer aussi la droite G projetée sur le plan Q par des droites parallèles à δ.

458. On peut couper un hyperboloïde à une nappe et non de révolution Σ par un plan M passant (*fig.* 260) par l'axe A de cette surface, ce plan M coupera l'hyperboloïde Σ suivant une hyperbole E et le cône asymptote A suivant deux génératrices droites L et L′; concevons d'abord le plan T tangent au cône Δ tout le long de la génératrice L, ce plan coupera la surface Σ suivant deux génératrices droites G et K_1 de *systèmes différents* qui seront parallèles entre elles et à la droite L; concevons ensuite le plan T′ tangent au cône Δ tout le long de la génératrice L′, ce plan coupera la surface Σ suivant deux génératrices droites G_1 et K_1 de *systèmes différents* qui seront parallèles entre elles et à la droite L′.

Les droites G et K_1, G_1 et K se couperont respectivement en des points *g* et g_1

qui seront en ligne droite avec le centre o de la surface hyperboloïde Σ, ou en d'autres termes avec le sommet o du cône asymptote Δ.

Cela posé :

Cinquième construction. D'après ce qui précède, il est évident que si l'on fait mouvoir : 1° une droite G' sur l'hyperbole E et sur les droites K et K_1, ou 2° une droite K' sur l'hyperbole E et sur les droites G et G_1, on engendrera une même surface hyperboloïde Σ qui sera à une nappe et non de révolution.

Ce mode de génération de l'hyperboloïde à une nappe et non de révolution conduit à une propriété remarquable dont jouit cette surface.

Et en effet :

Si dans le plan T, on mène au point m de l'hyperbole E une tangente, elle coupera les droites L et L' aux points l et l' ; et si par ces points l et l', on mène des parallèles à la droite gg_1, elles couperont, l'une les droites G et K_1 aux points i et r_1 et l'autre les droites G_1 et K aux points i_1 et r ; et il est évident que l'on aura : $im = i_1m$ et $rm = r_1m$, puisque l'on a : $ml = ml'$ en vertu de la manière d'être d'une tangente à une hyperbole par rapport aux asymptotes de cette courbe, et aussi en vertu de ce que les droites L et L' sont équidistantes, la première des génératrices G et K_1 et la seconde des génératrices G_1 et K.

La droite ii_1 ne sera autre que la droite G' et la droite rr_1 ne sera autre que la droite K' dont nous avons parlé ci-dessus.

Cela posé :

Joignons les points g et i, g_1 et i_1 par des droites, nous formerons ainsi un tétraèdre igg_1i_1. Et je dis que quelle que soit la position du point m sur l'hyperbole E, tous les tétraèdres ainsi déterminés auront même volume.

Et en effet :

Si par le point m et dans le plan T de l'hyperbole E l'on mène mp parallèle à L' et mq parallèle à L, on aura :

$$op \times oq = \text{constante} = a$$

Or, il est évident que les trois points g, q et i_1, ainsi que les trois points g_1, p et i sont en ligne droite. On a donc, puisque $og = og_1$:

$$g_1i_1 = 2.\overline{oq} \qquad \text{et} \qquad gi = 2.\overline{op}$$

donc l'on a :

$$\overline{g_1i_1} \times \overline{gi} = \text{constante} = a \qquad (1)$$

Abaissons du point g une perpendiculaire sur G_1, cette droite $\overline{gb}$ sera constante,

quelle que soit la position du point i_1 sur la droite G_1. Désignons cette perpendiculaire par h.

Abaissons ensuite du point i une perpendiculaire xi sur le plan T′ qui contient la base gg_1i_1 du tétraèdre, il est évident que l'on aura : $\overline{gi}=\overline{xi}\times d$, d étant une quantité constante, quelle que soit la position du point i sur la droite G; désignons $\overline{xi}$ par H.

Nous pourrons multiplier les deux membres de l'équation (1) par la quantité constante h et remplacer $\overline{gi}$ par sa valeur sans changer l'équation, et l'on aura :

$$\overline{g_1i_1}\times h\times \mathrm{H}.d=a.h=\text{constante}.$$

Et désignant $\overline{g_1i_1}$ par b, on aura :

$$\frac{b.h.\mathrm{H}}{2.3}=\frac{a.h}{2.3.d}=\text{constante}.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé (*).

De la surface gauche engendrée par une droite se mouvant parallèlement à un plan, en s'appuyant sur deux droites non parallèles entre elles.

459. Concevons dans l'espace deux droites K′ et K″, non parallèles entre elles, et un plan P coupant ces droites aux points b et a (*fig.* 261).

Faisons mouvoir une droite G sur les deux droites K′ et K″, et parallèlement au plan P, cette droite G engendrera une surface gauche qui a reçu le nom de *paraboloïde hyperbolique*.

Imaginons trois positions G, G′, G″ de la droite G (l'une de ces positions G étant dans le plan P).

Cela posé :

Coupons tout le système par un plan Q parallèle aux droites *directrices* K′ et K″, ce plan Q coupera les trois droites G, G′, G″ en les points d, d', d'', et je dis que ces trois points sont en ligne droite, et je désignerai cette droite par K.

(*) Ci-après, chapitre XII, nous donnerons les diverses autres propriétés dont jouit l'*hyperboloïde à une nappe*. On peut engendrer plusieurs espèces de surfaces gauches en faisant mouvoir une droite sur deux droites données de position dans l'espace et parallèlement à un cône ayant pour directrice une section conique, ce cône étant aussi donné de position dans l'espace. *Voir* dans l'ouvrage qui a pour titre : *Complément de géométrie descriptive*, la note où cette question est examinée et que j'ai publiée pour la première fois dans le *Bulletin de la société philomathique*, séance du 26 mai, année 1838.

Et en effet :

Le plan Q coupe le plan P suivant la droite L.

Si nous menons par les droites K'' et K' des plans Q'' et Q' parallèles au plan Q, ils couperont le plan H suivant deux droites : L'' passant par le point a et parallèle à la droite L, et L' passant par le point b et aussi parallèle à la droite L.

Si nous menons par chacune des droites G'' et G' un plan passant, le premier par la droite $d''r''$ et le second par la droite $d'r'$ (et nous devons nous rappeler que les droites $d''r''$ et $d'r'$ sont perpendiculaires à la droite L), ces deux plans couperont respectivement le plan P suivant les droites G''^h et G'^h qui seront respectivement parallèles aux droites G'' et G', et le plan Q suivant les droites $d''r''$ ou G''^v et $d'r'$ ou G'^v qui seront, ainsi qu'il a été dit ci-dessus, perpendiculaires à L.

Cela posé :

Il est évident que l'on aura :

$$a''p'' = b''q'' = d''r'' \qquad \text{et} \qquad a'p' = b'q' = d'r'$$

de plus les trois droites G''^h, G'^h et G situées dans le plan P étant coupées par les trois droites parallèles entre elles L, L', L'', donneront :

$$p''a : p'a :: q''b : q'b :: r''d : r'd$$

Or, les triangles semblables $a''p''a$, $a'p'a$ et $b''q''b$, $b'q'b$ donnent :

$$a''p'' : a'p' :: p''a : p'a$$
$$b''q'' : b'q' :: q''b : q'b$$

Nous aurons donc :

$$d''r'' : d'r' :: r''d : rd$$

Ainsi les trois points d, d', d'' sont en effet sur une ligne droite K.

De ce qui précède on peut donc énoncer ce qui suit :

La surface engendrée par une droite G *s'appuyant sur deux droites non parallèles entre elles* K'' *et* K' *et se mouvant parallèlement à un plan* P, *lequel coupe les deux droites directrices* K'' *et* K', *est doublement réglée.*

Du plan tangent en un point d'un paraboloïde hyperbolique.

460. Dès lors si en un point m d'un paraboloïde hyperbolique Σ on veut construire le plan tangent T à cette surface Σ, il suffira de construire les deux génératrices droites de *systèmes différents* G et K se croisant en ce point m et le plan T sera déterminé par ces deux droites G et K.

461. Le plan P parallèle aux génératrices G du *premier système* et le plan Q parallèle aux génératrices K du *second système* sont dits *plans directeurs* du paraboloïde hyperbolique Σ.

Il est évident qu'en se donnant les *directrices* droites K″ et K′ d'un paraboloïde hyperbolique Σ on se donne *à posteriori* le plan *directeur* Q qui leur est parallèle; c'est pourquoi un paraboloïde hyperbolique Σ est complétement déterminé lorsque l'on se donne *à priori* le plan *directeur* P des génératrices G (à construire) et deux *directrices* droites K″ et K′, car alors on connaît les deux plans *directeurs*, et il est facile de conclure de ce qui précède, que :

La surface engendrée par une droite se mouvant sur trois droites devient un paraboloïde hyperbolique, si les trois droites directrices sont parallèles à un même plan.

En effet :

462. Nous savons que lorsque l'on fait mouvoir une droite G sur trois droites K, K′, K″ non parallèles à un même plan, la surface est un *hyperboloïde à une nappe*, mais si les trois droites directrices K, K′, K″ sont parallèles à un même plan Q, la surface engendrée sera un *paraboloïde hyperbolique.*

Et en effet :

Concevons deux positions G et G′ de la génératrice G, nous pourrons mener un plan P parallèle aux droites G et G′. Faisons mouvoir sur K et K′ une droite G parallèle au plan P, elle engendrera un paraboloïde hyperbolique qui sera coupé par tout plan parallèle à Q suivant des droites. Donc, etc.

Cette seconde manière d'engendrer un paraboloïde hyperbolique, et pour laquelle on ne connaît *à posteriori* qu'un des deux plans *directeurs*, est très-utile dans les *applications*.

Du sommet, de l'axe et des plans diamétraux principaux du paraboloïde hyperbolique.

463. Étant donnés deux directrices droites K et K′ (et par suite le plan *directeur* Q des génératrices du système K) et le plan *directeur* P auquel doivent être parallèles les génératrices du système G qui se meuvent sur les directrices K et K′, on pourra toujours construire une génératrice droite du *système* K perpendiculaire à la droite L, intersection des deux plans *directeurs* P et Q, et l'on pourra aussi toujours construire une génératrice droite du *système* G perpendiculaire à cette même droite L.

Et en effet :

Par un point *l* de la droite L menons dans le plan P une droite D perpendiculaire à L, par le même point *l* menons dans le plan Q une droite D′ perpendicu-

laire à L; cela fait, construisons une droite G_1 qui, s'appuyant sur K et K', soit parallèle à D, elle sera évidemment parallèle au plan P et elle sera dès lors une génératrice droite du *système* G du paraboloïde hyperbolique Σ.

Pour construire la droite G_1 il nous suffira de mener par K et K' deux plans Y et Y' respectivement parallèles à la droite D, ces plans se couperont suivant la droite G_1 demandée.

Par la même raison, si l'on a construit deux génératrices droites quelconques G et G' du paraboloïde Σ, ces génératrices s'appuyant sur K et K', il suffira de mener par G et G' deux plans X et X', respectivement parallèles à la droite D', et ces plans se couperont suivant la droite K_1 demandée.

Les deux droites G_1 et K_1 se coupent en un point *s*, c'est à ce point qu'on a donné le nom de *sommet* du paraboloïde hyperbolique, et la droite Z menée par le sommet *s* et parallèlement à la droite L, a reçu le nom d'*axe* du paraboloïde hyperbolique.

Si nous concevons un plan R perpendiculaire à la droite L, les génératrices K, K', K'', etc., se projetteront orthogonalement sur ce plan R, suivant des droites $K^{v\prime}$, $K'^{v\prime}$, $K''^{v\prime}$, etc., parallèles entre elles et à la droite D'; de même les génératrices G, G', G'', etc., se projetteront orthogonalement sur ce plan R, suivant des droites $G^{v\prime}$, $G'^{v\prime}$, $G''^{v\prime}$, etc., parallèles entre elles et à la droite D.

En sorte que les droites $K^{v\prime}$... et $G^{v\prime}$... déterminent sur le plan R une série de parallélogrammes.

Rien ne nous empêche de supposer que le plan R passe par les droites G_1 et K_1, dès lors ce plan sera un plan tangent à la surface paraboloïde Σ en son sommet *s*.

Cela posé :

Menons par l'axe Z deux plans M et M' lesquels divisent en deux parties égales, savoir : le plan M l'angle 6, que font entre elles les droites G_1 et K_1, et le plan M' l'angle supplémentaire de 6.

Ces deux plans seront perpendiculaires au plan R, parallèles à la droite L, et rectangulaires entre eux.

464. Cela posé, démontrons maintenant que la surface paraboloïde Σ est symétrique par rapport à chacun des deux plan M et M'.

Prenons le plan R pour plan vertical de projection (*fig.* 262), les droites G_1 et K_1 seront dans ce plan; l'axe Z sera perpendiculaire au plan R et passera par le point *s* qui est l'intersection des droites G_1 et K_1.

Prenons sur K_1 deux points *a* et *a'* équidistants du point *s*, on aura deux génératrices G et G' passant respectivement par *a* et *a'*, lesquelles seront parallèles à G et projetées en G^v et G'^v.

Prenons sur G_1 deux points b et b' équidistants du point s et tels que $sb = sa$, on aura deux génératrices K et K′ passant respectivement par b et b', lesquelles seront parallèles à K_1 et projetées en K^v et K'^v.

Les génératrices G et K se couperont en un point p,

—	G′ et K′	—	p',
—	K′ et G	—	q,
—	K′ et G′	—	q'.

Le point p' étant en avant du plan (G_1, K_1) ou R, le point q' sera derrière ce plan R.

Le point p étant aussi en avant du plan R, le point q sera derrière ce plan R; en sorte que les points p et p' étant placés en avant du plan R, les points q et q' seront tous les deux situés derrière ce plan R.

Or, comme on a pris $as = a's = sb = s'b$, il s'ensuit que les points p^v, p'^v et s sont sur une droite V^m, et que les points q'^v, q^v et s sont aussi sur une droite $V^{m'}$, ces droites V^m et $V^{m'}$ divisent en deux parties égales les angles que font entre elles les droites G_1 et K_1, puisque $asbp^v$, $asb'p'^v$, $a'sb'q^v$ et $a'sbq'^v$ sont des losanges. Et comme les points p^v, p'^v, q^v, q'^v sont les projections orthogonales sur le plan R des points p, p', q, q', il s'ensuit que les droites V^m et $V^{m'}$ sont les traces sur le plan R de deux plans M et M′ perpendiculaires au plan R et passant : le plan M par les points p et p', et le plan M′ par les points q et q', ces plans M et M′ étant de plus les plans bissecteurs des angles que font entre elles les droites G_1 et K_1.

Et comme $ap^v = sb = a'p'^v$, on a : $ap = a'p'$, dès lors $pp^v = p'p'^v$.

La droite pp', située dans le plan M, est donc parallèle à V^m ou au plan R; et dès lors la droite Z qui, passant par le point s, est perpendiculaire au plan R, coupera la droite pp' en un point o, et l'on aura $op = op'$, parce que l'on a $sp^v = sp'^v$.

On démontrerait de même que la droite qq', située dans le plan M′, est parallèle à $V^{m'}$ ou au plan R et qu'elle est coupée par l'axe Z en un point o', milieu de qq', et que le point o étant en avant du point R, le point o' sera derrière ce plan R, et que l'on aura :

$$os = o's$$

On voit donc que le plan M coupera le paraboloïde hyperbolique suivant une courbe γ composée d'une branche infinie et symétrique par rapport à la droite Z, puisque toutes les cordes pp'... perpendiculaires à Z seront coupées en leur milieu o... par cette droite Z.

De même le plan M′ coupera le paraboloïde hyperbolique suivant une courbe γ' composée d'une branche infinie et symétrique par rapport à la droite Z, et les

courbes γ et γ' seront inversement placées par rapport au plan R, l'une γ étant en avant de ce plan R, et l'autre γ' derrière ce plan R.

Cela posé :

On voit que si sur la droite K_1 on prend un point a arbitraire et sur la droite G_1 un point b', tels que chacun de ces points soit également distant du sommet s et ayant dès lors $sa = sb'$, les droites G (du *système* G) passant par le point a et K' (du *système* K) passant par le point b', se coupent sur le plan M'; on voit aussi, que si sur la droite G on prend un point arbitraire p_1 et sur la droite K' un point p'_1 tels que l'on ait : $ap_1 = b'p'_1$, la droite qui unira les points p_1 et p'_1 sera parallèle à la droite V^x et sera divisée en deux parties égales par le plan M' auquel elle sera perpendiculaire.

On peut donc énoncer ce qui suit :

Si l'on mène le plan tangent R *au sommet* s *d'un paraboloïde hyperbolique* Σ *et si l'on construit les plans* M *et* M' *bissecteurs des angles que font entre elles les génératrices* G_1 *et* K_1 *de systèmes différents se croisant au sommet* s, *ces plans* M *et* M' *diviseront en deux parties égales les cordes de la surface* Σ, *menées, les unes parallèlement aux plans* R *et* M' *et les autres parallèlement aux plans* R *et* M.

Ces deux plans M et M' sont dits *plans diamétraux principaux* du paraboloïde hyperbolique.

Et il est évident par ce qui précède que le paraboloïde hyperbolique est symétrique par rapport à chacun de ces plans M et M'.

465. Les droites G_1 et K_1 qui se croisent au sommet s du paraboloïde Σ comprennent entre elles un angle qui est égal à l'angle θ que font entre eux les deux *plans directeurs* P et Q de la surface Σ.

Si donc les plans *directeurs* P et Q sont rectangulaires entre eux, les droites G_1 et K_1 seront aussi rectangulaires entre elles et dans ce cas toutes les génératrices du *système* K couperont la génératrice droite G_1 sous l'angle droit et aussi toutes les génératrices du *système* G couperont la génératrice droite K_1 sous l'angle droit.

Lorsque les *plans directeurs* font entre eux un angle qui n'est pas droit, le paraboloïde est dit : *oblique*.

Lorsque les plans directeurs font entre eux un angle droit, le paraboloïde est dit : *droit* ou *rectangulaire*.

Des plans asymptotes du paraboloïde hyperbolique.

466. D'après la *génération* du paraboloïde hyperbolique on voit que toutes les génératrices du *système* K s'appuyant sur G_1 tendent à mesure qu'elles s'éloignent de K_1, à faire avec K_1 des angles approchant de plus en plus de l'angle droit, et

ce n'est que pour le point situé à l'infini sur l'une quelconque des génératrices du *système* G que la génératrice du *système* K passant par ce point situé à l'infini fait un angle droit avec K_1 ou en d'autres termes est parallèle à la droite L intersection des deux plans *directeurs* P et Q.

En sorte que si l'on mène par une génératrice droite G quelconque, un plan T parallèle au plan *directeur* P, ce plan T sera tangent au paraboloïde hyperbolique Σ pour le point situé à l'infini sur la droite G.

De même si l'on mène par une génératrice droite K quelconque un plan Θ parallèle au plan *directeur* Q, ce plan Θ sera tangent à la surface Σ pour le point situé à l'infini sur la droite K.

On peut donc dire que *tout plan parallèle à l'un des deux plans directeurs d'un paraboloïde hyperbolique coupe cette surface suivant une seule génératrice droite et qu'il est dès lors un plan asymptote de la surface.*

467. On sait que si l'on a une suite de droites G, G′, G″,.... coupées par deux plans parallèles Y et Y′ en les points g et g_1, g' et g'_1, g'' et g''_1,.... si on les coupe par un troisième plan Y″ parallèle aux plans Y et Y′ en les points g_2, g'_2, g''_2,.... on a :

$$gg_1 : g'g'_1 : g''g''_1 : \text{etc.} :: gg_2 : g'g'_2 : g''g''_2$$

en sorte que si le point g_2 est au milieu de la droite $\overline{gg_1}$, les points g'_2, g''_2,.... seront respectivement au milieu des droites $\overline{g'g'_1}$, $\overline{g''g''_1}$,....

On peut donc, d'après ce qui précède, énoncer ce qui suit :

Si l'on a deux droites K *et* K′ *non parallèles et non situées dans un même plan, et si l'on divise la droite* K *en parties égales entre elles, chaque partie ayant une longueur égale à* l, *par des points* 1, 2, 3, 4,.... *et si l'on divise la droite* K′ *en parties aussi égales entre elles, chaque partie ayant une longueur égale à* l′, *par des points* 1′, 2′, 3′, 4′,.... *et si l'on unit les points homologues* 1 *et* 1′, 2 *et* 2′, 3 *et* 3′,.... *par des droites* G, G′, G″,.... *ces droites formeront un paraboloïde hyperbolique.*

468. Les points de division 1 et 1′ pouvant être arbitrairement placés sur les droites K et K′ et le rapport entre les longueurs l et l' étant arbitraire, on voit que par deux droites non situées dans un même plan on peut faire passer une infinité de *paraboloïdes hyperboliques.*

469. *Le lieu des normales menées aux divers points de la génératrice droite passant par le sommet d'un paraboloïde hyperbolique, est un paraboloïde hyperbolique qui est toujours droit* (*).

(*) Plus loin, nous démontrerons que le théorème relatif au paraboloïde normal est toujours le même, quelle que soit la génératrice droite considérée sur un paraboloïde donné Σ, ce paraboloïde Σ étant indifféremment *oblique* ou *rectangulaire.*

Soit donné un paraboloïde hyperbolique Σ *droit* ou *rectangulaire;* imaginons les génératrices K_1 et G_1 se croisant au sommet *s* de cette surface Σ. Les plans directeurs P et Q de cette surface Σ seront respectivement perpendiculaires aux droites K_1 et G_1.

Cela posé :

Construisons les plans tangents T, T′, T″, T‴, etc., à la surface Σ aux divers points m, m', m'', m''',.... de la génératrice G_1; menons les normales N, N′, N″, N‴,.... à la surface Σ, en les points m, m', m'', m''',.... toutes ces droites N, N′, N‴,.... formeront une surface réglée Σ_1; je dis d'abord que la surface Σ_1 est gauche; et en effet, si nous supposons que les points m et m' sont successifs et infiniment voisins sur la droite G_1, les normales N et N′ seront successives et infiniment voisines, et leur plus courte distance ne sera pas nulle, puisqu'elle sera l'*élément rectiligne* $\overline{mm'}$; deux génératrices droites successives et infiniment voisines de la surface Σ_1 ne se coupent donc pas, dès lors cette surface Σ_1 est gauche (nº 117).

Ayant démontré que la surface Σ_1 est *gauche*, démontrons qu'elle est un paraboloïde hyperbolique, identique ou superposable au paraboloïde Σ. Pour le démontrer, menons par les points m, m', m'',.... les génératrices K, K′, K″,.... du *système* K (du paraboloïde Σ) et dès lors parallèles au plan directeur Q. Le plan T passant par les droites G_1 et K aura la droite K pour ligne de plus grande pente par rapport au plan directeur P.

De même les plans T′ ou (G_1, K′), T″ ou (G_1, K″), T‴ ou (G_1, K‴),.... ont respectivement pour ligne de plus grande pente par rapport au même plan P les droites K′, K″, K‴,.... et comme les droites N, N′, N″, N‴.... sont respectivement perpendiculaires aux droites K, K′, K″, K‴,.... elles sont toutes parallèles au plan Q.

Cela posé :

Si l'on regarde la droite G_1 comme étant un axe de rotation et si l'on suppose que les droites N, N′, N″,... restant fixes dans l'espace, les droites K, K′, K″ .... tournent respectivement autour de l'axe G_1 et opèrent chacune un quart de révolution, ces droites K, K′, K″,.... viendront en même temps se superposer respectivement sur les normales N, N′, N″,.... et la surface Σ après un quart de révolution autour de l'axe G_1 viendra donc se superposer sur la surface Σ_1, ainsi la surface Σ_1 n'est autre qu'un paraboloïde hyberbolique, identique ou superposable à la surface Σ.

Les deux plans directeurs P et Q se coupent suivant une droite L à laquelle le plan R ou (G_1, K_1) est perpendiculaire.

Pendant le mouvement de rotation de la surface Σ autour de l'axe G_1 le plan P

étant supposé entraîné, on voit qu'il prendra la position P_1 perpendiculaire à la droite L ou parallèle au plan R, et que cela aura lieu lorsque le quart de révolution sera accompli.

On peut donc énoncer ce qui suit :

La surface Σ_1 *déterminée par les normales* N, N′, N″,.... *est un paraboloïde hyperbolique droit ou rectangulaire, ayant pour plans directeurs le plan* Q *et le plan* R.

De la section faite dans le paraboloïde normal Σ_1 *par un plan parallèle au plan directeur du paraboloïde* Σ.

470. Si l'on coupe la surface Σ_1 déterminée par les normales N, N′, N″,.... par un plan X parallèle au plan directeur P, la section sera une *hyperbole équilatère.*

Et en effet :

Étant données les génératrices droites de *systèmes différents* G_1 et K_1 de la surface paraboloïde Σ et se croisant rectangulairement au sommet *s* de cette surface, si nous menons au point *s* une droite Z perpendiculaire au plan R ou (G_1, K_1), on aura l'*axe* de la surface Σ.

Pour ce point *s* la droite Z est la normale à la surface Σ puisque le plan R est tangent à cette surface Σ au point *s*.

Cela posé, on pourra prendre pour *plans directeurs* de la surface Σ les plans Q ou (K_1, Z) et P ou (G_1, Z); et l'on pourra prendre pour *plans directeurs* de la surface normale Σ_1 les plans Q ou (K_1, Z) et R ou (G_1, K_1).

Cela posé :

Prenons un plan Q′ parallèle au plan Q ou (K_1, Z) pour plan vertical de projection et le plan P′ parallèle au plan P ou (G_1, Z) pour plan horizontal de projection (*fig.* 263).

Dans le plan horizontal on aura la génératrice G′, dans le plan vertical on aura la génératrice K″.

Les génératrices K, K′, K″,.... passant par les points *m*, *m*′, *m*″,.... de la génératrice G_1 perceront le plan horizontal aux points *p*, *p*′, *p*″,.... situés sur G′.

Les plans T, T′, T″.... tangents aux points *m*, *m*′, *m*″,.... à la surface paraboloïde Σ, auront pour traces verticales, V^t ou K^v, $V^{t'}$ ou K'^v, $V^{t''}$ ou K''^v,.... et pour traces horizontales les droites H^t, $H^{t'}$, $H^{t''}$.... perpendiculaires à la ligne de terre LT et passant respectivement par les points *p*, *p*′, *p*″....

Les normales à la surface Σ auront pour projections verticales, les droites N^v, N'^v, N''^v.... passant toutes par le point s^v ou $G_1{}^v$ et respectivement perpendiculaires à V^t, $V^{t'}$, $V^{t''}$,... et pour projections horizontales les droites K^h, K'^h, K''^h,....

Cela posé, si l'on coupe les droites N.... par un plan X parallèle au plan hori-

zontal, on aura les points a, a', a''.... formant une courbe δ dont la projection horizontale δ^h *sera une hyperbole équilatère*, ayant s^h pour centre et Z^h et $G_1{}^h$ pour asymptotes.

Et en effet :

Les triangles $G_1{}^v qa''$ et $G_1{}^v p''m''^h$, $G_1{}^v qa'^v$ et $G_1{}^v m''^h p'^v$, $G_1{}^v qa^v$ et $G_1{}^v m''^h p^v$,.... sont semblables, on a donc :

$$a''q : qG_1{}^v :: G_1{}^v m''^h : m''^h p''$$
$$a'^v q : qG_1{}^v :: G_1{}^v m''^h : m''^h p'^v$$
$$a^v p : qG_1{}^v :: G_1{}^v m''^v : m''^h p^v$$
etc.

d'où

$$\overline{a''q} \times \overline{m''^h p''} = \overline{a'^v q} \times \overline{m''^h p'^v} = \overline{a^v q} \times \overline{m''^h p^v} = \text{etc.} = \overline{qG_1{}^v} \times \overline{G_1{}^v m''^h} = \text{constante} = C$$

Or :

1°	$a''q = m''^h a''^h$	et	$a'^v q = a'^h m'^h$	et	$a^v q = a^h m^h$	et	....
2°	$m''^h p'^v = m'^h p'$	et	$m''^h p^h = m^h p$	et	....		

Et l'on a, en vertu des triangles semblables $K_1{}^h m^h p$, $K_1{}^h m'^h p'$, $K^h{}_1 m''^h p''$,....

$$m^h p : m'^h p' : m''^h p'' : \text{etc.} :: K_1{}^h m^h : K_1{}^h m'^h : K_1{}^h m''^h : \text{etc.}$$

On a donc :

$$\overline{K_1{}^h m^h} \times \overline{m^h a^h} = \overline{K_1{}^h m'^h} \times \overline{m'^h a'^h} = \overline{K_1{}^h m''^h} \times \overline{m''^h a''^h} = \text{........} = \text{constante} = C.$$

Or, prenant les droites $G_1{}^h$ pour axe des abscisses x et Z^h pour axe des ordonnées y, et représentant les coordonnées du point a^h par x et y
a'^h par x' et y'
a''^h par x'' et y''
etc.

on pourra écrire les équations (1) sous la forme :

$$xy = x'y' = x''y'' = \text{.......} = \text{constante} = C.$$

Or, nous avons démontré (n° 327) que la courbe qui avait pour équation $xy = C$ était une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Ainsi la courbe δ^h est une hyperbole rapportée à ses asymptotes $G_1{}^h$ et Z^h; or elles sont rectangulaires entre elles, l'hyperbole δ^h est donc *équilatère*. Et la courbe δ étant dans un plan X parallèle au plan horizontal de projection, sera une courbe identique ou superposable à sa projection δ^h. Ainsi tout plan X parallèle au plan directeur (G_1, Z) coupe le paraboloïde normal Σ_1 suivant une hyperbole qui a pour

asymptotes les droites suivant lesquelles sont coupées par le plan sécant X, les plans (G_1, K_1) et (K_1, Z).

471. Sans chercher à connaître la nature géométrique de la courbe δ^h, on peut facilement démontrer que les droites G_1^h et Z^h sont deux asymptotes de cette courbe; et en effet:

Désignons par N... les génératrices du *premier système* de la surface normale Σ_1 et par M les génératrices du *second système*.

Les génératrices N... auront pour *plan directeur* le plan (K_1, Z) et les génératrices M.... auront pour *plan directeur* le plan (K_1, G_1).

Il est évident que la droite G_1 sera une des génératrices du système M et que l'axe Z sera une des génératrices du système N.

Cela posé :

Les divers points de la courbe δ seront ceux en lesquels le plan X qui est horizontal coupera les diverses génératrices N.... et M...., par conséquent cette courbe δ aura deux points situés à l'infini et qui seront ceux en lesquels le plan X coupe les droites G_1 et Z qui lui sont parallèles.

Voyons, maintenant, si pour ces points situés à l'infini la courbe δ a des tangentes situées à distance finie ou en d'autres termes *des asymptotes :*

Le plan Y passant par G_1 et parallèle au plan *directeur* (K_1, G_1) est un plan asymptote à la surface Σ_1 et la touche au point situé à l'infini sur G_1.

Le plan Y_1 passant par Z et parallèle au plan *directeur* (K_1, Z) est un plan asymptote à la surface Σ_1 et la touche au point situé à l'infini sur Z (n° 424).

Le plan X coupera donc respectivement les plans Y et Y_1 qui sont rectangulaires entre eux et qui sont tous les deux perpendiculaires à ce plan X, suivant des droites A et A_1 qui seront les asymptotes demandées.

Il est évident que les droites A et G_1, A_1 et Z sont respectivement parallèles entre elles.

Dans la (*fig.* 263) nous n'avons dessiné qu'une des deux branches de l'hyperbole δ, mais il est facile de se procurer des points de la seconde branche de cette courbe δ, en construisant des normales à la surface Σ pour les points qui situés sur G_1 sont en avant du plan (Z, K_1).

D'après ce qui précède, on peut énoncer ce qui suit :

Si l'on a un paraboloïde hyperbolique Σ droit ou rectangulaire, si l'on mène une suite de plans parallèles au plan T *tangent à la surface Σ en son sommet* s, *ces plans couperont la surface Σ suivant des hyperboles équilatères, semblables et semblablement placées, si les plans sécants sont situés d'un même côté, par rapport au plan* T ; *et ils couperont cette surface Σ suivant des hyperboles équilatères dont les axes transverses seront à angle droit, si ces plans sécants sont, les uns à droite et les autres à gauche du*

plan T; *les centres de toutes les hyperboles de section seront situés sur l'axe* Z *et les asymptotes de ces courbes seront parallèles aux génératrices droites et de systèmes différents* G_1 *et* K_1 *de la surface* Σ *qui se croisent à angle droit en son sommet* s.

Théorie du raccordement (suivant une génératrice droite) entre deux surfaces gauches.

472. *Raccordement des surfaces gauches déterminées par le premier mode de génération*, et ainsi : *par une droite se mouvant sur trois courbes ;* dès lors, on se donne une surface gauche Σ par ses trois directrices courbes C, C′, C″, et l'on suppose que l'on connaisse une génératrice droite G de cette surface Σ.

Cela posé :

On propose de construire en un point *m* de la génératrice G un plan tangent T à la surface réglée Σ.

La droite G coupe les *directrices*, savoir : C en un point *a*, C′ en un point *b* et C″ en un point *d*.

Concevons (*fig.* 264) la tangente θ à la courbe C au point *a*
— — θ′ — C′ — *b*
— — θ″ — C″ — *d*

Si l'on fait mouvoir sur les trois droites θ, θ′, θ″, la génératrice droite G, on engendrera un hyperboloïde à une nappe Δ qui, en général, ne sera pas de révolution (n° 424). Si en effet cette surface Δ était tangente à la surface Σ tout le long de la génératrice G, on voit qu'il suffirait de construire pour le point *m* le plan tangent à cette surface Δ, pour avoir le plan tangent en *m* à la surface *réglée* et *générale* Σ.

Or, c'est précisément ce qui a lieu, ainsi que nous allons le démontrer.

Le plan Θ tangent au point *m* est déterminé, pour la surface *réglée* Σ, par la génératrice droite G et la tangente θ en *a* à la courbe C. Or, ce plan Θ est en même temps tangent à l'hyperboloïde Δ puisque G et θ sont (sur cette surface Δ) deux génératrices droites de *systèmes différents* se croisant au point *a*.

Par les mêmes raisons :

Le plan Θ′ passant par les droites G et θ′ est un plan tangent commun (au point *b*) aux deux surfaces Σ et Δ.

Et le plan Θ″ passant par G et θ″ est un plan tangent commun (au point *d*) aux deux surfaces Σ et Δ.

Ainsi les deux surfaces Σ et Δ ont la génératrice droite G qui leur est commune, et en même temps elles ont en les trois points *a*, *b*, *d* de cette droite G trois plans tangents communs, savoir les plans Θ, Θ′, Θ″.

Cela posé :

473. Démontrons le théorème suivant :

Lorsque deux surfaces gauches ont une génératrice droite commune, et trois plans tangents communs en trois points arbitraires de cette génératrice, ces deux surfaces ont mêmes plans tangents tout le long de cette génératrice.

Concevons trois courbes C, C', C'' (*fig.* 264) comme étant les *directrices* d'une surface gauche Σ.

Construisons une génératrice droite G de cette surface Σ; cette génératrice G coupe les courbes *directrices* C au point a, C' au point b, C'' au point d.

Concevons le plan Θ tangent en a à la surface Σ.

— Θ' — b —

— Θ'' — d —

Ainsi, le plan Θ passera par la génératrice G et la tangente θ à la courbe C.

— Θ' — — — G — θ' — C'.

— Θ'' — — — G — θ'' — C''.

Cela posé :

Traçons dans le plan Θ une droite θ_1 passant par le point a, et imaginons une courbe C_1 située dans l'espace, et ayant θ_1 pour tangente au point a.

Traçons de la même manière, dans les plans Θ' et Θ'', des droites θ_1' et θ_1'' passant respectivement par les points b et d, et imaginons dans l'espace deux courbes $C\,'$ et C_1'' ayant la première θ_1' pour tangente au point b, et la seconde θ_1'' pour tangente au point d.

En faisant mouvoir la droite G sur les trois courbes *directrices* C_1, C_1', C_1'', on engendrera une seconde surface gauche Σ_1 ayant en commun, avec la première surface gauche Σ la droite G, et ces deux surfaces réglées Σ et Σ_1 auront mêmes plans tangents Θ, Θ', Θ'' en les trois points a, b, d de la génératrice droite G qui leur est commune.

Cela posé :

Je dis que les deux surfaces Σ et Σ_1 sont tangentes l'une à l'autre tout le long de la droite G, propriété que l'on exprime en d'autres termes, en disant que les deux surfaces Σ et Σ_1 se *raccordent* tout le long de la droite G.

Et en effet :

Trois courbes déterminant le mouvement d'une droite, si sur la surface Σ engendrée par la droite G se mouvant sur les trois courbes C, C', C'', on prend trois autres courbes γ, γ', γ'' pour *directrices* de la droite génératrice, on obtiendra toujours la même surface Σ.

Cela posé :

Coupons les deux surfaces Σ et Σ_1 par trois plans chacun de direction arbitraire

P, P′, P″, mais passant le plan P par le point a, le plan P′ par le point b, le plan P″ par le point d.

Le plan P coupera la surface Σ suivant une courbe γ, et la surface Σ_1 suivant une courbe γ_1, et le plan Θ suivant une droite t, tangente commune des courbes γ et γ_1 au point a.

De même les plans P′ et P″ couperont Σ et Σ_1 suivant γ' et γ_1', γ'' et γ_1'' et les plans Θ' et Θ'' suivant les droites t' et t'' qui seront respectivement une tangente commune aux courbes γ' et γ_1' au point b, et aux courbes γ'' et γ_1'' au point d.

Cela posé :

La surface Σ pourra être considérée comme engendrée par la droite G se mouvant sur les trois courbes planes γ, γ', γ'', et la surface Σ_1 pourra être considérée comme engendrée par la même droite G se mouvant sur les trois courbes planes γ_1, γ_1', γ_1''.

Or, si nous considérons les deux courbes γ et γ_1, comme elles ont en a une tangente commune t, il s'ensuit qu'elles ont en commun un élément rectiligne $\overline{aa'}$, le point a' étant le point successif et infiniment voisin du point a, soit sur la courbe γ, soit sur la courbe γ_1.

Si donc nous imaginons la génératrice G′ qui, passant par le point a', s'appuie sur les courbes γ' et γ'', elle coupera γ' en un point b' infiniment voisin du point b, et elle coupera γ'' en un point d' infiniment voisin du point d.

Et de même cette droite G′ coupera les courbes γ_1' et γ_1'', la première en un point b' infiniment voisin de b, et la seconde en un point d' infiniment voisin de d.

Or, $\overline{bb'}$ et $\overline{dd'}$ seront respectivement les *éléments rectilignes* des courbes γ' et γ'', et $\overline{bb'}$ et $\overline{dd'}$ seront aussi les *éléments rectilignes* des courbes γ_1' et γ_1''; et comme ces courbes γ', γ_1' et γ'', γ_1'' ont même élément rectiligne en les points b et d, il s'ensuit que les deux surfaces Σ et Σ_1 auront en commun les deux génératrices droites successives et infiniment voisines G et G′, et dès lors ces surfaces Σ et Σ_1 ont en commun un élément *superficiel* gauche compris entre les deux droites G et G′.

Cela posé :

Si pour un point m de la droite G nous menons un plan de direction arbitraire χ, ce plan coupera la surface Σ suivant une courbe δ, et la surface Σ_1 suivant une courbe δ_1, et la génératrice G′ en un point m' qui sera successif et infiniment voisin du point m, et cela a lieu parce que entre G et G′ on ne peut pas placer une droite approchant plus près de G que G′ n'en approche, d'après le mode de génération adopté, puisque nous avons tout basé sur l'hypothèse primordiale et qui sert de point de départ à toutes nos considérations infinitésimales subséquentes, savoir : que le point a' était le point successif et infiniment voisin du point a.

Dès lors la courbe δ et la courbe δ_1 auront pour *élément rectiligne* commun l'*élément* $\overline{mm'}$ qui, prolongé, donnera une droite ξ qui sera pour le point m la tangente commune aux courbes δ et δ_1.

Donc, le plan π déterminé par les droites G et ξ sera tangent en le point m et à la surface Σ et à la surface Σ_1.

474. On peut donc affirmer que lorsque deux surfaces gauches Σ et Σ_1 ont une génératrice droite G commune et des plans tangents communs en trois points arbitrairement situés sur cette droite G, elles ont même plan tangent en chacun des points de cette droite G; ce que l'on exprime en disant : que les deux surfaces Σ et Σ_1 se *raccordent* entre elles suivant la droite G.

De ce qui précède on peut conclure ce qui suit :

475. Si l'on a une surface gauche Σ engendrée par une droite se mouvant sur trois courbes (*directrices*) C, C', C'', et si l'on construit trois plans Θ, Θ', Θ'' passant par une des génératrices droites G de cette surface Σ, ces plans étant respectivement tangents à la surface Σ en les points m, m', m'', situés sur la génératrice G.

Si dans le plan Θ on mène une droite θ arbitraire mais passant par le point m.
— Θ' — θ' — — m'.
— Θ'' — θ'' — — m''.

l'hyperboloïde à une nappe Δ engendré par la droite G se mouvant sur les trois droites θ, θ', θ'', se *raccordera* avec la surface Σ tout le long de la génératrice G.

Et comme dans le plan Θ on peut mener par le point m une infinité de droites $\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots$ et comme aussi l'on peut faire la même chose pour les plans Θ' et Θ'', on se trouve conduit à énoncer le *théorème* suivant :

Il existe une infinité d'hyperboloïdes à une nappe $\Delta, \Delta', \Delta'', \ldots$ *tangents à une surface gauche* Σ *tout le long d'une génératrice droite* G *de cette surface gauche* Σ.

Construction du plan tangent en un point m *de la génératrice droite d'un hyperboloïde à une nappe* Δ *donné par trois directrices droites* $\theta, \theta', \theta''$.

476. Sur la droite θ, on prendra deux points (à distance finie) p et q; ensuite :

1° Par le point p et la droite θ', on fera passer un plan R; par le point p et la droite θ'', on fera passer un plan R'; les deux plans R et R' se couperont suivant une droite G_1 qui s'appuiera sur les trois droites θ, θ' et θ'' et qui sera dès lors une des génératrices droites du *système* G de l'hyperboloïde Δ.

2° Par le point q et la droite θ', on fera passer un plan Q; par le point q et la droite θ'', on fera passer un plan Q'; les deux plans Q et Q' se couperont suivant

une droite G_2 qui s'appuiera sur les trois droites θ, θ', θ'' et qui sera dès lors une des génératrices droites du *système* G de l'hyperboloïde Δ.

Cela fait :

En faisant mouvoir la droite θ sur G, G_1, G_2, on engendrera le même hyperboloïde Δ; si donc par le point *m* et la droite G_1, on fait passer un plan Y, puis par le même point *m* et la droite G_2 un second plan Y', les deux plans Y et Y' se couperont suivant une droite θ_1 qui s'appuiera sur les trois droites G, G_1, G_2 et qui sera dès lors une génératrice droite du *système* θ de l'hyperboloïde Δ.

Le plan T déterminé par les deux droites G et θ_1 sera donc tangent en *m* à l'hyperboloïde Δ.

477. Ce qui précède nous permet de résoudre le problème suivant :

Étant donnés une surface gauche Σ *par trois courbes directrices* C, C', C'' *et une génératrice droite* G *de cette surface* Σ *et un point* m *sur* G, *construire en ce point* m *le plan tangent* T *à la surface réglée* Σ.

On déterminera les points *a*, *a'*, *a''* en lesquels la droite G coupe respectivement les courbes C, C', C'', on construira à ces trois courbes leurs tangentes, savoir : θ à C au point *a*, θ' à C' au point *a'*, θ'' à C'' au point *a''*; cela fait, on n'aura plus qu'à résoudre (n° 476) le problème suivant : *Construire le plan tangent au point* m *de l'hyperboloïde à une nappe* Δ *ayant pour directrices les droites* θ, θ', θ''.

Ce plan sera précisément le plan T demandé, puisque les deux surfaces Σ et Δ *se raccordent* entre elles tout le long de la droite G, comme ayant trois plans tangents communs en les points *a*, *a'*, *a''* de cette génératrice G de *raccordement*.

Raccordement des surfaces gauches engendrées par le second mode de génération, ainsi : *par une droite se mouvant sur deux courbes directrices et parallèlement à un cône directeur*.

478. Concevons (*fig.* 265) deux courbes C et C' situées dans l'espace et un cône Δ ayant pour sommet le point *s* et pour *directrice* une courbe B.

Faisons mouvoir sur les deux courbes C et C' une droite G et de telle manière que pendant son mouvement elle soit parallèle au cône Δ, ce qui veut dire qu'en chacune de ses positions elle sera parallèle à l'une des génératrices droites du cône Δ.

Nous avons appris (n° 422) à construire les diverses génératrices droites de la surface gauche Σ ainsi engendrée.

Cela posé :

Imaginons une génératrice droite G de la surface Σ coupant les courbes *directrices* C et C' respectivement aux points *a* et *b* et parallèle à une génératrice droite G_1 du cône *directeur* Δ.

Concevons sur la courbe C un point a' successif et infiniment voisin du point a, et imaginons la génératrice droite G′ de la surface Σ passant par ce point a'.

La droite G′ coupera la courbe C′ au point b' qui sera le successif et infiniment voisin du point b, et elle sera parallèle à la droite G_1' qui sera sur le cône Δ la génératrice droite successive et infiniment voisine de la génératrice G_1.

Dès lors : les *éléments rectilignes* $\overline{aa'}$ et $\overline{bb'}$ étant prolongés, donneront les tangentes θ et θ' au point a de la courbe C et au point b de la courbe C′, et le plan P déterminé par les deux droites G_1 et G'_1 sera le plan tangent au cône Δ suivant la droite G_1.

Si l'on fait mouvoir la droite G sur les deux tangentes θ et θ' et parallèment au plan P, on engendrera un paraboloïde hyperbolique Σ_1, et il faut démontrer que cette surface Σ_1 est tangente à la surface *réglée* Σ tout le long de la droite G.

Nous pourrons toujours construire le plan Q parallèle aux droites θ et θ', le paraboloïde Σ_1 pourra donc être considéré comme engendré par la droite θ se mouvant sur deux génératrices du *système* G et parallèlement au plan Q.

Cela posé :

Si en un point m de la génératrice G, on voulait construire le plan T tangent à la surface réglée Σ, il faudrait tracer sur cette surface Σ une courbe γ passant par le point m et le plan T serait déterminé par la tangente en m à cette courbe γ et par la droite G.

Si donc nous coupons la surface Σ par un plan Q′ qui, passant par le point m, sera parallèle au plan Q, ce plan Q′ coupera la surface Σ suivant une courbe γ et le paraboloïde Σ_1 suivant une génératrice droite θ_1 du *système* θ.

Or : je dis que la courbe γ a pour tangente au point m la droite θ_1.

Et en effet :

Les droites G et G′ sont des génératrices successives et infiniment voisines, soit pour la surface *réglée* Σ, soit pour le *paraboloïde* Σ_1; dès lors le plan Q′ coupera la droite G′ en un point m' qui sera le successif et infiniment voisin du point m, donc $\overline{mm'}$ sera *l'élément rectiligne* de la courbe γ; mais cet élément prolongé donne la droite θ_1; donc θ_1 est la tangente en m à la courbe γ; ainsi se trouve démontré que les deux surfaces Σ et Σ_1 ont en un point quelconque m de la droite G, qui leur est commune, même plan tangent. Le paraboloïde Σ_1 se *raccorde* donc avec la surface *réglée* Σ tout le long de la génératrice droite G.

479. Ce qui précède permet de construire en un point m d'une génératrice droite G d'une surface *réglée* Σ, donnée par deux courbes *directrices* C et C′ et un *cône directeur* Δ, le plan tangent T à cette surface Σ.

Et en effet :

Nous mènerons la génératrice G_1 du cône Δ, parallèle à la génératrice donnée

G de la surface Σ; nous construirons le plan P tangent au cône Δ suivant la génératrice G_1; nous construirons les tangentes θ et θ' aux courbes directrices C et C′ aux points *a* et *b* en lesquels ces courbes sont coupées par la droite G; nous construirons une droite G_2 (à distance finie) s'appuyant sur θ et θ' et parallèle au plan P; nous mènerons par le point *m* un plan Q′ parallèle aux droites θ et θ'; ce plan coupera G_2 en un point *n*, et le plan T demandé sera déterminé par les droites G et $\overline{mn}$.

480. Ayant construit au point *a* et *b* les plans Θ et Θ' tangents à la surface *réglée* Σ, nous pourrons tracer dans le plan Θ une droite λ arbitraire, mais passant par le point *a;* de même nous pourrons tracer dans le plan Θ' une droite λ' arbitraire, mais passant par le point *b.*

Si par les droites λ et λ' nous menons des plans quelconques X et X′, ils couperont la surface Σ suivant des courbes C_1 et C'_1 et nous pourrons faire mouvoir la droite G sur ces courbes C_1 et C'_1 et parallèlement au cône Δ et nous engendrerons toujours la même surface *réglée* Σ.

En remplaçant donc les courbes directrices primitives C et C′ par les courbes C_1 et C'_1, nous aurons un nouveau paraboloïde hyperbolique Σ_1' engendré par la droite G se mouvant parallèlement au plan P, en s'appuyant sur les droites λ et λ', et ce paraboloïde Σ'_1 sera tangent à la surface donnée Σ tout le long de la droite G.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

Il existe une infinité de paraboloïdes hyperboliques Σ_1, Σ'_1, Σ_1'',.... *tangents à une surface gauche* Σ, *tout le long d'une génératrice droite* G *de cette surface* Σ (*cette surface* Σ *étant donnée par deux courbes directrices et un cône directeur*).

481. Parmi tous ces paraboloïdes Σ_1.... *de raccordement,* il en existe évidemment toujours un Σ_1 qui est *droit* ou *rectangulaire.* et qui a pour plan directeur Q, un plan perpendiculaire à la droite G de *raccordement,* en sorte que ce paraboloïde remarquable a son sommet situé sur la droite G; l'existence du paraboloïde Σ nous permet, en vertu de ce qui a été dit n° 469, d'énoncer le théorème suivant :

Si en les divers points m, m′, m″,.... *d'une génératrice droite* G *d'une surface réglée* Σ (*donnée par deux courbes directrices et un cône directeur*) *nous menons les normales* N, N′, N″,.... *à cette surface* Σ, *toutes ces normales formeront un paraboloïde hyperbolique,* droit *ou* rectangulaire.

482. Parmi tous les paraboloïdes hyperboliques, tangents à une surface gauche Σ (donnée par deux courbes directrices et un cône directeur), il existe un infinité de paraboloïdes droits ou rectangulaires, mais il n'en existe qu'un seul ayant pour plan directeur un plan perpendiculaire à la génératrice de raccordement; et en effet :

Si nous avons construit le plan P qui tangent au cône directeur Δ est *plan directeur commun* à tous les paraboloïdes de raccordement, nous pourrons prendre pour second plan directeur P un plan perpendiculare à ce plan Q et déterminer les droites directrices du paraboloïde de raccordement en menant par les points a et b, en lesquels la droite G coupe les courbes directrices C et C′ de la surface Σ, des plans X et X′ parallèles à Q ; ces plans X et X′ couperont les plans Θ et Θ′ tangents en a et b à la surface Σ suivant les droites demandées.

Ainsi le paraboloïde Σ_2 de raccordement, qui est *droit* ou *rectangulaire* et dont l'un des plans directeurs est perpendiculaire à la génératrice G de raccordement, est *identique* ou *superposable* au paraboloïde formé par les normales N, N′, N″,.... menées à la surface Σ en les divers points de la génératrice G de raccordement.

Ce paraboloïde, *lieu* des normales N, N′, N″,.... a reçu le nom de *paraboloïde hyperbolique normal.*

483. L'existence du paraboloïde normal nous permet de construire une infinité d'hyperboloïdes à une nappe et de révolution, tangents à une surface gauche générale Σ, chacun de ces hyperboloïdes étant tangent à la surface Σ tout le long d'une génératrice droite G de cette surface Σ.

Et en effet, prenons sur une génératrice droite G d'une surface gauche Σ, trois points arbitraires a, a', a'' ; construisons trois normales à la surface Σ, savoir : N au point a, N′ au point a' et N″ au point a''.

Si nous faisons mouvoir une droite K sur les trois *directrices* droites N, N′, N″, nous engendrerons le paraboloïde Δ normal à la surface Σ tout le long de la droite G.

Et si nous considérons chacune de ces génératrices K, K′, K″,.... comme étant un axe de rotation, en faisant tourner la droite G autour de K, ou de K′, ou de K″,..... on engendrera les hyperboloïdes à une nappe et de révolution Σ_1, Σ_1', Σ_1''..... Or, il est évident que les surfaces Σ et Σ_1, ou Σ et Σ_1', ou Σ et Σ_1'',..... ont même plan tangent en chacun des trois points a, a', a'', puisqu'elles ont même normale en chacun de ces trois points ; ces surfaces se *raccordent* donc entre elles tout le de la génératrice droite G qui leur est commune ; donc, etc.

484. Comme nous avons fait voir (n° 423) que lorsqu'une surface gauche était donnée par le *premier mode* de génération, on pouvait toujours la concevoir comme engendrée par le *second mode,* il s'ensuit : que les propriétés que nous venons de reconnaître exister, les unes pour les surfaces du *premier mode,* et les autres pour les surfaces du *second mode,* existent pour les unes et les autres.

Nous pouvons donc énoncer ce qui suit :

1° *Il existe une infinité d'hyperboloïdes à une nappe et une infinité de paraboloïdes*

hyperboliques tangents à une surface gauche, tout le long d'une de ses génératrices droites.

2° *Le lieu des normales menées à une surface gauche en les divers points d'une de ses génératrices droites est un paraboloïde hyperbolique droit, ayant son sommet sur la génératrice considérée.*

485. D'après tout ce qui précède on voit que :

1° Si ayant donné une surface gauche Σ par ses trois directrices courbes C, C', C'', l'on veut construire une surface gauche Σ_1 se *raccordant* avec Σ tout le long d'une génératrice droite G, il faudra construire les plans Θ, Θ', Θ'' tangents à la surface Σ aux points a, a', a'' en lesquels la droite de raccordement G coupe les directrices courbes C, C', C'' et construire dans l'espace trois nouvelles courbes C_1, C_1', C_1'' passant respectivement par les points a, a', a'' et ayant leurs tangentes θ_1, θ_1', θ_1'' en ces points a, a', a'', situées respectivement dans les plans Θ, Θ', Θ''; alors la droite G en se mouvant sur les trois courbes C_1, C_1', C_1'', engendrera une surface gauche Σ_1 qui se *raccordera* tout le long de G avec Σ, comme ayant trois plans tangents communs Θ, Θ', Θ'' avec cette surface Σ et en trois points a, a', a'' de la génératrice G qui leur est commune.

2° Ayant donné une surface gauche Σ par deux courbes directrices C et C' et un cône directeur Δ, si l'on veut construire une surface gauche Σ_1 se raccordant avec la surface Σ tout le long d'une de ses génératrices droites G, il faudra construire la génératrice G_1 du cône Δ parallèle à la droite G; puis il faudra construire les plans Θ et Θ' tangents à Σ et aux points a et a' en lesquels G coupe les directrices courbes C et C'; ensuite on tracera dans l'espace deux courbes C_1 et C_1' passant respectivement par les points a et a', et ayant leurs tangentes θ_1 et θ'_1 en ces points a et a', situées respectivement dans les plans Θ et Θ'; enfin on imaginera un cône Δ_1 ayant même sommet que le cône Δ et tangent à ce cône Δ suivant la génératrice G_1; en faisant mouvoir la droite sur les deux courbes C_1 et C'_1 et parallèlement au cône Δ_1, l'on obtiendra une surface gauche Σ_1 qui se *raccordera* avec la surface Σ tout le long de la génératrice droite G qui leur est commune.

486. Si l'on a une surface gauche Σ donnée par ses trois directrices courbes C, C', C'' et si l'on demande de construire le plan tangent à cette surface Σ pour un point m situé sur une droite G, mais telle que rencontrant les courbes C et C' en des points dont les projections se trouvent dans les limites de l'*épure*, elle ne rencontre la courbe C'' qu'en un point dont les projections seraient hors des limites de l'*épure*, alors la construction du plan tangent demandé est impossible; parce que si l'on veut employer un hyperboloïde à une nappe de raccordement, l'une des trois directrices droites de cet hyperboloïde ne pourra être déterminée, et si

l'on veut employer un paraboloïde hyperbolique de raccordement, l'on ne pourra pas construire le plan directeur commun à tous les paraboloïdes de raccordement.

487. Faisons remarquer, en terminant, que s'il n'existait pas de surfaces gauches doublement *réglées*, la solution du problème : *Construire le plan tangent en un point d'une surface gauche générale*, serait impossible par la *géométrie*, ou, en d'autres termes, par des *constructions graphiques;* et dans ce cas *l'analyse* seule aurait pu résoudre le problème.

Construction de la courbe de contact d'un cylindre ou d'un cône tangent à une surface gauche.

488. Étant donnée une surface *réglée* Σ engendrée par l'un ou l'autre mode de génération, on demande la solution des deux problèmes suivants :

1° *Construire la courbe de contact* δ *d'un cylindre* Δ *engendrée par un plan* P *roulant tangentiellement sur la surface* Σ *et parallèlement à une droite donnée* D.

Pour résoudre ce problème, nous construirons les diverses génératrices droites G, G', G'',..... de la surface Σ; nous ferons passer respectivement par les droites G, G', G'',.... des plans Q, Q', Q'',.... parallèles à la droite D et nous chercherons le point de contact de chacun des plans Q, Q', Q'',.... avec la surface Σ.

2° *Construire la courbe de contact* γ *d'un cône* B *ayant pour sommet un point* s.

Pour résoudre ce problème, nous construirons les diverses génératrices droites G, G', G'',.... de la surface Σ; nous ferons passer respectivement par chacune des droites G, G', G'',..... et le sommet *s*, des plans R, R', R'',.... et nous chercherons le point de contact de la surface Σ avec chacun de ces plans R, R', R'',....

489. Montrons maintenant comment l'on peut facilement construire les points de contact de la surface Σ, avec les plans Q..... ou avec les plans R..... suivant que cette surface Σ est donnée par l'un ou l'autre mode de génération.

1° *La surface* Σ *étant donnée par le premier mode.*

Ayant une génératrice droite G de la surface Σ et un plan Q (n° 488 1°) ou R (n° 488 2°) passant par cette droite G, on construira les tangentes $\theta, \theta', \theta''$ aux courbes directrices C, C', C'' de la surface Σ et pour les points a, a', a'' en lesquels ces courbes C, C, C'', sont respectivement coupées par la droite G; ensuite, on construira deux droites G_1 et G_2 s'appuyant sur $\theta, \theta', \theta''$; et le plan Q ou R coupera ces droites G_1 et G_2 en les points q_1 et q_2; la droite q_1q_2 coupera la droite G en un point *m* qui sera le point de contact du plan Q ou R avec la surface Σ; on pourra donc déterminer autant de points m, m', m''..... que l'on voudra de la courbe δ ou de la courbe γ.

2° *La surface Σ étant donnée par le deuxième mode.*

Ayant une génératrice droite G de la surface Σ et un plan Q (n° 488 1°) ou R (n° 488 2°) passant par cette droite G, on construira 1° les tangentes θ et θ′ aux deux courbes directrices C et C′ de la surface Σ et pour les points *a* et *a′* en lesquels la droite G coupe respectivement les *directrices* C et C′ et 2° la génératrice K du cône directeur Δ parallèle à la droite G, puis l'on construira le plan P tangent au cône Δ tout le long de la droite K.

Ensuite on construira deux droites G_1 et G_2 parallèles au plan P et s'appuyant sur les droites θ et θ′.

Le plan Q ou R coupera ces droites G_1 et G_2 aux points q_1 et q_2, et la droite $\overline{q_1q_2}$ coupera la droite G en un point *m* qui sera le point de contact du plan Q ou R avec la surface Σ.

On pourra donc déterminer autant de points *m*, *m′*, *m″*,..... que l'on voudra de la courbe δ ou de la courbe γ.

490. En vertu de ce qui vient d'être exposé ci-dessus on pourra toujours :

1° Contruire *la ligne de séparation d'ombre et de lumière* sur une surface gauche Σ donnée par l'un ou l'autre des deux modes de génération, lorsque cette surface sera éclairée par un *rayon lumineux* D ou par un *point lumineux* s.

2° Construire le contour apparent d'une surface gauche Σ en supposant l'*œil* placé en un point *s* de l'espace et par suite obtenir la *perspective* de cette surface gauche.

3° Construire la *projection complète* et orthogonale, soit sur le plan horizontal de projection, soit sur le plan vertical de projection, d'une surface gauche Σ donnée par l'un ou l'autre mode de génération, puisque cette *projection complète* n'est autre que l'intersection du plan horizontal de projection ou du plan vertical de projection et d'un cylindre A tangent à la surface gauche Σ, les génératrices droites de ce cylindre A étant perpendiculaires au plan horizontal ou au plan vertical de projection.

491. Parmi les surfaces gauches on remarque les *conoïdes*, la surface du *biais-passé* et les *hélicoïdes*.

Nous allons examiner quelques-unes des propriétés dont jouissent ces surfaces qui se présentent assez souvent dans les *applications*; et par suite nous aurons l'occasion d'appliquer les principes généraux exposés ci-dessus, et de donner la *solution graphique* de plusieurs problèmes utiles.

DES CONOÏDES.

492. On a donné le nom de *conoïde* à une surface engendrée par une droite se mouvant sur une droite fixe et sur une courbe *plane* (à simple courbure) ou *gauche* (à double courbure) et parallèlement à un plan donné de position dans l'espace.

Toutefois on donne plus particulièrement le nom de *conoïde* à une surface particulière pour laquelle la *directrice* droite est perpendiculaire au plan *directeur* et pour laquelle la *directrice* courbe est un *cercle* ou une *ellipse* ou une *courbe fermée* tracée sur un plan perpendiculaire au plan *directeur*.

Souvent aussi la courbe *directrice* n'est pas plane, mais à double courbure et tracée sur un cylindre de révolution ayant la *directrice* droite pour axe de rotation; dans ce cas la courbe directrice est telle, que lorsque le cylindre sur lequel elle est tracée se trouve développé (planifié), elle se transforme en un *cercle* ou une *ellipse* ou une *courbe fermée*.

Construction du plan tangent en un point d'une surface conoïde.

493. 1° *Lorsque la courbe directrice est plane.* Prenons le plan horizontal de projection pour plan *directeur;* prenons la *directrice* droite A verticale et traçons la courbe *directrice* dans le plan vertical de projection, et supposons qu'elle est un cercle C.

Ayant écrit les projections de la droite A et du cercle C, il sera toujours facile étant donné un point m^h de construire le point m^v qui sera la projection verticale du point m de la surface conoïde; et en effet :

Le point m étant sur la surface conoïde Σ, par ce point m (*fig.* 266) passera une génératrice droite G de cette surface Σ.

Ainsi G^h passera par le point m^h et le point A^h (qui est la trace horizontale de la *directrice* A), puisque A est une droite verticale et que la droite G s'appuie sur cette *directrice* A.

La droite G percera le plan vertical de projection en un point b qui aura pour projection horizontale le point b^h en lequel G^h perce la ligne de terre LT.

Si donc on élève par le point b^h une perpendiculaire à LT, elle coupera le cercle C en deux points b et b' qui seront les traces verticales respectives de deux génératrices droites G et G' ayant même projection horizontale en G^h.

Et comme les droites G et G' doivent être parallèles au plan horizontal de projection, G^v et G'^v seront parallèles à la ligne de terre.

Cela fait, si par le point m^h on élève une perpendiculaire à LT, elle coupera G^v et G'^v en les points m^v et m'^v qui seront les projections verticales de deux points m et m' ayant même projection horizontale en m^h, et situés, l'un m sur la droite G et l'autre m' sur la droite G', ces droites G et G' étant deux génératrices droites du conoïde.

494. Étant données les projections m^h et m^v d'un point m d'un conoïde, construisons le plan tangent en ce point m.

La génératrice G qui passe par le point m (*fig.* 266) coupe la directrice A au point r, et elle coupe le cercle C au point b. Remplaçons les deux *directrices* A et C par leurs tangentes aux points r et b, nous aurons la droite A et la tangente θ au cercle C.

Si nous faisons mouvoir la droite G sur A et θ et parallèlement au plan horizontal de projection (qui est le plan directeur du conoïde), nous engendrerons un paraboloïde hyperbolique Σ_1 qui sera tangent au conoïde donné Σ tout le long de la génératrice G qui est commune à ces deux surfaces gauches Σ_1 et Σ.

Construisons donc le plan T tangent en m au paraboloïde Σ_1, nous aurons le plan tangent en m au conoïde Σ.

Or pour construire le plan T, cherchons la génératrice L du *second système* du paraboloïde Σ_1 laquelle passe par le point m, la droite G étant la génératrice du *premier système* de ce même paraboloïde Σ_1, laquelle passe aussi par le point m.

La tangente θ sera une génératrice du système L, la droite A sera aussi une génératrice du même système L ; θ perce la ligne de terre au point y et en unissant les points y et A^h par une droite G_2, on aura une génératrice du système G ; l'on a en la droite G_2 la trace H^{Σ_1} de la surface paraboloïde Σ_1 et en la droite θ la trace V^{Σ_1} de cette même surface paraboloïde Σ_1.

Cela posé :

La droite L perce le plan horizontal au point p situé à l'intersection des droites L^h et V^{Σ_1} ; projetons le point p en p^v sur LT, unissons p^v avec b, nous aurons L^v.

Le plan T sera donc déterminé par les deux droites G et L de systèmes différents se croisant au point m.

La droite L sera *une verticale* du plan T, dès lors V^T sera parallèle à L^v ; la droite G sera *une horizontale* du plan T, dès lors H^T sera parallèle à G^h.

495. 2° *Lorsque la courbe directrice est tracée sur un cylindre.* Soit donné sur le plan horizontal de projection (*fig.* 267) un cercle B ayant son centre au point A^h.

Regardons le point A^h comme la projection horizontale d'une droite A perpendiculaire au plan du cercle B et regardons le cercle B comme la trace horizontale (et dès lors la section droite) d'un cylindre φ ayant ses génératrices droites parallèles à l'axe A.

Supposons que le cylindre φ soit développé sur un plan, le cercle B se transformera en une droite B_1 et sur le développement traçons un cercle C_1 ayant le point o_1 pour centre.

Lorsque le plan sur lequel le cylindre φ est supposé planifié sera enroulé sur ce cylindre φ, la droite B_1 s'enroulant sur le cercle B, le cercle C_1 deviendra une courbe à double courbure C dont la projection horizontale sera un arc du cercle B. Supposons que l'on mène au cercle C_1 deux tangentes parallèles entre elles et perpendiculaires à la droite B_1, et enroulant la droite x_1y_1 sur le cercle B, l'arc xy sera précisément la projection horizontale de la courbe C.

Cette courbe G sera complétement déterminée par sa projection horizontale xy et par sa transformée C_1; car si l'on prend sur l'arc xy un point z^h, il sera la projection horizontale d'un point z de la courbe C, et si nous connaissons la hauteur zz^h du point z au-dessus du plan horizontal de projection, nous connaîtrons d'une manière précise la position du point z dans l'espace ou sur la courbe C.

Or si l'on prend l'arc xz^h et qu'on le rectifie, et qu'on le porte ainsi rectifié sur la droite B_1 depuis le point x_1 jusqu'en z', et si par ce point z' on élève une perpendiculaire à la droite B_1 et coupant le cercle C_1 en un point z_1, il est évident que le point z_1 sera le *transformé* du point z; dès lors $\overline{z_1z'}$ sera égale à la hauteur du point z au-dessus du plan horizontal de projection.

On voit donc que les points z^h..... de l'arc xy nous donnent les projections horizontales des divers points z..... de la courbe C et que les hauteurs de ces points z au-dessus du plan horizontal nous sont données en les distances z_1z' *tracées* sur le développement du cylindre.

Cela posé :

Si nous menons au point z^h une droite θ^h tangente au cercle B (ou C^h) nous aurons la projection horizontale de la tangente θ à la courbe C pour le point z; et en menant au point z_1 une tangente θ_1 au cercle C_1 nous aurons *la transformée* de la tangente θ.

Or nous savons que la sous-tangente pour θ_1 est égale à la sous-tangente pour θ; nous porterons donc $z'q'$ sur θ^h depuis le point z^h jusqu'au point q et la droite $\overline{qz}$ ne sera autre que la tangente θ.

Cela posé :

Si nous faisons mouvoir une droite G sur l'axe A et la courbe C et parallèlement au plan horizontal de projection H, nous engendrerons un *conoïde* Σ.

Si nous faisons mouvoir une droite G sur l'axe A et sur la tangente θ et parallèlement au plan horizontal de projection H, nous engendrerons un *paraboloïde hyperbolique* Σ_1.

La génératrice droite G passant par le point z de la courbe C, sera commune aux deux surfaces Σ et Σ_1 et ces deux surfaces auront même plan *directeur* H.

Si donc pour un point m de la droite G (qui est horizontale) on construit un plan T tangent au paraboloïde Σ_1 on aura le plan tangent au point m au conoïde Σ.

Cela posé :

Si l'on unit les points q et A^h par une droite H^{Σ_1}, on aura la trace horizontale du paraboloïde Σ_1.

Si par le point m^h on mène une droite L^h parallèle à θ^h, on aura la projection horizontale de la génératrice du *second système* du paraboloïde Σ_1, la droite G étant la génératrice du *premier système*.

La droite L^h coupe H^{Σ_1} au point p qui sera la trace horizontale de la droite L.

On connaît donc les deux génératrices de *systèmes différents* G et L qui se croisent au point m.

Dès lors on connaît le plan tangent T, et sa trace H^T passera par le point p et sera parallèle à G^h, car la droite G est une horizontale de ce plan T.

Dans les deux cas que nous venons d'examiner, le paraboloïde hyperbolique de *raccordement* Σ_1 est *rectangulaire*, car dans le premier cas les deux plans *directeurs* sont pour les génératrices du *système* G le plan horizontal de projection, et pour les génératrices du *système* L le plan vertical de projection. Dans le deuxième cas le plan *directeur* du *système* G est le plan horizontal de projection, et le plan *directeur* du *système* L est le plan mené tangentiellement au cylindre φ par la tangente θ.

Dans le premier cas, le plan *directeur* du *système* L est oblique à la génératrice G suivant laquelle se *raccordent* le *conoïde* Σ et le *paraboloïde* Σ_1.

Dans le deuxième cas, le plan *directeur* du *système* L est perpendiculaire à la génératrice G de *raccordement*.

496. Tout plan X qui passe par une génératrice droite G d'une surface *réglée* Σ est tangente à cette surface Σ en un certain point x de la droite G.

Nous aurons donc à résoudre le problème suivant :

Étant donné un plan X *passant par une génératrice droite* G *d'un conoïde* Σ, *construire son point de contact* x *avec cette surface* Σ.

1° *La courbe directrice du conoïde étant plane.*

497. Supposons le conoïde Σ donné ainsi qu'il a été dit ci-dessus (*fig.* 266), et soient données les traces V^x et H^x (*fig.* 268) d'un plan X passant par une génératrice droite G du conoïde Σ, ce plan X sera tangent à la surface Σ en un certain point x situé sur la droite G, et l'on se propose de construire les projections x^v et x^h de ce point x.

Pour y parvenir, traçons la tangente θ au cercle directeur C et au point b qui est la trace verticale de la géneratrice G.

La droite θ perce la ligne de terre au point q; unissons les points q et A^h par une droite H^{Σ_1} nous aurons la trace horizontale du paraboloïde Σ_1 qui se *raccorde* tout le long de la droite G avec le conoïde Σ.

Les traces H^x et H^{Σ_1} se coupent en un point p; menons par ce point p la droite L^h parallèle à la ligne de terre, nous aurons la projection horizontale de la génératrice du *système* L suivant laquelle le plan X coupe le paraboloïde Σ_1; L^h coupe G^h au point x^h, d'où l'on déduit le point x^v, et l'on a ainsi les projections du point x en lequel le plan X touche le conoïde Σ.

2° *La courbe directrice du conoïde étant tracée sur un cylindre.*

498. Supposons le conoïde Σ donné ainsi qu'il a été dit (*fig.* 267), et soit donnée la trace H^x d'un plan X passant par une génératrice droite G du conoïde Σ (*fig.* 269), ce plan X touchera la surface Σ en un point x situé sur la droite G, et l'on demande de construire sa projection x^h, car sa hauteur au-dessus du plan horizontal est connue, puisqu'elle est égale à la distance de la droite G à ce plan, hauteur qui est donnée en $\overline{z_1 z'}$ au développement du cylindre φ.

Pour y parvenir, traçons la tangente θ_1 au point z_1 du cercle C_1 *transformée* (sur le développement du cylindre φ) de la courbe C; construisons au point z^h la tangente θ^h au cercle B; portons la sous-tangente $\overline{z'q'}$ sur θ depuis z^h jusqu'en q; traçons la droite $\overline{qA^h}$, nous aurons la trace horizontale H^{Σ_1} du paraboloïde Σ_1 se *raccordant* avec le conoïde Σ tout le long de la génératrice droite G.

Les deux traces H^x et H^{Σ_1} se coupent en un point p, et si par ce point p nous menons une droite L^h perpendiculaire à G^h, nous aurons en cette droite L^h la projection horizontale de la génératrice du *système* L suivant laquelle le paraboloïde Σ_1 est coupé par le plan X.

Les droites L^h et G^h se couperont au point x^h qui sera la projection horizontale du point x qui est le point de contact du plan X et du conoïde Σ.

Construire au moyen d'un conoïde le plan assujetti à passer par une droite et à être tangent à une surface donnée.

498 *bis*. Soient données une droite D et une surface Σ, imaginons une série de plans parallèles entre eux X, X', X''..... coupant respectivement la droite D aux points x, x', x''..... et la surface Σ suivant les courbes δ, δ', δ'',....,

Projetons orthogonalement la droite D et les courbes δ..... sur un plan H parallèle aux divers plans sécants X....., nous aurons les courbes δ^h, δ'^h, δ''^h,..... et la droite D^h et les points x^h, x'^h, x''^h,..... situés sur cette droite D^h.

Cela fait, imaginons par le point x une droite G tangente à la courbe δ et en un point d, par le point x' une droite G′ tangente à la courbe δ' et en un point d', et ainsi de suite.

Les diverses droites G formeront un conoïde Σ_1 ayant la droite D pour *directrice droite* et la courbe γ *lieu* des points d, d', d'',..... pour *directrice courbe*, et son plan *directeur* sera le plan H.

Le conoïde Σ_1 sera tangent à la surface Σ en tous les points de la courbe γ, car si par le point d on conçoit la tangente θ à la courbe γ et la tangente G à la courbe δ, ces deux droites θ et G détermineront un plan tangent à la surface Σ et au conoïde Σ_1 en ce point d.

Si donc pour un certain point m de la courbe γ, le plan Θ tangent à la surface Σ passe par la droite D, ce plan Θ sera le plan tangent demandé, et ce plan Θ sera aussi tangent au conoïde Σ_1.

Mais ce plan Θ sera tangent, non pas seulement pour le point m de la génératrice droite G_1 de ce conoïde, mais encore en tous les points de cette génératrice G_1; et en effet, les droites G..... se projetteront sur le plan H suivant des droites G^h..... passant respectivement par les points x^h..... et tangentes respectivement aux courbes δ^h..... en les points d^h..... Si nous supposons que les plans X, X′,..... sont successifs et infiniment voisins, les droites G et G′, G′ et G″,..... seront des génératrices droites successives et infiniment voisines.

Parmi toutes les droites G^h, G'^h, G''^h,..... successives et infiniment voisines, il y en aura une G_1^h qui fera avec D^h un angle α_1 plus petit que les angles $\alpha, \alpha', \alpha''$,..... que font, du même côté que α_1 et avec D^h, les droites G^h, G'^h, G''^h,.....

Si donc on mène par les points x, x', x'',..... des droites B, B′, B″,..... parallèles à la droite G_1, ces droites ne couperont pas les courbes $\delta, \delta', \delta''$,..... et elles formeront un plan Θ passant par la droite D et la droite G_1 et ne rencontrant la courbe γ qu'au point m dont la projection m^h sera sur δ_1^h le point de contact de G_1^h et de cette courbe δ_1^h.

Le plan Θ sera donc tangent en m et au conoïde Σ_1 et à la surface Σ et passera par la droite D, il sera donc le plan demandé.

Au point m, construisons la tangente θ_1 à la courbe γ, cette tangente sera dans le plan Θ; au point x_1, en lequel G_1 coupe D, le plan tangent T au conoïde Σ_1 passe par G_1 et D. Or, les droites D et θ_1 sont dans le plan Θ en même temps que la droite G_1, les deux plans T et Θ ne forment donc qu'un seul et même plan.

Si l'on voulait construire le paraboloïde hyperbolique Σ_2 se *raccordant* avec le conoïde Σ_1 tout le long de G_1, on devrait faire mouvoir la droite G_1 sur les deux droites D et θ_1 et parallèlement au plan H, on engendrerait donc le plan Θ; donc

le plan Θ est tangent au conoïde Σ_1 tout le long de la droite G_1 ; donc le conoïde Σ_1 est *développable* tout le long de cette génératrice droite G_1.

Dans la *pratique*, on ne peut pas avoir des courbes $\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots$ successives et infiniment voisines, on n'a jamais que des courbes à distance finie les unes des autres, mais que l'on peut prendre assez rapprochées les unes des autres pour que la droite G_2 qui fait avec D^h un angle α_2 plus petit que les angles $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots\ldots$ que font avec D^h les droites $G^h, G'^h, G''^h, \ldots\ldots$ situées à distance finie les unes des autres, pour que cette droite G_2, dis-je, occupe à très-peu près la position que doit rigoureusement et *géométriquement* occuper la droite désignée ci-dessus par G_1.

La méthode du *conoïde tangent*, pour construire le plan tangent à une surface Σ et assujetti à passer par une droite D, est donc une méthode *approximative* dans l'*application*, et de plus elle exige que la surface Σ soit définie par une série de sections horizontales $\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots$ que l'on prend ordinairement équidistantes entre elles. Cette méthode est due à *Meunier*, général du génie militaire ; il l'avait proposée pour la construction du plan de *défilement* (n° 383 *ter*).

De l'intersection d'une surface de révolution avec l'un ou l'autre des deux conoïdes précédents, la surface de révolution ayant la directrice droite A *pour axe de révolution.*

499. Si l'on a un conoïde Σ donné ainsi qu'il vient d'être dit ci-dessus et une surface de révolution Δ ayant pour axe de rotation la directrice droite A du conoïde, il sera facile de construire la projection horizontale δ^h de la courbe δ intersection de ces deux surfaces Σ et Δ.

Et en effet, il suffira de mener une suite de plans horizontaux $X, X', X'', \ldots\ldots$ lesquels couperont respectivement le conoïde Σ suivant une ou plusieurs génératrices droites et la surface de révolution Δ suivant un ou plusieurs cercles ayant tous leurs centres situés sur l'axe A.

On aura donc dans le plan X des droites $G, G_1, \ldots\ldots$ et des cercles $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1, \ldots\ldots$
— X' — $G', G'_1, \ldots\ldots$ et — $\mathfrak{c}', \mathfrak{c}'_1, \ldots\ldots$
Et ainsi de suite.

Dès lors les droites $G^h, G^h_1, \ldots\ldots$ couperont les cercles $\mathfrak{c}^h, \mathfrak{c}^h_1, \ldots\ldots$ (qui ont pour centre commun le point A^h) en des points $x^h \ldots\ldots$ qui seront les projections des points $x \ldots\ldots$, en lesquels se coupent dans l'espace les droites $G, G_1, \ldots\ldots$ et les cercles $\mathfrak{c}, \mathfrak{c}_1, \ldots\ldots$

Les points $x^h \ldots\ldots$ appartiendront donc à la courbe δ^h projection horizontale de la courbe δ lieu des points $x \ldots\ldots$ Et en opérant de même par rapport aux

droites et aux cercles situés respectivement dans les divers plans auxiliaires X′, X″,..... on obtiendra les divers points x^h,..... x'^h,..... x''^h,..... de la courbe demandée δ^h.

500. Étant donnée une courbe δ^h tracée sur un plan H, on pourra toujours regarder cette courbe comme la projection orthogonale sur ce plan H de la courbe δ intersection : 1° d'un certain conoïde Σ ayant le plan H pour plan *directeur* et pour *droite directrice* une perpendiculaire A au plan H, et 2° d'une certaine surface de révolution Δ ayant la droite A pour *axe* de rotation.

Et en effet :

Menons par la droite A un plan M, et traçons dans ce plan une courbe arbitraire γ, cette courbe γ en tournant autour de *l'axe* A engendrera une surface de révolution Δ dont elle sera la courbe méridienne.

Du point A^h comme centre et avec un rayon arbitraire R, traçons sur le plan H un cercle B et regardons ce cercle comme la section droite d'un cylindre φ ayant la droite A pour axe de révolution.

Par un point x^h de δ^h menons la droite G^h passant par le point A^h, cette droite G^h coupera le cercle B en un point z^h; du point A^h comme centre avec $\overline{A^h x^h}$ pour rayon, décrivons le cercle 6^h coupant la droite H^m en un point *p*; par ce point *p* menons dans le plan M une verticale coupant la courbe γ en un point *y*.

Cela fait, par le point z^h concevons la génératrice droite K du cylindre φ et portons de z^h en z sur cette droite K une longueur égale à $\overline{py}$; opérons de même pour tous les points x^h de la courbe δ^h, nous obtiendrons sur le cylindre φ une suite de points z..... qui détermineront une courbe à double courbure C qui sera la *directrice courbe* du conoïde Σ.

Et les deux surfaces Σ et Δ se couperont suivant une courbe δ qui se projettera sur le plan H en la courbe donnée δ^h.

On voit donc que la courbe γ est arbitraire et que la courbe C prend une forme particulière et qui dépend : 1° de la nature géométrique et de la position sur le plan M de la courbe γ, et 2° de la nature géométrique de la courbe donnée δ^h, et de la position donnée au point A^h.

501. Les considérations géométriques précédentes nous permettront de construire graphiquement la tangente en un point quelconque d'une *spirale trigonométrique* et de certaines autres courbes dont on connaîtra l'équation *polaire*.

DES SPIRALES TRIGONOMÉTRIQUES.

502. Les spirales trigonométriques sont au nombre de sept, dont voici le tableau.

La spirale 1° *sinusoïde* ayant pour équation $\rho = a \sin. \omega$.
— 2° *cosinusoïde*. . . . . $\rho = a \cos. \omega$.
— 3° *tangentoïde*. . . . . $\rho = a \text{ tang. } \omega$.
— 4° *cotangentoïde*. . . . . . $\rho = a \text{ cotang. } \omega$.
— 5° *sécantoïde*. . . . . $\rho = a \text{ sécant. } \omega$.
— 6° *cosécantoïde*.. . . . . . . $\rho = a \text{ cosec. } \omega$.
— 7° *sinus-versoïde*. . . . . . $\rho = a \text{ sin.-vers. } \omega$.

La construction par *points* de chacune de ces spirales ne peut offrir de difficulté, nous supposerons donc que chacune de ces courbes est donnée par son *tracé*.

Le point A^h sera placé au *pôle* de la courbe spirale et la droite origine des angles ω sera prise perpendiculaire à H^m trace du plan méridien M, dont nous avons parlé ci-dessus.

Cela dit, appliquons les considérations géométriques exposées (n° 500) à la construction graphique de la tangente en un point de chacune de ces sept spirales.

1° *De la spirale sinusoïde.*

503. L'équation de la spirale sinusoïde est $\rho = a \sin. \omega$, traçons (*fig.* 270) un cercle B avec un rayon égal à a; menons par le centre A^h du cercle B un rayon $A^h n^h$ faisant avec le diamètre $A^h o$ un angle ω; abaissons du point n^h une perpendiculaire sur la droite $A^h o$ origine des angles ω; portons sur le rayon $A^h n^h$ du point A^h en m^h une longueur égale à pn^h, on aura en m^h un point de la spirale sinusoïde δ^h.

Et en effet désignant $\overline{A^h m^h}$ par ρ, comme $\overline{pn^h} = a \sinus \omega$, on aura par construction : $\rho = a \sin. \omega.$; pour $\omega = 0°$ tout comme pour $\omega = 180°$ et $\omega = 360°$, on a $\rho = 0$, donc la courbe δ^h passe par le centre du cercle B; pour $\omega = 90°$ tout comme pour $\omega = 270°$, on a $\rho = a$, donc la courbe δ^h passe par les points i et i' en lesquels le cercle B est coupé par le diamètre $A^h i$ perpendiculaire au diamètre origine des angles ω; la spirale sinusoïde a donc la forme d'un 8.

Par le point A^h élevons une droite A perpendiculaire au plan du cercle B et par cette droite A menons un plan M ayant pour trace H^m la droite ii'. Au point o me-

nons une tangente au cercle B et prenons cette tangente pour ligne de terre LT ou trace horizontale H^n d'un plan N tangent au cylindre φ ayant la droite A pour axe de rotation et le cercle B pour section droite.

Cela posé : du point A^h comme centre et avec un rayon égal à $\rho = A^h m^h$ décrivons un cercle 6^h coupant la droite H^n au point y, les deux points y et m^h seront sur une perpendiculaire à LT.

Dans le plan M traçons une courbe γ dont nous désignons par z les ordonnées parallèles à l'axe A et par ρ_1 les abscisses comptées sur H^n à partir du point A^h, pris pour origine des coordonnées z et ρ_1.

Nous pourrons poser l'équation $\rho_1 = f(z)$, qui sera l'équation de la courbe γ.

Projetons $\overline{pn^h}$ en $\overline{oq}$ et sur la droite LT élevons une droite $\overline{qn^v}$ égal au z de la courbe γ correspondant à l'abscisse $\rho_1 = \overline{A^h y}$; comme $\overline{oq} = \overline{pm^h} = \overline{A^h y} = \rho = \rho_1 = a.\sin.\omega$; on voit que si l'on trace sur le plan N (ou le plan vertical de projection LT) une courbe γ^v qui soit la projection de la courbe γ, l'équation de γ^v sera $x = f(z)$ en désignant $\overline{oq}$ par x.

Dès lors en faisant tourner la courbe γ autour de l'axe A on aura une surface de révolution Δ, et le cylindre projetant γ en γ^v coupera le cylindre φ suivant une courbe à double courbure C qui sera la *directrice courbe* du conoïde Σ ayant le plan du cercle B pour plan *directeur* et l'axe A pour *directrice droite*, et ces deux surfaces Δ et Σ se couperont suivant une courbe δ qui se projettera en δ^h. On voit donc que l'on peut avoir une infinité de systèmes de surfaces Δ et Σ s'entrecoupant suivant une courbe dont la projection soit la *spirale sinusoïde*, puisque l'on peut prendre pour $f(z)$ toute fonction en z que l'on voudra. Parmi tous ces *systèmes*, le plus simple est celui pour lequel la courbe γ est une ligne droite, qui, tracée dans le plan M, passe par le centre A^h du cercle B.

Alors, la surface Δ est un cône de révolution autour de l'axe A et ayant son sommet au point A^h, et la courbe directrice C est la section faite dans le cylindre vertical et de révolution φ par un plan qui, tangent au cône Δ, serait perpendiculaire au plan M. La courbe C sera donc une *ellipse* dont le centre sera précisément le sommet A^h du cône Δ.

Ce *système* permet de construire très-simplement la tangente en un point m^h de la *spirale sinusoïde* δ^h.

Et en effet :

Pour avoir la tangente θ au point m de la courbe δ, il faudra : 1° construire le plan T tangent en m au cône Δ, la trace H^T de ce plan sera perpendiculaire au rayon vecteur $A^h m^h$ et passera par le point A^h; 2° construire le plan Θ tangent en m au conoïde Σ; or, il est évident que la droite K^h qui, passant pas le point m^h, sera perpendiculaire à $A^h m^h$, sera la projection horizontale de la génératrice K du *second*

système du paraboloïde Σ_1 se raccordant avec le conoïde Σ tout le long de la génératrice droite horizontale G qui, s'appuyant sur l'axe A et l'ellipse C, passe par le point *m*. Cette droite K percera le plan horizontal au point *s* situé sur la droite $A^h o$; si donc par ce point *s* on mène la droite H^θ parallèle à $A^h m^h$ (qui représente G^h), on aura la trace horizontale du plan Θ.

Les deux droites H^r et H^θ se coupent en un point *b* qui sera la trace horizontale de la tangente θ; dès lors $\overline{bm^h}$ sera la tangente au point m^h de la *spirale sinusoïde*.

Dans la *fig*. 271, nous avons donné les seules constructions graphiques à exécuter pour avoir la tangente θ en un point *m* d'une *spirale sinusoïde* δ, le point *o* étant le *pôle* et la droite *o*R étant l'origine des angles ω.

Dans cette figure il est facile de voir que $ms = ob$; que *bsmo* est un rectangle; que la tangente θ coupe la droite *o*R en un point *p* qui est le milieu de *bm* et de *so*, et que dès lors pour avoir la tangente θ il suffit d'élever sur le milieu *r* du rayon vecteur $\rho = om$ une perpendiculaire à ce rayon vecteur, laquelle coupera la droite *o*R en un point *p*, et la droite *pm* sera la tangente θ demandée.

2° *De la spirale cosinusoïde.*

504. Si l'on a construit la spirale sinusoïde δ (*fig*. 272), *o* étant le *pôle* et *o*R la droite origine des angles ω, on a l'équation

$$\rho = a . \sin . \omega$$

Mais si au lieu de compter les arcs (qui dans le cercle B mesurent les angles ω) à partir du point *b* en marchant sur le cercle B dans le sens indiqué par la flèche *f*, on comptait des arcs mesurant des angles ω' complémentaires des angles ω en partant du point *b'* et marchant sur le cercle B dans le sens indiqué par la flèche *f'*, on voit de suite que pour un point *m* de la courbe δ on aura :

$$om = pn = op' \quad \text{or} \quad pn = a \sin \omega \quad \text{et} \quad op' = a \cos \omega'$$

Donc l'on aura pour l'équation de la courbe δ

$$\text{ou} \quad \rho = a \sin \omega \quad \text{ou} \quad \rho = a \cos \omega'$$

La spirale cosinusoïde n'est donc autre que la spirale sinusoïde.

504 *bis*. Si l'on cherche par l'*analyse* l'équation polaire d'un cercle, en suppo-

sant que le *pôle o* est situé sur la circonférence, on trouve précisément $\rho = a \sin \omega$ ou $\rho = a \cos \omega'$, suivant que l'on compte les angles ω à partir de la tangente menée au cercle par le *pôle o*, ou que l'on compte les angles ω' à partir du diamètre passant par ce *pôle o*.

Et il est facile de voir qu'en faisant varier le *signe* de la ligne trigonométrique (*sinus* ou *cosinus*) ou en faisant varier les angles ω ou ω' depuis 0° jusqu'à 360°, les équations $\rho = a \sin \omega$ et $\rho = a \cos \omega'$ représentent deux cercles de même rayon et tangents l'un à l'autre par le *pôle o*.

Sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*, il nous sera facile de démontrer que la spirale *sinusoïde* ou *cosinusoïde* n'est autre, en effet, que deux cercles de même rayon et tangents l'un à l'autre au *pôle o* (*fig.* 271 *bis*).

Et en effet, nous avons trouvé que la spirale δ jouissait de la propriété remarquable, savoir : que si d'un point quelconque p, p'..... de la droite R origine des angles ω, on menait une tangente à cette courbe δ, on avait toujours $\overline{po} = \overline{pm}$, $\overline{p'o} = \overline{p'm'}$,..... On devra donc pourvoir construire une série de cercles C, C',..... tous tangents entre eux au point o et respectivement tangents à la spirale δ, au point m, m',..... La courbe δ sera dont l'*enveloppe* de la série des cercles C, C',..... considérés comme des *enveloppées*. Mais tous ces cercles C, C',..... s'enveloppent les uns les autres ; il est dès lors impossible de construire une courbe δ qui leur soit tangente en d'autres points que le point o qui est leur point de contact et qui est le seul point que ces cercles puissent avoir en commun en les considérant deux à deux, et en considérant deux cercles successifs et infiniment voisins.

La courbe δ et tous les cercles C, C',..... doivent donc se confondre en une seule et même courbe, et dès lors il est démontré (puisque d'ailleurs la spirale δ doit couper la droite R' en deux points distants chacun du *pôle o* d'une quantité égale à a), que la spirale δ n'est autre que deux cercles tangents l'un à l'autre et ayant chacun leur rayon égal à : $(\frac{1}{2} a)$.

3° *De la spirale tangentoïde.*

505. L'équation de la spirale tangentoïde est $\rho = a$ tang. ω ; traçons un cercle B (*fig.* 273) (avec un rayon égal à a), et menons par son centre A^h un rayon $A^h q$ coupant au point q la tangente au cercle B menée au point o en lequel ce cercle B est coupé par la droite $A^h o$, origine des angles ω. On aura :

$$oq = a \,.\, \text{tang} \,.\, \omega$$

Portons oq de A^h en m^h, nous aurons alors un point m^h d'une courbe δ^h, dont l'équation sera précisément $\rho = a.$ tang. ω, en désignant $\overline{A^h m^h}$ par ρ.

Cela posé :

Du point A^h comme centre et avec $\overline{A^h m^h}$ pour rayon, décrivons un cercle $\mathfrak{S}^h$ coupant la droite H^u perpendiculaire à la droite $A^h o$ en un point p, on aura :

$$A^h m^h = oq = A^h p$$

Dès lors, désignant $A^h p$ par ρ_1, on pourra dans le plan M tracer une courbe γ ayant pour équation

$$\rho_1 = f(z)$$

Et désignant oq par x, l'équation de γ^v sera

$$x = f(z)$$

Si l'on fait tourner la courbe γ autour de l'axe A, on aura une surface de révolution Δ ; et si l'on fait mouvoir parallèlement au plan horizontal de projection une droite G s'appuyant sur l'axe A et sur la courbe γ^v, on aura un conoïde Σ.

Les deux surfaces Δ et Σ se couperont suivant une courbe δ dont la projection δ^h sera la *spirale tangentoïde*.

On peut prendre pour $f(z)$ une fonction de z de telle forme que l'on voudra, on aura donc une infinité de *systèmes* de surfaces Δ et Σ donnant la spirale tangentoïde pour la projection de la courbe à double courbe δ suivant laquelle elles s'entre-coupent.

Parmi tous ces *systèmes* le plus simple sera celui pour lequel la courbe γ sera une droite passant par le point A^h ; dès lors, la *ligne* γ^v sera une droite parallèle à la droite γ.

Dans ce *système* particulier, la surface Δ sera un *cône* de révolution ayant son sommet au point A^h et ayant la droite A pour axe de révolution et le conoïde Σ sera un *paraboloïde hyperbolique* ayant les droites A et γ^v pour *directrices* et le plan horizontal de projection pour plan *directeur*.

506. La construction de la tangente en un point m^h de la spirale tangentoïde sera facile ; car elle sera la projection de la droite intersection du plan T tangent en m au cône Δ et du plan Θ tangent en ce même point m au paraboloïde hyperbolique Σ.

J'ai indiqué sur la *fig.* 273 toutes les constructions, il sera facile de les lire,

puisque nous avons appris à construire le plan tangent en un point d'un paraboloïde hyperbolique.

507. La construction de la tangente θ en un point m d'une spirale tangentoïde δ, (*fig.* 274) dont on connaît le *pôle* o et la droite oR origine des angles ω, se réduit donc en définitive aux opérations graphiques suivantes :

Par le point o on mène une droite or perpendiculaire au rayon vecteur om; par le point m on mène une droite ms perpendiculaire à la droite oR et la coupant au point s; par ce point s on mène une droite sr parallèle au rayon vecteur om et coupant la droite or au point r; en joignant les points r et m on a la tangente θ demandée (*).

4° *De la spirale cotangentoïde.*

508. Si pour une courbe δ^* dont l'équation est $\rho = a$ cot. ω, nous faisons les mêmes constructions que pour la spirale tangentoïde, il est facile de voir que cette courbe δ^* sera encore la projection de l'intersection d'un cône droit Δ et d'un paraboloïde hyperbolique Σ, ces deux surfaces Δ et Σ étant placées l'une par rapport à l'autre absolument comme le cône et le paraboloïde le sont, lorsque nous avons examiné la spirale tangentoïde. Nous pouvons donc affirmer que les spirales tangentoïde et cotangentoïde dont les équations sont :

$$\rho = a \operatorname{tang} \omega \qquad \text{et} \qquad \rho = a \cot \omega$$

sont des courbes identiques, en se sens qu'en laissant l'une fixe et faisant tourner l'autre autour du *pôle*, on pourra superposer ces deux courbes.

5° *De la spirale sécantoïde* et 6° *De la spirale cosécantoïde.*

509. Il suffit de jeter les yeux sur la *fig.* 275 pour reconnaître que la courbe représentée par l'équation : $\rho = a$ sécant ω, n'est autre que la droite D tangente en n au cercle B ayant son rayon égal à a, et que la courbe représentée par l'équation : $\rho = a$ cosécant ω', n'est autre que la droite D' tangente au point n' au même cercle B.

(*) *Voyez*, dans les *Compléments de géométrie descriptive*, le mémoire qui a pour titre : *Construction de la tangente en un point multiple d'une courbe dont l'équation est inconnue;* memoire que j'ai publié pour la première fois dans le 21e cahier du Journal de l'École polytechnique.

Voyez aussi, dans les *Développements de géométrie descriptive*, le chapitre II, page 124.

7° *De la spirale sinus-versoïde.*

510. L'équation de la spirale sinus-versoïde est : $\rho = a$ sin-vers ω ; pour construire cette courbe, nous tracerons (*fig.* 276) un cercle B avec un rayon égal à a; la ligne LT passant par son centre A^h étant prise pour origine des angles ω, nous porterons sur le rayon vecteur $A^h n$, le sinus-verse $\overline{op}$ depuis le point A^h jusqu'en m^h; et la courbe δ^h, lieu des points m^h, aura la forme d'un 8 (ses branches se croisant au point A^h centre du cercle B et touchant ce même cercle B aux points i et i' situés sur le diamètre perpendiculaire à LT).

Cela posé :

Si nous prenons la droite LT pour ligne de terre, nous pourrons tracer dans le plan vertical de projection LT une courbe γ ayant pour équation $\rho_1 = f(z)$.

Ayant élevé par le point A^h la verticale A, la courbe γ aura une position déterminée par rapport à cet axe A; faisons glisser parallèlement à lui-même l'axe A pour le transporter en A', en cette position la droite A' perce la ligne de terre LT au point o situé sur le cercle B et la courbe γ aura pris une position parallèle γ'.

Cela posé, faisons tourner la courbe γ autour de l'axe A, on aura une surface de révolution Δ ; regardons la courbe γ' comme la base sur le plan vertical LT d'un cylindre ξ ayant ses génératrices droites perpendiculaires au plan vertical LT, ce cylindre ξ coupera le cylindre de révolution φ, qui a le cercle B pour base horizontale et pour section droite, suivant une courbe C ; et le conoïde Σ sera engendré par une droite G se mouvant parallèlement au plan horizontal de projection en s'appuyant sur l'axe A et la courbe C.

Les deux surfaces de révolution Δ et conoïde Σ s'entre-couperont suivant une courbe δ dont la projection δ^h sera précisément la courbe *sinus-versoïde.*

Parmi les divers *systèmes* de surface Δ et Σ, on peut prendre le plus simple, qui sera celui pour lequel la courbe γ sera une droite D passant par le point A^h centre du cercle B. Dès lors la surface Δ sera un cône de révolution ayant son sommet au point A^h et ayant la droite A pour axe de rotation, et la courbe C sera une *ellipse*, car alors γ' sera une droite D' parallèle à D et passant par le point o, et le cylindre ξ sera un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection et ayant pour trace V^p la droite D' elle-même.

Le conoïde Σ aura donc pour *directrice courbe* l'ellipse C section faite dans le cylindre φ par le plan P.

511. Les surfaces particulières Δ et Σ permettent de construire assez simplement la tangente en un point m^h de la sinus-versoïde δ^h ; et en effet, cette tangente sera

l'intersection des plans T tangent au cône Δ au point m, et du plan Θ tangent au conoïde Σ en ce même point m.

Il est évident que H^r passera par le point A^h et sera perpendiculaire au rayon vecteur $A^h m^h$.

Pour construire H^θ, nous mènerons au point n en lequel le cercle B est coupé par la droite $A^h m^h$ une tangente à ce cercle, laquelle coupera H^r en un point s. La droite sA^h sera donc la trace horizontale du paraboloïde hyperbolique Σ_1 se *raccordant* avec le conoïde Σ tout le long de la génératrice droite G passant par le point m.

Si donc nous menons par m^h une droite K^h perpendiculaire au rayon vecteur $A^h m^h$, elle percera la droite sA^h en un point r qui sera la trace horizontale de la génératrice du *second système* K du paraboloïde Σ_1.

Dès lors menant par le point r une droite H^θ parallèle à $\overline{A^h m^h}$ qui n'est autre que G^h, on aura la trace du plan Θ.

Les deux traces H^r et H^θ se coupent en un point b et unissant les points b et m^h, on aura la tangente à la courbe δ^h.

Dans la *fig.* 277, nous n'avons tracé que les lignes strictement nécessaires pour la construction de la tangente en un point m d'une sinus-versoïde δ, dont le point o serait le *pôle* et la droite op l'*origine* des angles ω.

512. Appliquons les principes exposés ci-dessus à quelques autres courbes dont l'équation polaire serait :

8° $\rho.\omega = a$ . . . . spirale hyperbolique;
9° $\rho = a.\omega$ . . . . spirale d'Archimède;
10° $\rho^2 = a.\omega$ . . . . spirale parabolique du premier genre,
11° $\rho = a.\omega^2$ . . . . spirale parabolique du second genre.

8° *Spirale hyperbolique*, $\rho\omega = a$.

513. En se rappelant ce que nous avons dit ci-dessus, on voit de suite que la courbe γ tracée dans le plan M passant par l'axe A aura pour équation : $\rho_1 = f(z)$.

Et si nous rectifions l'arc $a\,\omega$ du cercle B ayant son rayon égal à a (l'angle ω étant sous-tendu par cet arc) nous aurons x, dès lors la courbe C_1 *transformée* de la directrice courbe C du conoïde Σ aura pour équation $\frac{a^2}{x} = f(z)$.

Le système le plus simple sera celui pour lequel nous prendrons z pour $f(z)$, et alors l'équation de la courbe γ sera $\rho_1 = z$ et celle de la courbe plane C_1 sera $a^2 = xz$.

La surface de révolution Δ sera donc un cône ayant son sommet au centre du cercle B et ayant la droite A pour axe de rotation; et la courbe directrice C du conoïde Σ aura pour *transformée* une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes une verticale et une horizontale, le centre de cette courbe étant situé sur la droite origine des angles ω.

La construction de la tangente en un point de la spirale hyperbolique sera plus facile, puisqu'elle dépendra de la tangente à l'hyperbole C_1 (*).

Et en effet, soit donnée la spirale hyperbolique δ^h ayant le point A^h (*fig.* 277 *bis*) pour *pôle* et en même temps pour *point asymptote;* de ce point A^h comme centre et avec un rayon égal à a, décrivons un cercle B et menons au point o une tangente LT à ce cercle (la droite oA^h étant l'origine des angles ω).

Dans le plan vertical LT, traçons une hyperbole C_1 ayant pour asymptotes la droite LT et une verticale A^v, le centre de cette courbe étant au point o et son équation étant $a^2 = xz$, l'équation polaire de la spirale hyperbolique tracée sur le plan horizontal sera $\rho\omega = a$.

Pour construire au point m^h de la courbe spirale hyperbolique δ^h la tangente t^h, nous remarquerons que le rayon vecteur $A^h m^h$ coupe le cercle B au point n^h, et que si l'on rectifie l'arc on^h pour le porter sur LT de o en n', et si par n' on élève une verticale coupant l'hyperbole C_1 au point n_1, et si l'on mène au point n_1 la tangente θ_1 à cette hyperbole C_1, cette tangente θ_1 coupant LT au point p', on aura $p'n' = n'o$.

Si donc on mène au point n^h la tangente θ^h au cercle B et si l'on porte sur θ^h à partir du point n^h, $n^h p = n'p' = n'o =$ (arc. om^h rectifié) et si l'on unit le point p avec le point A^h par une droite H^{Σ_1}, on aura en cette droite H^{Σ_1} la trace horizontale du paraboloïde hyperbolique Σ_1 se *raccordant* avec le conoïde Σ tout le long de la génératrice droite G qui est horizontale et qui passe par le point m de la courbe δ intersection du cône de révolution Δ et du conoïde Σ ayant pour *courbe directrice* l'hyperbole C_1 enroulée sur le cylindre φ de révolution; la tangente t^h au point m^h de la spirale hyperbolique δ^h sera donc la projection de l'intersection du plan T tangent en m au cône Δ, et du plan Θ tangent en m au paraboloïde Σ_1.

Or, H^T passera par le point A^h et sera perpendiculaire au rayon vecteur $\overline{A^h m^h}$; et pour avoir H^Θ, nous mènerons par le point m^h une droite K^h perpendiculaire au rayon vecteur $A^h m^h$ et rencontrant la droite H^{Σ_1} en un point q; par ce point q nous

---

(*) *Voyez*, dans le chapitre II des *Développements de géométrie descriptive*, ce qui est relatif à la spirale hyperbolique.

mènerons H^e parallèle à $A^h m^h$ (ou G^h) et les deux droites H^e et H^r se couperont en un point r; en unissant par une droite les points r et m^h, on aura la tangente t^h au point m^h dela spirale hyperbolique.

Remarquons que la droite $\overline{m^h q}$ est égale à l'arc $m^h s$ rectifié, cet arc étant compté sur le cercle décrit du point A^h (*pôle* de la spirale) comme centre et avec un rayon égal à $A^h m^h$ (rayon vecteur de la spirale) et le point s étant sur la droite origine des angles ω.

9° *Spirale d'Archimède*, $\rho = a\omega$.

514. La courbe γ aura pour équation $\rho_1 = f(z)$ et la courbe C_1 aura pour équation $x = f(z)$.

Le *système* le plus simple sera donc celui pour lequel on aura : $\rho_1 = z$ et $x = z$. En sorte que la surface de révolution Δ sera un cône ayant son sommet au centre du cercle B qui a son rayon égal à a et qui a pour centre le *pôle* de la spirale et la surface conoïde Σ aura pour directrice courbe C une *hélice* tracée sur le cylindre de révolution φ (*).

10° *Spirale parabolique*, $\rho^2 = a\omega$.

515. La courbe γ aura pour équation $\rho_1^2 = f(z)$ et la courbe C_1 aura pour équation $x = f(z)$.

Les surfaces les plus simples Δ et Σ seront donc celles que l'on obtiendra avec les équations $\rho_1^2 = z$ et $x = z$.

Dès lors la surface de révolution Δ sera un paraboloïde de révolution ayant la droite A pour axe de rotation et le conoïde Σ aura pour directrice courbe C une *hélice* tracée sur le cylindre de révolution φ.

La construction de la tangente en un point de la spirale parabolique du *premier genre*, n'offrira aucune difficulté puisqu'elle dépendra de la construction de la tangente en un point d'une hélice cylindrique et circulaire et de celle de la tangente en un point d'une parabole.

(*) *Voyez*, dans le chapitre II des *Développements de géométrie descriptive*, ce qui est relatif à la spirale d'Archimède considérée comme étant la projection de la courbe d'intersection d'une surface annulaire et d'un conoïde.

11° *Spirale parabolique*, $\rho = a_1 \omega^2$.

516. La courbe γ aura pour équation $\rho_1 = f(z)$, et la courbe C_1 aura pour équation $\frac{x^2}{a} = f(z)$.

Les surfaces les plus simples seront celles que l'on obtiendra en vertu des équations : $\rho_1 = z$ et $x^2 = az$. Dès lors la surface de révolution Δ sera un cône ayant son sommet au centre du cercle B (décrit du *pôle* de la spirale comme centre et avec un rayon égal à a) et ayant la droite A pour axe de rotation. La surface conoïde Σ aura pour courbe directrice C une courbe à double courbure tracée sur le cylindre φ, et dont la *transformée* sera une parabole C_1 ayant son sommet sur la droite origine des angles ω et son axe infini parallèle à la droite A.

La construction de la tangente en un point de la spirale parabolique *du second genre* n'offrira aucune difficulté, puisqu'elle dépend de la construction de la tangente en un point de la parabole C_1 (*).

517. Exécutons la construction de la tangente en un point de la spirale parabolique $\rho = a\omega^2$.

Le centre A^h du cercle C (*fig.* 278) sera le *pôle* de la spirale et la droite oA^h sera l'origine des angles ω. Ayant mené la droite LT tangente au cercle A au point o, nous tracerons dans le plan vertical de projection LT (qui est tangent au cylindre φ ayant le cercle B pour section droite) une parabole C_1 ayant son sommet au point o et la verticale A^v pour axe infini, cette parabole C_1 ayant pour équation $x^2 = az$ (les x sont comptés sur LT et les z sur A^v).

Cela posé :

Proposons-nous de construire la tangente t^h au point m^h de la spirale δ^h. Le rayon vecteur A^hm^h coupera le cercle B au point n^h ; rectifions l'arc on^h et portons-le sur LT de o en n' ; par le point n' élevons une verticale $n'n_1$ coupant la parabole C_1 au point n_1, ce point n_1 sera le *transformé* du point n de la courbe à double courbure C qui, tracée sur le cylindre φ, sera la *directrice courbe* du conoïde Σ.

Le plan T tangent en m au cône de révolution Δ aura sa trace H^T passant par le point A^h et perpendiculaire au rayon vecteur $\overline{A^hm^h}$.

La tangente θ au point n de la courbe C se projettera en θ^h tangente en n^h au cercle B (qui n'est autre chose que C^h), et la *transformée* θ_1 de θ sera la tangente

---

(*) *Voyez*, dans le chapitre II, page 114, des *Développements de géométrie descriptive*, ce que nous avons dit sur la spirale parabolique ayant pour équation $\rho = a^2 . \omega^2$, courbe qui nous a servi pour la construction du rayon de courbure de la spirale d'Archimède.

en n_1 à la parabole C_1. Or on sait que pour la parabole on a : $op' = p'n'$, dès lors portant la sous-tangente $n'p'$ sur θ^h, du point n^h au point p, on aura en p la trace horizontale de la droite θ; et en joignant les points p et A^h par une droite H^{Σ_1} on aura la trace du paraboloïde hyperbolique Σ_1 qui se *raccorde* avec le conoïde Σ tout le long de la génératrice droite G (horizontale et passant par le point m).

Si donc on mène par le point m^h une droite m^hq perpendiculaire au rayon vecteur A^mm^h, cette perpendiculaire coupera H^{Σ_1} en un point q et menant par q une droite H^{Θ} parallèle au rayon vecteur A^hm^h (qui n'est autre que G^h), on aura la trace horizontale du plan Θ tangent en m au conoïde Σ. Les traces H^r et H^{Θ} se coupent en un point r, unissant les points r et m^h on aura la tangente t^h demandée.

Remarquons que l'on a : $on' =$ (arc . on^h rectifié), $n'p' = \frac{1}{2} on'$, donc $qm^h = \frac{1}{2}$ (arc sm^h rectifié). Ce qui s'accorde parfaitement avec les résultats que nous avions trouvés page 114 des *Développements de géométrie descriptive*. Ainsi, sans avoir besoin de recourir à l'*analyse*, nous pouvons trouver par la *géométrie descriptive* une propriété qui nous permet de construire très-simplement la tangente en un point de la spirale parabolique *du second genre*, $\rho = a . \omega^2$.

518. Si l'on a une courbe plane δ^h ayant pour équation polaire $f(\rho . \omega) = 0$, nous pourrons toujours, par le *pôle*, mener une droite A perpendiculaire au plan P de la courbe δ^h et de ce *pôle* comme centre et avec un rayon égal à l'unité linéaire, tracer dans le plan P un cercle B.

Ce cercle B sera coupé en un point b par la droite R origine des angles ω, en ce point b nous mènerons une tangente au cercle B, et nous prendrons cette droite pour ligne de terre LT.

Traçons dans le plan vertical de projection LT une droite Z qui, passant par le point b soit perpendiculaire à la droite LT; cela fait, menons par la droite A un plan M parallèle au plan vertical de projection LT; ce plan M aura pour trace sur le plan P la droite H^m.

Cela posé :

Traçons dans le plan M une droite γ ayant pour équation $\rho_1 = z$, les abscisses ρ_1 étant comptées sur la droite H^m et les ordonnées z étant comptées sur la droite A, le *pôle* de la courbe δ^h étant l'origine de ces coordonnées ρ_1 et z.

Traçons ensuite dans le plan vertical LT une courbe C_1 ayant pour équation $F(x, z) = 0$, les abscisses x étant comptées sur la droite LT et les coordonnées z étant comptées sur la droite Z, le point b étant l'origine de ces coordonnées x et z et l'abscisse x étant égale à l'arc rectifié, qui, dans le cercle B, mesure l'angle ω.

On voit que l'équation $F(x, z) = 0$ sera identique à l'équation $F(\omega, \rho) = 0$ en remplaçant dans l'une x par ω et z par ρ.

Ainsi l'équation de la courbe C_1 est précisément en coordonnées rectangulaires identique de forme à l'équation polaire de la courbe δ^h.

Enroulons le plan vertical LT sur le cylindre vertical φ ayant le cercle B pour base sur le plan P, ou, en d'autres termes, ayant le cercle B pour section droite; la courbe plane C_1 deviendra une courbe à double courbure C et le cône Δ de révolution ayant la droite γ pour génératrice droite et pour *axe* la droite A et pour sommet le *pôle* de la courbe δ^h, coupera le conoïde Σ engendré par une droite G se mouvant parallèlement au plan P en s'appuyant sur la droite A et la courbe C, suivant une courbe δ qui aura pour projection orthogonale sur le plan P, précisément la courbe δ^h.

Cela posé :

Si l'équation $F(\rho, \omega) = 0$ est du second degré, l'équation $F(z, x) = 0$ sera aussi du second degré; on voit donc que l'on pourra facilement construire la tangente en un point de toute courbe δ^h, dont l'équation polaire sera du second degré, puisque les constructions à effectuer n'exigeront que de savoir construire graphiquement la tangente en un point d'une section conique C_1.

Si l'équation de la courbe δ^h était $F(\rho^2, \omega) = 0$, alors on prendrait sur le plan M une parabole ayant pour équation $\rho_1^{\,2} = z$ et pour C_1 une section conique ayant pour équation $F(z, x) = 0$.

Et alors la courbe δ^h serait la projection de la courbe δ intersection d'un paraboloïde de révolution Q ayant la droite A pour *axe* et son sommet situé au *pôle* de la courbe δ^h, et d'un conoïde Σ engendré par une droite G se mouvant dans l'espace en s'appuyant sur la droite A et sur la courbe C tout en restant horizontale.

On voit donc que nous pourrons toujours construire *graphiquement* la tangente aux courbes représentées par les équations *polaires*.

1° $\quad \rho^2 + a\rho\omega + b\omega^2 + c\rho + d\omega + f = 0$

2° $\quad \rho^4 + a'\rho^2\omega + b'\omega^2 + c'\rho^2 + d'\omega + f' = 0$

519. Remarquons que la courbe polaire δ^h dont l'équation est

$$\rho^2 + a\rho\omega + b\omega^2 + c\rho + d\omega + f = 0 \qquad (1)$$

est la projection de la courbe, intersection des deux surfaces qui sont déterminées en vertu des deux équations :

$$\rho_1 = z \qquad (2)$$

$$z^2 + axz + bx^2 + cz + dx + f = 0 \qquad (3)$$

ou en vertu des deux équations :

$$\rho_1^{-2} = z \qquad (4)$$

$$z + axz^{\frac{1}{2}} + bx^2 + cz^{\frac{1}{2}} + dx + f = 0 \qquad (5)$$

Dès lors, il est évident que nous saurons construire *graphiquement* la tangente à la courbe dont l'équation polaire sera :

$$\rho + a\omega\rho^{\frac{1}{2}} + b\omega^2 + c\rho^{\frac{1}{2}} + d\omega + f = 0 \qquad (6)$$

car, comme nous savons construire la tangente à la courbe polaire ayant pour équation l'équation (1), et cela en vertu des équations (2) et (3), il nous sera facile de construire *graphiquement* la tangente à la courbe ayant pour équation l'équation (5), et cela en vertu des équations (1) et (4).

Par suite, nous saurons construire *graphiquement* la tangente en un point d'une courbe représentée *en coordonnées polaires* par l'équation (6).

Cela posé :

Remarquons encore que la courbe polaire δ^4, dont l'équation est

$$\rho^4 + a\rho^2\omega + b\omega^2 + c\rho^2 + d\omega + f = 0 \qquad (7)$$

est la projection de la courbe intersection de deux surfaces qui sont déterminées en vertu des deux équations :

$$\rho_1^{-2} = 0 \qquad (8)$$
$$z^2 + azx + bx^2 + cz + dx + f = 0 \qquad (9)$$

ou en vertu des deux équations :

$$\rho_1 = z \qquad (10)$$
$$z^4 + az^2x + bx^2 + cz^2 + dx + f = 0 \qquad (11)$$

Dès lors, il est évident que nous saurons construire *graphiquement* la tangente à la courbe en *coordonnées rectangulaires* représentée par l'équation (11), puisque nous savons construire la tangente aux courbes représentées par les équations (7) et (10).

En poursuivant les raisonnements géométriques précédents, il est facile de reconnaître qu'au moyen des tangentes aux courbes de degrés inférieurs, et en passant *graphiquement* et successivement des unes aux autres (constructions qui seront, il est vrai, assez longues, puisque pour la courbe du huitième degré, par exemple, il faudra construire la tangente à la courbe du deuxième pour en déduire *graphiquement* la tangente à la courbe du quatrième ; puis de la tangente à la courbe du quatrième degré, passer à la tangente de la courbe du sixième degré, et enfin conclure de cette dernière tangente et *graphiquement* la tangente à la courbe donnée du huitième degré), on pourra toujours construire *graphiquement* la tangente à une courbe en *coordonnées rectangulaires* ayant pour équation :

ou 1° $z^{2n}+az^{n}x+bx^{2}+cz^{n}+dx+f=0$

ou 2° $z^{\frac{1}{n}}+az^{\frac{1}{2n}}x+bx^{2}+cz^{\frac{1}{2n}}+dx+f=0$

et à une courbe en *coordonnées polaires* ayant pour équation :

ou 3° $\rho^{2n}+a\rho^{n}\omega+b\omega^{2}+c\rho^{n}+d\omega+f=0$

ou 4° $\rho^{\frac{1}{n}}+a\rho^{\frac{1}{2n}}\omega+b\omega^{2}+c\rho^{\frac{1}{2n}}+d\omega+f=0$

L'exposant n étant égal à une puissance entière de 2 ; et ainsi ayant $n=2.p$, p étant un nombre entier, pair ou impair.

519 *bis*. Il existe deux *spirales* logarithmiques, l'une a pour équation $\rho=a^{\omega}$, et l'autre a pour équation $a^{\rho}=\omega$. Chacune de ces courbes peut être considérée comme la projection horizontale δ^{h} dé l'intersection d'une surface de révolution Δ et d'un conoïde Σ que nous allons déterminer :

1° Pour la *spirale* $\rho=a^{\omega}$, la courbe méridienne de la surface Δ (la plus simple) aura pour équation $\rho_{1}=z$, et la courbe C_{1} aura pour équation $a^{x}=z$: elle sera donc une *logarithmique*.

Ainsi, la *spirale* sera la projection de l'intersection d'un cône de révolution et d'un conoïde dont la *directrice courbe* C aura pour *transformée* C_{1} une *logarithmique*.

2° Pour la *spirale* $a^{\rho}=\omega$, la courbe méridienne de la surface Δ (la plus simple) aura pour équation $a^{\rho_{1}}=z$ qui est celle d'une *logarithmique*, et la courbe C_{1} aura pour équation $x=z$; ainsi la *spirale* sera la projection de l'intersection d'une surface de révolution engendrée par une *logarithmique*, et le conoïde aura pour *directrice courbe* une hélice cylindrique.

La construction de la tangente en un point de l'une et de l'autre des deux *spirales* logarithmiques, dépendra donc de la construction de la tangente en un point d'une *logarithmique*.

519 *ter*. Nous avons vu ci-dessus que l'on pouvait construire la tangente en un point de l'une et de l'autre *spirale parabolique* dont les équations sont :

(1) $\rho^{2}=a.\omega$ et (2) $\rho=a.\omega^{2}$;

et cela, en considérant chacune de ces spirales comme la projection de la courbe intersection d'une surface de révolution et d'un conoïde.

Si l'on transforme, *dans son plan même*, chacune de ces spirales en une courbe en *coordonnées rectangulaires*, en remplaçant dans leur équation ρ par z et $\omega.\rho$ par y, on obtiendra les deux courbes (3) $z^{3}=a.y$ et (4) $z^{3}=a.y^{2}$.

On saura donc construire la tangente en l'un quelconque des points des courbes représentées par les équations (3) et (4), et cela en vertu de ce que nous avons dit dans le chapitre II *des Développements de géométrie descriptive*, page 134 (*).

Je ne pousserai pas plus loin ces recherches *géométriques*, car on serait obligé pour les pousser plus loin d'employer des considérations *algébriques ;* toutefois, les considérations géométriques que je viens d'exposer ci-dessus, pourront, je crois, avec les développements *algébriques* nécessaires, être utiles à l'*analyse*.

DE LA SURFACE DU BIAIS-PASSÉ.

520. La surface du biais-passé est une surface gauche Σ engendrée par une droite G s'appuyant sur une droite A et sur deux cercles C et C′ de même rayon et situés respectivement dans deux plans P et P′ parallèles entre eux et verticaux et perpendiculaires à la droite A ; de plus les centres des cercles C et C′ et la droite A sont dans un même plan horizontal.

Cette surface Σ est donnée par le *premier mode* de génération des surfaces *gauches ;* cette surface n'offre rien de particulier, mais en généralisant son mode de génération et supposant que les cercles C et C′ sont deux courbes E et E′ telles que l'on sache construire la tangente en chacun de leurs points, elle permet de résoudre les deux problèmes suivants :

521. *Problème* 1. Étant donnés sur un plan un point o et deux courbes γ et γ' (telles que l'on sache leur construire une tangente en chacun de leurs points), ayant mené par le point o une série de divergentes D, D′, D″,.....

La droite	D	coupant la courbe γ	au point	m	et la courbe γ'	au point	n,
—	D′	—	—	m'	—	—	n',
—	D″	—	—	m''	—	—	n'',
—	etc.	—	—	etc.	—	—	etc.,

(*) Dans les *Développements de géométrie descriptive* nous avons construit (chapitre II, page 134) la tangente à la spirale d'Archimède $\rho = a.\omega$, au moyen de sa *transformée* en coordonnées rectangulaires : $x^2 = a.y$, qui est une *parabole*.

A ce sujet j'avais dit que cette propriété était connue, mais que j'ignorais qui en était l'auteur (*voyez* la note placée au bas de la page 134 des *Développements de géométrie descriptive*) ; en lisant dernièrement les œuvres de *Pascal*, réimprimées à Paris en 1819, j'ai vu que *Roberval* était le premier qui avait trouvé la parabole *compagne* de la spirale d'Archimède. (*Voyez*, dans les œuvres complètes de Pascal, tome V^e, page 401, le petit traité *de l'Égalité des lignes spirales et paraboliques*, publiées par Pascal sous le nom de *Dettonville*, 10 décembre 1658.)

et ayant pris sur chacune des droites D, D′, D″,..... un point x, x', x'',..... tel que l'on ait :

$$\frac{xm}{xn} = \frac{x'm'}{x'n'} = \frac{x''m''}{x''n''} = ... = a$$

construire la tangente en un des points de la courbe δ, lieu des points x, x', x'',..... déterminés ainsi qu'on vient de le dire (*fig.* 279).

Pour résoudre le problème *plan* proposé, nous passerons du plan dans l'espace, et dès lors nous regarderons la *figure* tracée sur le plan P comme étant la projection orthogonale sur ce plan P d'un certain *système* de l'espace.

Ainsi, traçant sur le plan P une droite quelconque LT nous la prendrons pour ligne de terre et le plan P pour plan vertical de projection ; deux droites E^h et E'^h parallèles à LT représenteront les projections horizontales de deux courbes planes E et E′ ayant pour projection verticale, savoir : E la courbe donnée γ sur laquelle nous écrirons le *symbole* E^v et E′ la courbe donnée γ' sur laquelle nous écrirons le *symbole* E'^v ; par le point o menant une droite perpendiculaire à LT, nous aurons A^h et le point o représentera A^v.

Cela posé, nous pourrons faire mouvoir une droite G sur les trois *directrices* A, E et E′, et nous obtiendrons une surface gauche Σ.

Si l'on coupe la surface Σ par un plan M parallèle aux plans des courbes E et E′, l'on obtiendra une courbe B ; et les divers points de cette courbe B ne seront autres que ceux en lesquels le plan M coupe les diverses génératrices droites G de la surface Σ.

Or, il est évident que si nous désignons par z..... y..... et y'..... les points en lesquels les diverses génératrices G..... sont respectivement coupées par les plans parallèles entre eux M, E et E′, on aura $\frac{zy'}{zy} = ... = \text{constante} = a$. Dès lors, on voit que la projection B^v de la courbe B coupera les droites D, D′, D″,..... (sur lesquelles on devra écrire les symboles G^v.....) en des points z^v..... tels que l'on aura $\frac{z^v y'^v}{z^v y^v} = ... = \text{constante} = a$. Dès lors, on pourra considérer la courbe δ comme étant la courbe B^v, le point m'' comme étant y^v, le point n'' comme étant y'^v, le point x'' comme étant z^v, la droite D″ comme étant G^v ; et abaissant des points y^v et y'^v des perpendiculaires à la ligne de terre jusqu'à leur rencontre y^h avec la droite E^h et y'^h avec la droite E'^h, on aura en unissant les points y^h et y'^h une droite qui sera G^h.

Cela fait, abaissant du point z^v une perpendiculaire à la ligne de terre jusqu'à sa rencontre en z^h avec G^h, on mènera par ce point z^h une parallèle B^h à la ligne

de terre, et l'on aura la trace du plan M et en même temps la projection B^h de la section plane B.

Par conséquent pour avoir la tangente à la courbe δ pour le point x'', il faudra construire les deux tangentes : 1° : θ^v à la courbe E^v (ou γ) pour le point y^v (ou m''), et 2° : θ'^v à la courbe E'^v (ou γ') pour le point y'^v (ou n'') et faire mouvoir la droite G sur les trois droites A, θ et θ'; on engendrera un hyperboloïde à une nappe Σ_1 qui se *raccordera* avec la surface Σ tout le long de la génératrice droite G qui leur est commune.

Cela fait, on construira le plan T tangent au point z à l'hyperboloïde Σ_1 et le plan M coupera le plan T suivant une droite t qui sera la tangente au point z à la courbe B, et la projection t^v de la droite t sera la tangente au point x'' de la courbe δ.

521 *bis*. *Problème* 2. Étant données sur un plan P trois courbes λ, γ et γ' telles que l'on sache leur construire en chacun de leurs points une tangente, ayant mené à la courbe λ une série de tangentes D, D', D'',..... coupant respectivement la courbe γ aux points $m, m', m'',$..... et la courbe γ' aux points $n, n', n'',$..... on divise les cordes $mn, m'n', m''n'',$..... en deux parties qui soient entre elles dans un rapport constant, ou bien l'on prend sur chaque droite D..... un point x..... tel que l'on ait : $\frac{xm}{xn} = ... = \text{constante} = a$; le lieu des points x..... sera une courbe δ pour laquelle on demande de construire la tangente en un de ses points.

Pour construire la tangente au point x de la courbe δ, nous considérerons les courbes γ et γ' comme les projections de deux courbes E et E' situées dans des plans parallèles entre eux et au plan P que nous prendrons pour plan vertical de projection, nous regarderons la courbe λ comme étant la trace verticale d'un cylindre φ ayant ses génératrices droites perpendiculaires au plan P, et nous aurons alors à considérer une surface gauche Σ engendrée par une droite G se mouvant sur les deux courbes E et E' et tangentiellement au cylindre φ.

La droite D qui sera G^v touche la courbe λ au point o qui représentera A^v projection verticale de la génératrice A du cylindre φ qui passe par le point en lequel ce cylindre φ est touché par la droite G.

Cela posé :

On achèvera les constructions comme dans la *fig*. 279, car à la surface Σ, on pourra substituer l'hyperboloïde à une nappe Σ_1 engendré par la droite G se mouvant sur les trois droites A, θ et θ', comme on l'a fait pour le *problème* 1 ci-dessus.

521 *ter*. Ce qui précède nous permet de démontrer très-simplement une pro-

priété dont jouissent *trois ellipses* ou *trois hyperboles* semblables et semblablement placées et qui ont une corde commune.

Si l'on conçoit un hyperboloïde à une nappe Σ et son cône asymptote Δ, on sait que tout plan T tangent au cône Δ suivant une génératrice droite L coupe l'hyperboloïde Σ suivant deux génératrices droites K et G qui sont parallèles entre elles et à la droite L.

Cela posé :

Coupons la surface Σ par trois plans P, P′, P″, parallèles entre eux, ces plans étant dirigés dans l'espace de manière à couper la surface Σ suivant des ellipses, leur direction étant d'ailleurs arbitraire, pourvu que cette condition soit satisfaite.

Nous aurons trois ellipses de section E, E′, E″. Nous pourrons toujours projeter orthogonalement ces trois courbes sur un plan Q perpendiculaire aux droites G et K et coupant ces droites respectivement en les points g et k. Les ellipses E, E′, E″ se projetteront sur le plan Q suivant trois ellipses E_1, E_1', E_1'' qui seront semblables et semblablement placées et qui auront pour corde commune la droite $\overline{gk}$.

Cela posé :

La surface Σ peut être regardée comme engendrée par la droite K se mouvant dans l'espace en s'appuyant sur la droite G et sur les deux ellipses E et E′ (l'hyperboloïde à une nappe rentre par ce mode tout particulier de génération, dans la famille des surfaces dites du *biais-passé*) ; dès lors une position quelconque K′ de la droite K se projettera orthogonalement sur le plan Q suivant une droite K_1' passant par le point g.

Cette droite K_1' coupera les ellipses E_1 et E_1' en les points m_1 et m_1' qui seront sur le plan Q les projections des points m et m' de l'espace en lesquels la droite K′ coupe les ellipses E et E′ ; le point x_1 en lequel la droite K_1' coupe la courbe E_1'' sera aussi la projection sur le plan Q du plan x en lequel la droite K′ coupe l'ellipse E″.

Or, les trois plans P, P′, P″ étant parallèles entre eux, toutes les parties $\overline{mm'}$... des diverses droites K′...... seront coupées en parties proportionnelles par le plan P″. On aura donc : $\frac{x_1m_1}{x_1m_1'} = \ldots\ldots = \text{constante} = a$.

Ainsi, l'ellipse E_1'' coupera en parties proportionnelles les *portions* interceptées sur les droites divergentes du point g par les deux ellipses E_1 et E_1'.

Il est évident que la même propriété subsiste pour *trois* hyperboles semblables et semblablement placées et qui ont une corde commune.

DES SURFACES HÉLICOÏDES.

522. Concevons deux cylindres de révolution et concentriques Δ et Δ'; coupons ces deux cylindres par un plan P perpendiculaire à leur axe commun A, nous aurons deux cercles C C' concentriques, et désignons par R et R' leurs rayons; traçons sur le cylindre Δ une hélice E ayant son *pas* égal à h et coupant les génératrices droites du cylindre sous un angle α.

Cela fait, imaginons une droite G se mouvant tangentiellement au cylindre intérieur Δ' en coupant ses génératrices droites sous un angle constant 6 et s'appuyant pendant son mouvement sur l'hélice E.

La droite G en chacune de ses positions touchera le cylindre Δ' en un point m, et tous les points m..... formeront sur le cylindre Δ' une hélice E' ayant même *pas* h que l'hélice E.

Dès lors, comme pour l'hélice E, on a $h = \frac{2\pi . R}{\text{tang. } \alpha}$, on aura pour l'hélice E' (en désignant par α' l'angle sous lequel elle coupe les génératrices droites du cylindre Δ') $h = \frac{2\pi . R'}{\text{tang. } \alpha'}$; d'où l'on déduit l'équation

$$\text{tang}\,\alpha' = \frac{R'}{R} . \text{tang}\,\alpha$$

Ainsi, quel que soit l'angle 6, l'inclinaison α' de l'hélice E' sera constante. La surface engendrée par la droite G a pris le nom d'*hélicoïde cylindrique*.

Si l'angle 6 est égal à l'angle α' la surface hélicoïde Σ sera *développable* et le plan P la coupera suivant une développante *parfaite* du cercle B'; si l'angle 6 est $>$ ou $<$ que l'angle α', la surface hélicoïde Σ sera *gauche* et le plan P la coupera suivant une développante *imparfaite* du cercle B', cette développante sera *raccourcie* si l'on a $6 < \alpha'$, et elle sera *rallongée* si l'on a $6 > \alpha'$ (n° 396).

523. Le mode de génération que nous venons d'exposer ci-dessus permet de reconnaître sur-le-champ toutes les variétés d'hélicoïdes cylindriques qui peuvent exister. Et en effet, l'angle 6 peut être égal à un angle droit ou plus petit qu'un angle droit, et en même temps le rayon R' peut être nul ou plus petit ou égal au rayon R.

Si l'on a R' $<$ ou $=$ R et $6 = 90°$, les génératrices droites G de la surface Σ seront parallèles au plan P qui sera le plan *directeur* de cette surface Σ, laquelle offrira un vide ou *jour* cylindrique, puisqu'elle a l'hélice E' ou E pour ligne de *gorge*, et elle sera *gauche*.

Si l'on a $R' <$ ou $= R$ et $\beta >$ ou $< 90°$ et $>$ ou $< \alpha'$ la surface Σ sera *gauche*, elle aura un cône *directeur* qui sera de révolution ayant l'axe A pour axe de rotation, et le demi-angle au sommet de ce cône directeur sera égal à β. La surface Σ offrira encore un *jour* cylindrique, car elle aura l'hélice E' ou E pour ligne de *gorge*.

Si l'on a $R' <$ ou $= R$ et $\beta = \alpha'$ ou $\beta = \alpha$, la surface Σ sera *développable*, et elle offrira un *jour* cylindrique, car cette surface aura l'hélice E' ou E pour *arête de rebroussement*.

Mais si l'on a $R' = 0$, quelle que soit la valeur de β, la surface Σ sera *gauche*, elle n'offrira aucun jour, elle sera *continue*, et dans ce dernier cas :

1° Si $\beta = 90°$, les génératrices G seront parallèles au plan P, ou, en d'autres termes, elles couperont l'axe A sous l'angle droit, la surface Σ est dite *surface du filet de vis carrée*.

2° Si β est $>$ ou $< 90°$, les génératrices G seront parallèles à un cône Δ_1 de révolution et ayant pour axe de rotation l'axe A, et le demi-angle au sommet de ce cône sera égal à β. La surface Σ est dite *surface du filet de vis triangulaire*.

Ainsi, la surface du filet *de vis carré* est un *conoïde;* elle a pour *directrices* une droite A et une hélice E, et elle a pour plan *directeur* un plan P perpendiculaire à la droite A.

Ainsi la surface du filet de *vis triangulaire* est une surface *gauche* donnée par le *second* mode de génération des surfaces gauches; elle a pour *directrices* une droite A et une hélice E et pour cône *directeur* un cône de révolution ayant son sommet en un point arbitraire de la droite A et ayant cette droite A pour axe de rotation.

524. Si l'on coupe la surface *gauche* dite : surface du filet de vis triangulaire par un plan P perpendiculaire à l'axe A, on obtient pour section une *spirale d'Archimède*, courbe dont l'équation *polaire* est $\rho = a\omega$.

525. Les surfaces hélicoïdes cylindriques forment donc deux *familles*, les unes ont un *plan directeur*, les autres ont un *cône directeur;* et l'on voit par ce qui précède quelles *liaisons géométriques* existent entre 1° le *cercle*, 2° ses *développantes* parfaites et imparfaites rallongées et raccourcies et 3° la *spirale d'Archimède* (*).

(*) *Voyez*, pour les hélicoïdes *coniques* et les *analogies géométriques* qui existent entre les hélicoïdes coniques et cylindriques, le chapitre premier des *Développements de géométrie descriptive*.

Construction du plan tangent en un point d'une surface hélicoïde cylindrique.

526. En vertu du mode de génération d'une surface hélicoïde, il est évident que chacun des points d'une de ses génératrices droites G décrit une hélice tracée sur un cylindre de révolution ayant l'axe A pour axe de rotation, et il est encore évident que toutes les hélices ainsi décrites ont toutes même *pas*, et que ce *pas* est égal à celui de l'hélice *directrice* E tracée sur le cylindre extérieur ayant pour section droite le cercle du rayon R.

Or si nous désignons par ρ la distance d'un point x de la génératrice droite G à l'axe A et par h le *pas* de l'hélice *directrice* E, on aura : $\frac{2.\pi\rho}{h} = \text{tang. } 6$. On connaîtra donc l'angle 6 sous lequel l'hélice X décrite par le point x coupe les génératrices du cylindre sur lequel elle est tracée; on connaîtra dès lors l'angle 6 que sa tangente L fait avec l'axe A.

Dès lors il sera facile de construire le plan tangent T en un point x d'une surface hélicoïde Σ, quel que soit son mode de génération, puisque ce plan T sera déterminé par la génératrice droite G de la surface Σ passant par le point x et par la tangente L au point x à l'hélice X décrite par ce point x.

527. Cela dit : nous allons montrer comment on doit effectuer les constructions *graphiques* (en d'autres termes comment on doit exécuter *l'épure*) pour que la solution soit simple.

Nous aurons à examiner *quatre* cas : et ainsi *deux cas* lorsque la génératrice droite G s'appuyant sur l'axe A et sur l'hélice directrice E coupe l'axe A, 1° sous l'angle droit et 2° sous un angle aigu.

Et *deux cas* lorsque la génératrice droite G s'appuyant sur l'hélice directrice E se meut tangentiellement à un cylindre dont elle coupe les génératrices, 1° sous l'angle droit et 2° sous un angle aigu.

PREMIER CAS. *La droite* G *coupant l'axe* A *sous l'angle droit.*

528. Soit donnée par ses projections E^h et E^v une hélice E (*fig.* 281), tracée sur un cylindre φ de révolution ayant la droite verticale A pour axe de rotation et pour base sur le plan horizontal le cercle B ayant A^h pour centre et ayant son rayon égal à R.

Faisons mouvoir une droite G parallèlement au plan horizontal de projection et s'appuyant sur l'hélice E et sur l'axe A, nous engendrerons une surface hélicoïde gauche Σ (surface du filet de vis carrée).

Prenons une des génératrices G et sur cette droite un point x et construisons le plan T tangent en ce point x à la surface Σ.

Concevons un cylindre φ' de révolution concentrique au cylindre φ et passant

par le point x; ce cylindre φ' coupera la surface Σ suivant une hélice X qui aura son *pas* h égale au pas de l'hélice E, et cette hélice X se projettera horizontalement sur le cercle B′ concentrique au cercle B et dont le rayon ρ sera égal à la distance du point x à l'axe A, dès lors le point x^h sera sur ce cercle B′.

Puisque les droites G.... sont horizontales, les traces horizontales des diverses hélices X tracées sur la surface Σ, seront situées sur une droite $A^h a$, le point a étant l'origine ou trace sur le plan horizontal de l'hélice E.

Par conséquent l'origine ou trace sur le plan horizontal de l'hélice X sera au point a' intersection du cercle B′ et de la droite A^h.

La tangente L au point x de l'hélice X aura pour trace horizontale le point q' que l'on obtient (n° 398) en rectifiant l'arc $x^h a'$ et le portant de x^h en q' sur la tangente L^h au point x^h du cercle B′.

Si donc par le point q' on mène la droite H^T parallèle à G^h, on aura la trace horizontale du plan tangent T demandé, et ce plan T sera complétement déterminé de position dans l'espace puisqu'on connaît sa trace H^T et un de ses points x.

Deuxième cas. *La droite* G *coupant l'axe* A *sous un angle aigu.*

529. Nous aurons (*fig.* 282) les mêmes données que *fig.* 281, seulement la génératrice droite G étant oblique par rapport au plan horizontal et faisant avec l'axe A un angle constant, la surface gauche Σ que l'on aura à considérer aura un cône *directeur* qui sera de révolution et qui aura l'axe A pour axe de rotation.

Dans ce cas la surface hélicoïde Σ sera une surface gauche, dite : *surface du filet de vis triangulaire.*

Cela posé : proposons-nous de construire le plan T tangent à la surface Σ, en un point x de la génératrice droite G.

Par le point x passera un cylindre φ' concentrique au cylindre φ et coupant la surface Σ suivant une hélice X ayant même *pas* h que l'hélice *directrice* E et se projetant horizontalement sur le cercle B′ décrit du point A^h comme centre et avec $A^h x^h = \rho$ pour rayon.

Le plan T passera par la droite G, H^T passera donc par le point r en lequel la droite G perce le plan horizontal de projection; la droite H^T sera donc déterminée si l'on en connaît un second point. Or le plan T passe aussi par la droite L tangente en x à l'hélice X; si l'on connaissait le point q' en lequel la droite L perce le plan horizontal de projection, la droite H^T serait complétement déterminée et le plan T serait fixé de position dans l'espace puisque l'on connaîtrait sa trace horizontale H^T et un de ses points x.

Pour déterminer le point q', nous remarquerons qu'il sera situé sur la droite L^h tangente en x^h au cercle B′ (qui n'est autre que X^h) et à une distance $q'x^h$ du point

x^h égale à l'arc rectifié compris sur le cercle B' entre les points x^h et a', ce point a' étant celui en lequel l'hélice X perce le plan horizontal de projection.

Si donc nous construisons (*fig.* 282 *bis*) le triangle rectangle a_3za_2 dans lequel $\overline{za_2} = h =$ le *pas* de l'hélice E, $\overline{a_3a_2} = 2\pi\rho =$ le cercle B' rectifié; en portant sur $\overline{za_2}$ de a_2 en x_2 la hauteur x^vp (*fig.* 282) du point x au-dessus du plan horizontal; en menant la droite $\overline{x_2x_1}$ parallèle à $\overline{a_3a_2}$ elle coupera X, au point x_1 et abaissant de x_1 une perpendiculaire sur $\overline{a_3a_2}$, on aura en $\overline{a_3q_1}$ la longueur de l'arc rectifié $a'x^h$ (*fig.* 282).

Portant donc $\overline{a_3q_1}$ (*fig.* 282 *bis*) sur L^h (*fig.* 282) de x^h en q', on aura en joignant les points r et q' la droite H^τ trace du plan demandé T.

Troisième cas. *La droite* G *coupant sous l'angle droit les génératrices du cylindre auquel elle est tangente en chacune de ses positions.*

530. Soit donnée la droite G par ses deux projections G^v et G^h (*fig.* 283), G^h sera tangente au cercle B' base du cylindre auquel la droite G est tangente pendant son mouvement.

Pour construire le plan tangent au point x de la surface hélicoïde Σ, nous construirons la tangente L pour ce point x à l'hélice X décrite par ce même point x.

L^h sera une tangente au point x^h du cercle X^h et la droite L percera le plan horizontal de projection en un point q' situé sur L^h et distant du point x^h de $\overline{q'x^h}$ égale à l'arc rectifié du cercle X^h qui mesure dans ce cercle X^h un angle égal à celui que mesure l'arc $\overline{am^h}$ dans le cercle B (qui est la projection E^h de l'hélice directrice E), le point a étant sur le plan horizontal l'origine de l'hélice E.

Menant par le point q' une droite H^τ parallèle à G^h on aura la trace horizontale du plan T demandé.

Quatrième cas. *La droite* G *coupant sous un angle aigu les génératrices du cylindre auquel elles est tangente en chacune de ses positions.*

531. Étant donnés deux cylindres Δ et Δ' de révolution et concentriques, ayant pour traces horizontales l'un (*fig.* 284) le cercle B du rayon R et l'autre le cercle B' du rayon R', on fait mouvoir une droite G tangentiellement au cylindre Δ' et s'appuyant sur une hélice E tracée sur le cylindre Δ; d'ailleurs la droite G fait, en toutes ses positions, un angle constant 6 avec l'axe A commun aux deux cylindres Δ et Δ'.

Cette droite G engendre par son mouvement une surface Σ, et l'on demande de construire le plan T tangent à cette surface Σ en un point donné x sur l'une G de ses génératrices droites.

Le plan T aura sa trace horizontale H^τ passant par le point r en lequel la droite

G perce le plan horizontal de projection, il suffira donc de déterminer un second point q' de cette trace pour qu'elle soit connue de position.

Or le point x décrit, sur la surface Σ, une hélice X ayant même *pas h* que l'hélice *directrice* E; cette hélice X se trouve tracée sur un cylindre Δ'' ayant son rayon ρ égal à la distance du point x à *l'axe* A, ainsi l'on a : $\rho = \overline{x^h A^h}$.

Décrivant du point A^h comme centre et avec $\overline{x^h A^h}$ pour rayon un cercle, on aura la projection X^h de la courbe X.

La tangente L au point x de l'hélice X se projettera en L^h tangente au point x^h au cercle X^h, et la trace horizontale q' de la droite L devra être située sur H^T.

Pour construire le point q', nous rectifierons le cercle X^h et nous prendrons (*fig.* 284 *bis*), une droite $\overline{a_1 a_2} = 2\pi\rho$; au point a_2 nous élèverons une perpendiculaire $\overline{za_2} = h$ et nous joindrons les points z et a_1 par une droite X_1 qui sera la *transformée* (au développement du cylindre Δ'') de l'hélice X.

Nous porterons sur za_2 et de a_2 en n_2 la hauteur du point x au-dessus du plan horizontal de projection, hauteur qui nous est donnée sur le plan vertical de projection (*fig.* 284) en $\overline{x^v p}$.

Par le point n_2 nous mènerons une parallèle à $a_1 a_2$ coupant X_1 au point n_1, et par ce point n_1 nous abaisserons une perpendiculaire à $a_1 a_2$ et coupant cette droite au point a_3, cela fait, nous porterons $\overline{a_1 a_3}$ sur L^h de x^h en q' et la droite $\overline{rq'}$ sera la trace H^T du plan T demandé.

532. Aux quatre problèmes précédents on doit joindre les problèmes *réciproques*, ainsi l'on doit savoir résoudre le problème suivant : *étant données la trace* H^T *d'un plan* T *et les projections* G^v *et* G^h *d'une génératrice droite* G *de l'un quelconque des quatre hélicoïdes, construire le point* x *en lequel le plan* T *touche la surface hélicoïde.*

Nous ne résoudrons pas les quatre problèmes *réciproques* en employant les mêmes considérations géométriques qui nous ont permis de résoudre les quatre problèmes précédents. Nous serons obligé d'employer un *paraboloïde hyperbolique de raccordement;* ainsi nous construirons un paraboloïde Σ_1 tangent à la surface gauche donnée Σ tout le long de la génératrice droite G; nous chercherons le point de contact du plan T avec ce paraboloïde Σ_1 et nous aurons le point x demandé, et ainsi le point de contact du plan T avec la surface hélicoïde Σ.

Parmi tous les paraboloïdes hyperboliques qui se *raccordent* avec la surface Σ tout le long de la génératrice droite G, nous devrons choisir celui qui conduira aux constructions *graphiques* les plus simples.

PREMIER CAS. *La droite* G *étant horizontale et coupant à angle droit l'axe* A.

533. La droite G par laquelle passe le plan T est donnée (*fig.* 285) par ses pro-

jections G^v et G^h et le plan T est donné par sa trace horizontale H^T qui est parallèle à G^h puisque G est une *horizontale* de ce plan.

Cela posé :

Nous construirons la tangente θ à l'hélice *directrice* E pour le point *m* en lequel la droite G coupe cette courbe E ; cette tangente θ sera déterminée de position lorsque nous aurons construit sa trace horizontale *q*.

Cela fait, nous ferons mouvoir la droite G sur les droites θ et A et parallèlement au plan horizontal de projection, et nous engendrerons un paraboloïde hyperbolique Σ_1 qui se raccordera avec la surface hélicoïde Σ tout le long de la droite G.

En unissant les points *q* et A^h par une droite H^{Σ_1}, nous aurons la trace horizontale du paraboloïde de *raccordement* Σ_1 ; et les droites H^T et H^{Σ_1} se couperont en un point q'. Menons par ce point q' une droite L^h parallèle à θ^h nous aurons la projection de la génératrice L du *second système* coupant G en un point *x* qui sera le point de contact du plan T et du paraboloïde Σ_1.

L^h coupe G^h en un point x^h, d'où l'on conclut x^v, et l'on a ainsi les projections du point de contact *x* du plan donné T et de l'hélicoïde donné Σ.

DEUXIÈME CAS. *La droite* G *étant horizontale et faisant un angle droit avec les génératrices du cylindre intérieur auquel elle est tangente.*

534. Soit donnée la droite G, horizontale, par ses projections G^v et G^h ; puisque la droite G s'appuie sur un cylindre Δ' concentrique au cylindre Δ sur lequel est tracée l'hélice *directrice* E, la droite G^h sera tangente au cercle B', trace horizontale (ou section droite) de ce cylindre Δ'.

Cela posé :

On se donne une droite H^T parallèle à G^h, cette droite H^T sera la trace d'un plan T ayant la droite G pour *horizontale* et l'on demande de construire le point *x* en lequel ce plan T touche la surface hélicoïde Σ engendrée par la droite G se mouvant horizontalement et tangentiellement au cylindre Δ' et s'appuyant pendant son mouvement sur une hélice E tracée sur le cylindre Δ.

La droite G touche le cylindre Δ' en un point *n* situé sur la génératrice droite K de ce cylindre Δ'.

La droite G en se mouvant dans l'espace touche le cylindre Δ' en divers points *n*, *n'*,.... qui déterminent une hélice E' ayant même *pas h* que l'hélice E.

Si l'on construit la tangente θ' au point *n* à l'hélice E' et la tangente θ au point *m* à l'hélice E, ces points *n* et *m* étant ceux en lesquels la droite G coupe respectivement les hélices E' et E, en faisant mouvoir la droite G sur θ et θ' et parallèlement au plan horizontal de projection, on engendrera un des paraboloïdes de *raccordement ;* mais ce paraboloïde peut être remplacé par un autre qui facilitera

les constructions *graphiques;* et en effet : la tangente θ' sera dans un plan Θ' vertical et tangent au cylindre Δ' tout le long de la génératrice droite K; ce plan Θ' sera donc tangent au point *n* à la surface hélicoïde donnée Σ, puisqu'il contiendra la droite G et la tangente θ' à une courbe E' tracée sur la surface Σ et passant par le point *n*. Nous pourrons donc remplacer la droite θ' (n° 480) par toute autre droite que nous voudrons, mais située dans le plan Θ' et passant par le point *n*, et ainsi par la droite K. Dès lors, nous pourrons prendre pour paraboloïde de *raccordement* Σ_1 celui qui est engendré par la droite G se mouvant parallèlement au plan horizontal en s'appuyant sur les droites θ et K.

Si donc nous déterminons la trace horizontale q de la droite θ, la droite H^{Σ_1} qui unira les points q et n^h (ou K^h) sera la trace horizontale du paraboloïde de *raccordement* Σ_1. Les droites H^T et H^{Σ_1} se coupent en un point q'; menant par ce point q' une droite L^h parallèle à θ^h, elle coupera G^h en un point x^h qui sera la projection du point x en lequel le plan T touche le paraboloïde Σ_1, et par conséquent en lequel ce même plan T touche l'hélicoïde donné Σ.

TROISIÈME CAS. *La droite* G *coupant l'axe* A *sous un angle aigu.*

535. Soit donnée la droite G par ses projections G^v et G^h (*fig.* 287), cette droite G coupe l'axe A en un point *n* et sous un angle aigu ε.

On propose de trouver le point de contact d'un plan T, passant par la droite G, avec la surface Σ engendrée par cette droite G se mouvant : 1° parallèlement à un cône de révolution ayant son demi-angle au sommet égal à ε et ayant la droite A pour axe de rotation, et 2° en s'appuyant sur l'axe A et sur l'hélice E tracée sur un cylindre Δ de révolution ayant aussi la droite A pour axe de rotation.

Cela posé, la droite G perce le plan horizontal au point *r;* si nous menons par ce point *r* une droite H^T nous aurons la trace du plan T donné.

Pour résoudre le problème proposé, nous remplacerons la surface Σ par un paraboloïde de *raccordement* Σ_1 ayant pour *directrices* les droites A et θ, θ étant la tangente à l'hélice E pour le point *m* en lequel G coupe cette courbe E.

Le premier plan directeur du paraboloïde Σ_1 sera vertical, puisqu'il doit être parallèle aux droites A et θ. Pour avoir le *second* plan directeur de Σ_1, nous abaisserons la droite G parallèlement à elle-même jusqu'à ce que le point *m* vienne en *k* sur le plan horizontal et jusqu'à ce que le point *n* vienne en *s* sur A.

Dès lors, en cette nouvelle position de G que nous désignerons par I, nous aurons la génératrice droite du cône *directeur* de la surface Σ, ce cône *directeur* ayant son sommet au point *s*, et ayant le cercle B (base du cylindre Δ) pour trace horizontale; dès lors, le plan P tangent au cône *directeur* suivant la droite I sera le *second* plan directeur du paraboloïde Σ_1.

Le plan P aura donc pour trace H' la droite θ^h tangente au cercle B au point m^h.

Cela posé :

Il nous faudra trouver la trace du plan T sur le plan P et la trace du paraboloïde Σ_1 sur ce même plan P.

La trace du plan T sur le plan P sera l'intersection des deux plans T et P ; or, ces plans T et P passent l'un et l'autre par la droite G, cette trace sera donc une droite D parallèle à la droite G et passant par le point p en lequel se coupent les deux traces H' et H'.

La trace du paraboloïde Σ_1 sur le plan P, sera la droite U qui unira le point s et le point q en lequel la droite θ perce le plan P ; les droites D et U se couperont en un point y.

Et si par ce point y nous menons une droite L parallèle au *premier* plan directeur (A, θ) du paraboloïde Σ_1 et s'appuyant sur la droite G, cette droite L coupera la droite G au point x demandé.

Quatrième cas. *La droite G faisant un angle aigu avec les génératrices droites du cylindre auquel elle est tangente.*

536. La droite G sera donnée (*fig.* 288) par ses projections G^v et G^h ; la droite G^h sera tangente au cercle B', trace horizontale (ou section droite) du cylindre Δ' auquel cette droite G est tangente pendant son mouvement.

La surface Σ est engendrée par la droite G s'appuyant sur l'hélice E tracée sur le cylindre de révolution Δ ayant le cercle B pour trace horizontale (ou section droite) et restant tangente au cylindre Δ' en faisant avec l'axe A (axe de révolution commun aux deux cylindres Δ et Δ') un angle constant ε.

Cela posé, on demande de construire le point x en lequel la surface Σ est touchée par un plan T passant par la droite G.

La droite G perce le plan horizontal en un point r ; menant donc par ce point r une droite H^r, on aura la trace du plan T donné.

Pour déterminer le point x, nous devrons employer les considérations *géométriques* suivantes, lesquelles détermineront les constructions *graphiques* à exécuter.

Nous remplacerons la surface héliçoïde Σ par un paraboloïde Σ_1 de *raccordement* ayant pour *directrices* les droites K et θ (K sera la génératrice droite du cylindre Δ' passant par le point n en lequel la droite G touche ce cylindre, et θ sera la tangente à l'hélice E au point m en lequel la même droite G coupe cette courbe E).

Dès lors, le *premier* plan directeur du paraboloïde Σ_1 sera vertical, puisqu'il doit être parallèle aux droites A et θ.

Déterminons maintenant le *second* plan directeur P du paraboloïde Σ_1; la surface hélicoïde Σ a un cône directeur, qui est de révolution et dont l'axe de rotation est vertical et dont le demi-angle au sommet est égal à 6. Ce cône directeur peut être placé dans l'espace partout où l'on voudra ; je puis donc supposer que la droite K sera son axe et que son sommet est au point s que l'on obtient en faisant descendre parallèlement à elle-même la droite G d'une quantité égale à la hauteur du point m au-dessus du plan horizontal.

En sa nouvelle position, G sera désignée par I et le cône directeur de la surface Σ aura son sommet au point s, et ce cône aura pour trace horizontale un cercle C décrit du point n^h (ou K^h, ou s^h) comme centre et sur la corde, interceptée sur G^h par le cercle B, comme diamètre.

Cela posé :

Le plan P tangent au cône (s, C) suivant la droite I sera le *second* plan directeur du paraboloïde de *raccordement* Σ_1.

Cela fait : Il faudra trouver : 1° la *trace* du plan T sur le plan P, et 2° la *trace* du paraboloïde Σ_1 sur ce même plan P.

La *trace* du plan T sur le plan P sera la droite D parallèle à G et passant par le point p intersection des deux traces H^r et H^r.

La *trace* du paraboloïde Σ_1 sur le plan P sera la droite U unissant le point s sommet du cône directeur avec le point i en lequel la tangente θ (en m à l'hélice E) perce le plan P. Pour avoir cette trace U, il nous faut donc mener par le point s et la droite θ un plan Y qui coupera le plan P suivant cette droite U demandée.

Or, pour déterminer le plan Y, il faudra mener par le point s une droite θ_1 parallèle à la droite θ; cette droite θ_1 percera le plan horizontal de projection au point d. La droite qui unira les points d (trace horizontale de θ_1) et q (trace horizontale de θ) sera H^y. Cette droite H^y coupera H^r en un point z; unissant les points z et s, on aura la droite U *trace* sur le plan P du paraboloïde de *raccordement* Σ_1. Les droites D et U se couperont en un point y, et menant par ce point y une droite L parallèle au *premier* plan directeur (K, θ) du paraboloïde Σ_1 et s'appuyant sur la droite G, on aura en le point x, en lequel les droites L et G se coupent, le point de contact du plan donné T avec le paraboloïde de *raccordement* Σ_1, et par conséquent le point de contact du plan T avec la surface hélicoïde donnée Σ.

CHAPITRE XII.

DES SURFACES ENGENDRÉES PAR UNE SECTION CONIQUE, ET QUI JOUISSENT DE LA PROPRIÉTÉ D'ÊTRE COUPÉES PAR UN PLAN, ET QUELLE QUE SOIT SA DIRECTION, SUIVANT UNE SECTION CONIQUE.

537. Les surfaces qui jouissent de la propriété remarquable d'être coupées par un plan suivant une *section conique*, et quelle que soit la direction du plan, sont au nombre de *cinq*, en mettant de côté les *trois* cylindres *elliptique*, *parabolique* et *hyperbolique* et le cône à base *section conique*.

Ces cinq surfaces, dites du second ordre ou du second degré (parce que leur équation est du second degré), sont appelées par les géomètres : 1° *ellipsoïde*, 2° *paraboloïde elliptique*, 3° *hyperboloïde à une nappe*, 4° *hyperboloïde à deux nappes*, 5° *paraboloïde hyperbolique*.

Nous allons démontrer les diverses propriétés dont jouissent ces *cinq* surfaces, en ne nous servant que de la méthode des *projections*.

DES ELLIPSOÏDES.

538. Concevons une sphère S du rayon R, et ayant son centre en un point *o*. Menons par le centre *o* deux plans rectangulaires entre eux, l'un horizontal, et coupant la sphère S suivant un grand cercle C, et l'autre vertical et coupant cette même sphère S suivant un grand cercle C_1, ces deux plans se couperont suivant une droite LT.

Menons par le centre *o* de la sphère une verticale Z.

Tout plan M', passant par l'axe Z, coupera la sphère S suivant un grand cercle C'.

Cela posé :

Transformons *cylindriquement* le cercle C en une ellipse E, ayant le point *o* pour centre et ayant l'un de ses axes dirigé suivant la droite Z.

Nous savons (n° 343) que si l'on considère un point m du cercle C, et que l'on mène par ce point m une droite parallèle à Z et coupant la droite LT en un point p et l'ellipse E en un point n, on aura $\frac{np}{mp}=a$; et nous savons aussi que, si pour tous les points m, m', m'', etc., du cercle C, on fait la même chose, on aura :

$$\frac{np}{mp}=\frac{n'p'}{m'p'}=\frac{n''p''}{m''p''}=\text{etc.}=a=\text{constante.}$$

Ainsi, pour *la même abscisse*, le cercle C et l'ellipse E ont leurs *ordonnées* dans un rapport constant.

539. Si l'on fait tourner le cercle C autour de l'axe Z, on engendrera la sphère S; si l'on fait tourner l'ellipse E autour de l'axe Z, on engendrera une surface Σ de révolution, qui a reçu le nom d'ellipsoïde de révolution, et cette surface Σ aura évidemment pour centre le point o, centre de la sphère S.

Désignons par s et s', les points en lesquels l'ellipse E coupe l'axe Z, si l'on a : $\overline{ss'}>2R$, alors l'ellipse E est *allongée* par rapport au cercle C, puisque cette ellipse a son petit axe égal à 2R.

Si l'on a $\overline{ss'}<2R$, alors l'ellipse E est *raccourcie* par rapport au cercle C.

L'ellipse *rallongée* aura lieu lorsque l'on aura : $\frac{np}{mp}<1$; et l'ellipse *raccourcie* aura lieu lorsqu'on aura : $\frac{np}{mp}>1$.

Dans le cas où E est une ellipse *rallongée*, la surface Σ a reçu le nom d'*ellipsoïde rallongé et de révolution*.

Dans le cas où E est une ellipse *raccourcie*, la surface Σ a reçu le nom *d'ellipsoïde aplati et de révolution*.

Cela posé :

Si nous prenons un point x arbitraire sur la sphère S, et que par ce point nous menions une droite X parallèle à l'axe Z, elle coupera la surface Σ en deux points y et y' et le plan horizontal en un point q (l'on aura évidemment $yq=y'q$), et l'on aura : $\frac{yq}{xq}=a$, et en effet :

Par l'axe Z et le point x, nous pouvons faire passer un plan M', ce plan coupera la sphère S suivant un grand cercle C', et la surface Σ suivant une ellipse E', qui sera identique à l'ellipse E. Donc, etc.

Ainsi l'on peut énoncer tout ce qui suit :

540. 1° Si l'on mène une droite D quelconque et coupant la sphère S en deux

points x et x', on transformera *cylindriquement* cette droite D en une autre droite D' coupant la surface ellipsoïde Σ en deux points x_1 et x_1', qui seront les transformés des points x et x', et dès lors les points x_1 et x seront sur une parallèle à Z et coupant le plan horizontal en un point q, et les points x_1' et x' seront sur une parallèle à Z et coupant le plan horizontal en un point q', et l'on aura :

$$\frac{x_1q}{xq}=\frac{x_1'q'}{x'q'}$$

2° Si l'on mène un plan P coupant la sphère S, suivant un petit cercle δ, ce plan sera transformé *cylindriquement* en un plan P_1 coupant la surface ellipsoïde Σ suivant une courbe δ_1, qui sera la *transformée* du cercle δ. Dès lors les deux courbes δ et δ_1 seront situées sur un cylindre Δ ayant ses génératrices droites parallèles à l'axe Z; la courbe δ étant un *cercle*, la courbe δ_1 sera une *ellipse*.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

I. *Un ellipsoïde de révolution est coupé par tout plan, quelle que soit sa direction, suivant une ellipse.*

3° Si l'on mène une suite de plans P, P', P'', etc., parallèles entre eux, et coupant la sphère S suivant des cercles δ, δ', δ'', etc., les centres de ces cercles seront situés sur une droite K passant par le centre o de la sphère S.

Ces plans se transformeront suivant des plans P_1, P'_1, P''_1, etc., aussi parallèles entre eux, et coupant la surface ellipsoïde Σ suivant des ellipses δ_1, δ'_1, δ''_1, etc., dont les centres seront situés sur une droite K_1, *transformée* de la droite K, et cette droite K_1 passera par le centre o de l'ellipsoïde Σ, et il est évident que les ellipses δ_1, δ'_1, δ''_1, etc., seront semblables et semblablement placées.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

II. *L'ellipsoïde de révolution est coupé par une série de plans parallèles suivant des ellipses semblables et semblablement placées, et dont les centres sont situés sur un diamètre de la surface.*

4° Un plan T, tangent en un point m à la sphère S, se transformera en un plan T_1, tangent à l'ellipsoïde Σ et au point m_1 *transformé* du point m.

5° Un cône Δ tangent à la sphère S, ayant son sommet en un point d, et ayant pour courbe de contact un petit cercle δ de la sphère S, se transformera en un cône Δ_1, tangent à l'ellipsoïde Σ, suivant une ellipse δ_1, *transformée* du cercle δ, et ayant son sommet en un point d_1, *transformé* du point d; et comme pour la sphère le centre o de cette surface, le sommet d du cône tangent, et le centre i du cercle de contact, sont en ligne droite, il arrivera que les points, o centre de l'ellipsoïde Σ, d_1 sommet du cône Δ_1 et i_1 centre de l'ellipse δ_1, seront en ligne droite.

On peut donc énoncer les *théorèmes* suivants :

III. *Si l'on coupe un ellipsoïde de révolution* Σ *par un plan et suivant une ellipse* δ_1, *et si l'on fait rouler un plan* T_1 *sur la courbe* δ_1 *et tangentiellement à la surface* Σ, *la surface enveloppe de l'espace parcouru par le plan* T_1 *sera un cône.*

IV. *Si l'on prend un point* d_1, *situé hors d'un ellipsoïde de révolution* Σ, *et qu'on regarde ce point comme le sommet d'un cône* Δ_1 *tangent à la surface* Σ, *la courbe de contact* δ_1 *sera plane et ne sera dès lors autre qu'une ellipse, et son centre* i_1, *le centre* o *de la surface* Σ *et le sommet* d_1 *du cône* Δ_1, *seront en ligne droite.*

6° Si l'on a deux cercles δ et δ' sur la sphère S, on peut les envelopper par deux cônes Δ et Δ', si ces cercles se coupent ou ne se coupent pas, et par un seul cône si ces cercles se touchent :

Au moyen de la *transformation cylindrique*, on fait passer cette propriété sur l'ellipsoïde de révolution.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

V. *Si l'on coupe un ellipsoïde de révolution par deux plans, les ellipses de section* δ_1 et δ_1' *pourront être enveloppées par deux cônes* Δ_1 *et* Δ_1', *si ces courbes* δ_1 et δ_1' *se coupent ou ne se coupent pas, et par un seul cône, si ces deux courbes se touchent.*

7° Si un cône Δ ayant pour sommet un point intérieur ou extérieur à la sphère S, a pour base un cercle δ de cette sphère, ce cône Δ coupe la sphère S suivant un second cercle δ'.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

VI. *Si un cône* Δ_1, *ayant pour sommet un point* d_1 *intérieur ou extérieur à un ellipsoïde de révolution* Σ, *a pour base une ellipse* δ_1, *ou un parallèle, située sur cette surface de révolution, ce cône* Δ *coupe l'ellipsoïde de révolution* Σ *suivant une seconde ellipse* δ'_1.

8° Si, dans la sphère S, on a une suite de cordes parallèles à une droite D, les milieux de ces cordes sont sur un plan P, passant par le centre de la sphère.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

VII. *Si l'on mène, dans un ellipsoïde de révolution* Σ, *une suite de cordes parallèles à une droite* D_1, *les milieux de ces cordes seront sur un plan* P_1 *passant par le centre de l'ellipsoïde.*

Ainsi, pour l'ellipsoïde de révolution Σ, toute surface *diamétrale* est un *plan.*

9° Si, par le centre o de la sphère, je mène trois diamètres X, Y, Z, rectangulaires entre eux, on aura trois plans diamétraux (X, Y), (X, Z), (Y, Z), aussi rectangulaires entre eux, et qui jouiront de la propriété suivante :

Toutes les cordes parallèles

à Z	seront coupées en parties égales	par le plan	(X, Y)
à X	—	—	(Y, Z)
à Y	—	—	(X, Z)

Les diamètres X, Y, Z, perceront la sphère S en les points x et x', y et y', z et z', et si l'on mène en ces points des plans tangents à la sphère, on aura les six plans T^x, $T^{x'}$, T^y, $T^{y'}$, T^z, $T^{z'}$, qui formeront un cube circonscrit à la sphère.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

VIII. *Si dans un ellipsoïde de révolution* Σ, *on mène par le centre* o *un plan* P_1 *coupant la surface suivant une ellipse* $\mathcal{E}$, *et que l'on trace un système de diamètres conjugués* X_1 *et* Y_1 *de la courbe* $\mathcal{E}$; *si l'on construit deux plans* T_1 *et* T'_1 *tangents à la surface* Σ, *et parallèles au plan* P_1, *et que l'on unisse les deux points de contact par une droite* Z_1, *les plans* (X_1, Y_1), (X_1, Z_1), (Y_1, Z_1), *seront des plans diamétraux, et chacun d'eux coupera en parties égales les cordes parallèles au diamètre par lequel il ne passera pas; et si l'on mène des plans tangents à la surface* Σ, *aux points en lesquels cette surface est percée par les diamètres* X_1, Y_1, Z_1, *ces plans seront deux à deux parallèles et formeront un parallélipipède oblique circonscrit à la surface* Σ, etc.

Les trois plans (X_1, Y_1), (X_1, Z_1), (Y_1, Z_1) forment un système de plans diamétraux conjugués entre eux.

Le diamètre Z_1 est dit diamètre conjugué du plan (X_1, Y_1), etc.

10° Si l'on a deux sphères concentriques S et S', si l'on mène un plan T tangent au point m à la sphère intérieure S, ce plan coupera la sphère S' suivant un cercle δ, et si l'on conçoit un cône Δ tangent à la sphère S' suivant le cercle δ, le sommet d du cône Δ, le point m centre du cercle δ, et le point o centre des sphères S et S' sont en ligne droite. De plus, si l'on conçoit une série de plans T tangents à la sphère S, les divers sommets d des cônes Δ tangents à la sphère S', seront sur une troisième sphère S'' concentriques aux deux premières sphères données.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

IX. *Si l'on a deux ellipsoïdes de révolution* Σ'' *et* Σ' *concentriques et semblables, si l'on considère chacun des points* d_1 *de la surface* Σ'' *comme le sommet d'un cône* Δ_1 *tangent à la surface* Σ' *et suivant une ellipse* δ_1, *on pourra construire un ellipsoïde de révolution* Σ *concentrique et semblable aux ellipsoïdes donnés* Σ'' *et* Σ', *et qui soit tangent aux divers plans* T_1 *des courbes* δ_1, *et cet ellipsoïde* Σ *aura pour contact avec les plans* T_1 *des points* m_1 *qui seront les centres respectifs des ellipses* δ_1.

11° Si l'on coupe une sphère S par un plan P passant par son centre o, on a pour section un grand cercle C, et si l'on mène par le centre o une droite Z perpendiculaire au plan P, on sait que le cylindre Δ qui aura ses génératrices droites parallèles à Z, et qui aura pour section droite le cercle C sera tangent à la sphère S suivant ce cercle C.

On sait de plus que si l'on a une sphère S' concentrique à S, le cylindre Δ coupera cette sphère S' suivant un petit cercle C' qui sera dans un plan parallèle

au plan du cercle C et identique au cercle C(les deux cercles C et C′ étant superposables).

On sait encore que l'on peut construire une sphère S″ concentrique aux sphères S et S′, et tangente aux divers plans des cercles C′ et que les points de contact seront les centres de ces cercles C′.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

X. *Ayant un ellipsoïde de révolution* Σ, *si l'on mène un plan diamétral* P_1 *coupant cette surface* Σ *suivant une ellipse diamétrale* C_1, *si l'on construit le diamètre* Z_1 *conjugué du plan diamétral* P_1, *le cylindre* Δ_1 *qui aura ses génératrices droites parallèles à* Z_1, *et qui aura pour directrice l'ellipse* C_1, *sera tangent à l'ellipsoïde* Σ *suivant cette courbe* C_1.

En outre : si l'on a un second ellipsoïde Σ′, *concentrique et semblable à l'ellipsoïde* Σ, *le cylindre* Δ_1 *coupera la surface* Σ′ *suivant une courbe plane* C'_1 *dont le plan sera parallèle au plan de la courbe* C_1 *et les deux ellipses* C′ *et* C'_1 *seront identiques, ou, en d'autres termes, superposables.*

De plus, l'on pourra construire un ellipsoïde de révolution Σ″ *concentrique et semblable aux ellipsoïdes* Σ *et* Σ′, *et tangent aux plans des diverses ellipses* C_1', *et les points de contact de ces plans et de la surface* Σ″ *ne sont autres que les centres des ellipses* C'_1.

12° Si l'on a une droite D extérieure à une sphère S ; si par la droite D on mène deux plans T et T′ tangents à la sphère aux points *m* et *m′*, ces deux points *m* et *m′* étant unis par une droite B, les deux droites D et B sont deux *polaires réciproques*, parce qu'elles jouissent (ainsi que nous le savons) de la propriété suivante, savoir : que si par la droite D on mène une série de plans X, X′ X″, etc., ils couperont la sphère S suivant des cercles δ, δ′, δ″, etc., tels qu'ils auront pour *polaire commune et extérieure* la droite D, leurs *pôles* étant situés sur la droite B, et n'étant autres que les points en lesquels cette droite B est coupée par les plans X, X′, X″, etc. ; et ensuite les cercles δ, δ′, δ″, etc. seront tels que les cônes Δ, Δ′, Δ″, etc., tangents à la sphère S suivant ces cercles, auront leurs sommets *d*, *d′*, *d″*, etc., situés sur la droite B.

Et nous savons encore que, si par la droite B on mène une série de plans Y, Y′, Y″, etc., ils couperont la sphère S, suivant des cercles ϐ, ϐ′, ϐ″, etc., tels qu'ils auront pour *polaire commune et intérieure* la droite B, leurs *pôles* étant situés sur la droite D, et n'étant autres que les points en lesquels cette droite D est coupée par les plans Y, Y′, Y″, etc., et ensuite les cercles ϐ, ϐ′, ϐ″, etc., seront tels que les cônes ψ, ψ′, ψ″, etc., tangents à la sphère S suivant ces cercles, auront leurs sommets *p*, *p′*, *p″*, situés sur la droite D.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

XI. *Si, dans un ellipsoïde de révolution* Σ, *on mène une droite arbitraire* D_1 *et extérieure à cette surface* Σ, *et si par cette droite on mène deux plans* T_1 *et* T'_1, *tangents à* Σ *aux points* m_1 *et* m'_1 ; *ces deux points* m_1 *et* m'_1 *étant unis par une droite* B_1, *les deux*

droites D_1 *et* B_1 *seront deux polaires réciproques; car elles jouiront de la propriété suivante, savoir : que si par la droite* D_1 *on mène une série de plans* X_1, X_1', X_1'', etc., *coupant la surface* Σ *suivant des ellipses* δ_1, δ'_1, δ''_1, etc., *ces courbes seront telles qu'elles auront pour polaire commune et extérieure la droite* D_1, *et que leurs pôles seront situés sur la droite* B_1, *et de plus les cônes* Δ_1, Δ'_1, Δ''_1, etc., tangents à la *surface* Σ *suivant les ellipses* δ_1, δ'_1, δ''_1, etc., *auront leurs sommets* d_1, d'_1, d''_1, etc., *situés sur la droite* B_1.

Et réciproquement, si par la droite B_1 *on mène une série de plans* Y_1, Y'_1, Y''_1, etc., *coupant la surface* Σ *suivant des ellipses* 6_1, $6'_1$, $6''_1$, etc., *ces courbes auront pour polaire commune et intérieure la droite* B_1, *et leurs pôles respectifs par rapport à cette droite* B_1 *seront extérieurs et situés sur la droite* D_1.

De plus les cônes ψ_1, ψ'_1, ψ''_1, etc., *tangents à la surface* Σ *suivant les ellipses* 6_1, $6'_1$, $6''_1$, etc., *auront leurs sommets* p_1, p'_1, p''_1, etc., *situés sur la droite* D_1.

D'après ce qui précède, on voit que toutes les propriétés de relation de position, existant pour une sphère, pourront être transportées au moyen d'une *transformation cylindrique* sur l'ellipsoïde de révolution.

Nous pouvons donc énoncer les *théorèmes* suivants :

XII. *Si dans un ellipsoïde de révolution* Σ, *on mène par le centre un plan diamétral quelconque* P, *et si l'on construit le diamètre conjugué de ce plan* P, *diamètre qui prolongé donnera une droite* Z, *puis que l'on mène une suite de plans* P', P'', P''', etc., *parallèles entre eux et au plan* P, *et coupant la surface* Σ *suivant des ellipses* α', α'', α''', etc., *et qu'enfin on construise les cônes* Δ', Δ'', Δ''', etc., *tangents à la surface* Σ, *suivant les courbes planes* α', α'', α''', etc., *les sommets* d', d'', d''', etc., *de ces divers cônes seront situés sur la droite* Z.

XIII. *Étant donné un ellipsoïde de révolution* Σ, *si l'on construit un plan diamétral* P *et le diamètre conjugué* Z, *et si l'on mène une suite de plans* P', P'', P''', etc., *parallèles au plan* P *et coupant la surface* Σ *suivant des ellipses semblables et semblablement placés* α', α'', α''', etc., *ces courbes ne pourront être unis deux à deux que par des cônes dont les sommets seront tous situés sur la droite* Z.

XIV. *Si l'on coupe un ellipsoïde de révolution* Σ *par une suite de plans diamétraux et suivant des ellipses* 6, $6'$, $6''$, etc., *ces courbes ne pourront être unies deux à deux que par des cylindres.*

XV. *Une droite ne peut couper en plus de deux points un ellipsoïde de révolution.*

XVI. *Par une droite extérieure on ne peut mener plus de deux plans tangents à un ellipsoïde de révolution.*

Transformation de l'ellipsoïde de révolution en un ellipsoïde à trois axes inégaux.

341. Concevons un ellipsoïde de révolution Σ, ayant pour axe de rotation une

droite Z et pour courbe méridienne une ellipse E, et pour centre un point o. Coupons la surface Σ par un plan mené par le centre o et perpendiculairement à la droite Z, on obtiendra pour section un cercle C auquel on a donné le nom d'*équateur*. Prenons le plan de l'équateur pour plan horizontal.

Cela posé :

Transformons cylindriquement le cercle C en une ellipse E_1, cette transformation s'opérant dans le plan horizontal et parallèlement à une droite Y menée dans le plan horizontal et par le centre o du cercle C.

Désignant par R le rayon du cercle C, et menant par le centre o et dans le plan horizontal, une droite X perpendiculaire à la droite Y, l'ellipse E_1 aura l'un de ses axes dirigé suivant la droite X et il sera égal à 2R, et l'autre axe sera dirigé suivant la droite Y.

Prenant un point m sur le cercle C, et menant par ce point une parallèle à Y, laquelle coupera X en un point r et l'ellipse E_1 en un point m_1, on aura : $\frac{m_1 r}{mr}=b$.

Et ce rapport b sera le même pour tous les points homologues m et m_1 du cercle C et de l'ellipse E_1.

Cela posé :

Si l'on coupe la surface ellipsoïde et de révolution Σ par un plan parallèle au plan du cercle C, et par conséquent perpendiculaire à l'axe de rotation Z de cette surface Σ, on obtiendra un cercle C', qui, *transformé* comme le cercle C, donnera une ellipse E'_1, et les ellipses E_1 et E'_1 seront semblables, puisque, désignant par m' un point du cercle C' et par m'_1 le point de l'ellipse E'_1 qui est le *transformé* du point m', en unissant ces points m' et m_1' par une droite qui sera parallèle à la droite Y et qui coupera le diamètre du cercle C' (parallèle au diamètre X du cercle C) en un point r', on aura : $\frac{m_1' r'}{m' r'}=b$.

L'ellipsoïde de révolution Σ se trouvera dès lors transformé en une surface Σ', à laquelle on a donné le nom d'*ellipsoïde à trois axes inégaux;* si l'on fait passer par les axes X, Y, Z, de la surface Σ des plans (X, Y), (Y, Z), (X, Z), ces plans couperont la surface Σ' suivant trois ellipses E_1, E_2, E_3, qui couperont les axes X, Y, Z, en deux points, savoir :

E_1 coupera X en les points x et x'.
— Y en les points y et y'.
E_2 coupera Y en les points y et y'.
— Z en les points z et z'.
E_3 coupera X en les points x et x'.
— Z en les points z et z'.

Les trois droites X, Y, Z, sont rectangulaires entre elles et se coupent au point o centre commun à l'ellipsoïde de révolution Σ et à l'ellipsoïde Σ'. Les plans (X, Y), (Y, Z), (X, Z), sont donc aussi rectangulaires entre eux.

L'on a donc évidemment :

$$ox = ox', \quad oy = oy', \quad oz = oz'.$$

De plus, en vertu du mode cylindrique de *transformation*, on a :

$$ox = \mathrm{R}, \quad oz = a\mathrm{R} \qquad \text{et} \qquad oy = b\mathrm{R}.$$

Ce sont les droites xx', yy', zz', qui ont reçu le nom d'*axes* de l'ellipsoïde Σ'; et comme ils sont inégaux en grandeur, la surface Σ' a reçu le nom d'*ellipsoïde à trois axes inégaux*.

542. Nous pourrons faire passer, de l'ellipsoïde de révolution Σ sur l'ellipsoïde à trois axes inégaux Σ', toutes les propriétés que nous avons ci-dessus reconnues exister pour cette surface de révolution Σ en les faisant passer de la sphère S sur cette surface Σ, et cela en se servant du même mode cylindrique de *transformation* qui a servi à transformer la sphère S en la surface de révolution Σ.

Ainsi les *seize* théorèmes énoncés ci-dessus sont vrais pour l'ellipsoïde à trois axes inégaux (*).

543. Nous aurions pu passer directement de la sphère S à l'ellipsoïde à trois axes inégaux Σ' par une seule *transformation cylindrique*.

Et, en effet :

Concevons dans le plan horizontal un cercle C du rayon R et ayant un point o pour centre, et décrivons de ce point o comme centre et avec le rayon R une sphère S. Imaginons dans le plan horizontal deux axes X et Y se croisant au centre o et rectangulaires entre eux, et une droite Z élevée par le point o perpendiculairement au plan horizontal; les trois axes X, Y, Z, sont donc rectangulaires entre eux.

Cela posé :

Désignons par x et x_1, y et y_1, z et z_1, les points en lesquels la sphère S est coupée par les axes X, Y, Z.

Menons par le centre o une droite Y' située dans le plan du cercle C et faisant avec la droite X un angle arbitraire, et prenons sur cette droite Y' deux points arbitraires y' et y'_1, mais équidistants du centre o.

Nous pouvons construire une ellipse E sur ox et oy' comme demi-diamètres

---

(*) Nous aurions pu énoncer un plus grand nombre de *théorèmes*, mais nous nous sommes borné aux plus importants parmi ceux de *relation de position*.

conjugués, et l'*ellipse* E pourra être considérée comme la *transformée cylindrique* du *cercle* C, les droites de transformation étant parallèles à la droite $\overline{yy'}$ ou à la droite $\overline{y_1y_1'}$.

Nous pourrons mener dans l'espace et par le point z une droite parallèle à $\overline{yy'}$ et prendre sur cette droite un point z' arbitraire et unir le centre o à ce point z' par une droite Z'.

Puis mener par le point z' une droite θ parallèle à X, et tracer dans le plan (X, θ) une ellipse E' ayant ox et oz' pour demi-diamètres conjugués.

Nous pourrons enfin par le point z' mener une droite θ' parallèle à Y', et construire dans le plan (Y', θ') une ellipse E'' ayant oy' et oz' pour demi-diamètres conjugués.

Les trois ellipses E, E', E'', formeront un système de courbes diamétrales, et les trois droites ox, oy', oz', formeront un système de demi-diamètres conjugués d'un ellipsoïde Σ_1 qui sera la *transformée* directe de la sphère S.

Et je dis que la surface Σ_1 est un ellipsoïde, car cette surface jouira évidemment de toutes les propriétés que nous avons reconnues exister pour la surface Σ' *transformée* de l'ellipsoïde de révolution Σ.

Des sections circulaires de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

544. Si une surface ellipsoïde Σ peut être coupée par un plan suivant un cercle, comme toutes les sections planes et parallèles dans un ellipsoïde sont des courbes semblables, il faudra que l'on puisse mener par le centre o de la surface Σ un certain plan P coupant cette surface Σ suivant un cercle C, dont nous désignerons le rayon par R.

Or, si l'on considère une sphère S' ayant son centre en o et ayant un rayon R' arbitraire, mais assez grand pour que la sphère S' coupe la surface Σ, il est évident que les deux surfaces S' et Σ se couperont suivant des courbes qui seront symétriques par rapport à chacun des plans diamétraux principaux de la surface Σ.

Si donc du point o comme centre et avec le rayon R, nous décrivons dans l'espace une sphère S, elle aura pour cercle diamétral le cercle C, et comme les surfaces S et Σ sont symétriques par rapport aux plans diamétraux principaux de la surface Σ, il s'ensuit que si la sphère S et la surface Σ se coupent suivant un cercle C, ils devront se recouper suivant un autre cercle C' ayant son centre en o et son rayon égal à R, et les plans P et P' de ces deux cercles C et C' devront être perpendiculaires à l'un des trois plans diamétraux principaux de la surface Σ.

Or, 1° si du centre o et avec le demi *petit-axe* de Σ pour rayon, on décrit une

sphère, elle sera tangente à la surface Σ en les extrémités de ce *petit-axe*, et elle n'aura pas d'autres points communs avec la surface Σ, et de plus elle sera intérieure à cette surface Σ.

2° Si du centre *o* avec le demi-grand axe de l'ellipsoïde Σ pour rayon, on décrit une sphère, elle sera tangente à la surface Σ en les extrémités de ce grand axe, et elle n'aura pas d'autres points communs avec la surface Σ, et elle enveloppera la surface Σ.

3° Mais si du point *o* comme centre et avec le demi-axe moyen de la surface Σ on décrit une sphère S, elle touchera la surface Σ en les extrémités *p* et *p'* de son axe moyen, et elle la coupera suivant une courbe composée de deux branches δ et δ' se croisant en les points *p* et *p'*; et les courbes δ et δ' seront symétriques par rapport aux plans diamétraux principaux de la surface Σ; si donc on projette orthogonalement ces courbes δ et δ' sur le plan diamétral M passant par le grand axe et le petit axe de la surface Σ (ce plan M étant pris pour plan vertical de projection, et le plan N du petit axe et de l'axe moyen étant pris pour plan horizontal de projection), on aura (*fig.* 289) deux arcs de courbes δ^v et δ'^v, symétriques par rapport aux axes de l'ellipse principale E située dans le plan M. Or je dis que ces arcs de courbes δ^v et δ'^v sont des lignes droites.

Et en effet :

L'ellipse E sera coupée par la sphère S en les points *m* et *n*, *m'* et *n'* qui, unis deux à deux, formeront un rectangle dont les diagonales se croiseront au point *o*; et l'on aura $om = on = om' = on' = R$ (R étant égal au demi-axe moyen de la surface ellipsoïde Σ).

Or, si par le point *m* et l'axe moyen $\overline{pp'} = 2R$, on fait passer un plan P, ce plan coupera la surface Σ suivant une ellipse C ayant pour système de diamètres conjugués la droite mm' et l'axe moyen $\overline{pp'}$, et ces droites $\overline{pp'}$ et $\overline{mm'}$ sont rectangulaires entre elles, elles sont donc les axes de l'ellipse C; mais ces axes $\overline{pp'}$ et $\overline{mm'}$ sont égaux, donc l'ellipse C est un cercle.

Le plan P coupera la sphère S, suivant un cercle C' ayant l'axe moyen $\overline{pp'} = 2R$ pour diamètre, et ce cercle passera par le point *m*; donc les cercles C et C' se confondent, puisqu'ils ont même centre *o*, et qu'ils passent par un même point *m*, et qu'ils sont situés dans un même plan P.

On peut donc énoncer le *théorème* suivant :

XVII. *On peut couper suivant des cercles, un ellipsoïde à trois axes inégaux, par deux séries de plans parallèles entre eux; l'une et l'autre série étant parallèles respectivement à un (certain) plan diamétral passant par l'axe moyen de la surface* Σ.

Et, d'après ce qui précède, il sera facile de construire la direction des plans des

sections circulaires, lorsqu'on connaîtra les trois axes ou les trois diamètres principaux de la surface ellipsoïde Σ.

Des deux modes principaux de génération de l'ellipsoïde à trois axes inégaux.

545. Chacune des *propriétés géométriques* dont jouit l'ellipsoïde à trois axes inégaux, peut conduire dans la *pratique* à une *construction* particulière de cette surface, ou, en *théorie*, à un mode particulier de *génération*, et ce que nous venons de dire s'appliquera aux *quatre* autres surfaces du *second ordre*. Parmi tous les modes de *génération* ou de *construction* de l'ellipsoïde, on doit distinguer les deux suivants.

Premier mode de génération ou de construction.

546. Soient données deux droites D et R, faisant entre elles un angle arbitraire, ces deux droites n'étant pas d'ailleurs situées dans un même plan.

Concevons par la droite D deux plans T et T′ coupant respectivement la droite R aux points m et m'; menons par la droite D un troisième plan P coupant la droite R en un point o situé entre les points m et m'.

Cela posé :

Construisons dans le plan P une ellipse B ayant le point o pour *pôle* et la droite D pour *polaire*.

La construction de la courbe B sera facile, car il suffira de mener par la droite D un plan arbitraire Z coupant la droite R en un point s, situé en dehors des points m et m', puis de mener un plan Z′ parallèle au plan Z et coupant la droite R en un point r et de tracer dans le plan Z′ une ellipse arbitraire M ayant le point r pour centre, le cône (s, M) sera coupé par le plan P suivant une ellipse B ayant le point o pour *pôle* et la droite D pour *polaire* (n°s 329 *et suivants*). L'ellipse B étant construite, nous ferons passer par la droite R une série de plans Y, Y′, Y″.....

Le plan Y coupera le plan T suivant une droite θ et le plan T′ suivant une droite θ', et la droite D en un point y, en lequel concourront les droites θ et θ'. Ce plan Y coupera l'ellipse B en deux points a et b, qui seront en ligne droite avec le point y. Si, dans ce plan Y nous décrivons une ellipse E passant par le point a et par les points m et m', et ayant en ces points les droites θ et θ' pour tangentes, cette ellipse passera nécessairement par le point b.

En faisant les mêmes constructions dans les divers plans Y′, Y″....., on aura une série d'ellipses E, E′, E″,..... qui détermineront un ellipsoïde Σ à trois axes inégaux.

Comme cas particulier de ce mode de *génération* ou de *construction*, on a les deux suivants :

PREMIER CAS *particulier du premier mode.*

547. Si le point o est le centre de l'ellipse B la *polaire* D est située à l'infini; alors les plans T et T′ sont parallèles, ainsi que les droites θ et θ', et alors *forcément* les points m et m' sont équidistants du point o.

Les ellipses *génératrices* E, E′, E″,..... ont donc toutes pour *centre* le point o et la droite mm' pour *diamètre* commun, si la droite R est oblique au plan P. Dans ce cas le plan P et les plans Y, Y′, Y″,....., sont des *plans diamétraux* de l'ellipsoïde Σ.

DEUXIÈME CAS *particulier du premier mode.*

548. Tout étant comme dans le *premier cas* considéré ci-dessus, à l'exception de la droite R, que l'on suppose perpendiculaire au plan P, on voit de suite que le plan P est un *plan principal* et que la droite mm' est un des *axes* de la surface ellipsoïde Σ.

Second mode de génération ou de construction.

549. Imaginons deux droites D et R non situées dans un même plan, et faisant entre elles un angle arbitraire.

Concevons deux plans T et T′ passant par la droite D et coupant la droite R, respectivement, aux points m et m'.

Faisons passer par la droite R deux plans Y et Y_1, le premier plan Y coupera les plans T et T′ suivant les droites θ et θ' et le second plan Y_1 coupera ces mêmes plans T et T′ suivant des droites θ_1 et θ_1'. Cela fait : traçons 1° dans le plan Y une ellipse E arbitraire, mais passant par les points m et m' et ayant pour tangentes en ces points les droites θ et θ', et 2° dans le plan Y_1 une ellipse E_1 aussi arbitraire, mais passant par les points m et m' et ayant pour tangentes en ces points les droites θ_1 et θ_1'.

Imaginons un cône Δ ayant son *sommet* s situé en un point de la droite D, et ayant la courbe E pour *directrice.*

Cela posé :

Par la droite D menons une série de plans X, X_1, X_2,..... coupant la droite R en les points p, p', p'',..... situés entre les points m et m'. Le plan X coupera l'ellipse E en les points q et q' et l'ellipse E_1 en les points r et r', et le cône Δ suivant des génératrices droites I et I′ passant respectivement par les points r et r'. Traçons dans le plan X une ellipse B passant par le point q et par les points r et r' et ayant

pour tangentes en ces points r et r' les droites I et I', cette ellipse B passera *forcément* par le point q'.

Faisons les mêmes constructions dans chacun des plans X_1, X_2, X_3,..... nous obtiendrons une série d'ellipses B, B_1, B_2, B_3..... ayant pour *polaire* commune la droite D et pour *pôle* respectif les points p, p', p''..... La surface *lieu* des ellipses B, B_1, B_2,..... sera un ellipsoïde Σ à trois axes inégaux.

Comme cas particuliers de ce mode de *génération* ou de *construction*, on a les deux suivants.

Premier cas *particulier du second mode.*

550. La droite D peut être située à l'infini, alors les plans T, T' et X, X_1, X_2..... seront parallèles entre eux; alors les points p, p', p'',..... seront les centres respectifs des ellipses B,, B_1, B_2,..... la droite R sera un diamètre commun aux deux ellipses E et E_1, et le cône Δ sera un cylindre dont les génératrices droites pourront avoir toute direction dans l'espace, pourvu toutefois qu'elles soient parallèles aux plans T, T', X, X_1,..... Dans ce cas, la droite R étant oblique par rapport aux plans T, T', X, X_1,..... la surface ellipsoïde Σ sera engendrée par une ellipse B se mouvant parallèlement à elle-même en variant de grandeur, mais en restant semblable et semblablement placée. La droite R sera dans ce cas un *diamètre* de la surface ellipsoïde Σ.

Deuxième cas *particulier du second mode.*

551. Si tout reste ainsi que dans le *premier cas*, la droite R ayant seulement une direction toute particulière par rapport au plan T et lui étant perpendiculaire, alors la droite R sera un des *axes* de l'ellipsoïde Σ.

552. Remarque. Dans les deux modes principaux de génération de l'ellipsoïde à trois axes inégaux, nous avons des ellipses pour *génératrices* et une ellipse pour *directrice*.

DES PARABOLOÏDES ELLIPTIQUES.

553. Concevons un ellipsoïde de révolution Σ, ayant pour axe de rotation une droite Z, perçant cette surface en les points z et z'.

Menons un plan P perpendiculaire à l'axe Z, et coupant la surface Σ suivant un cercle C ayant son centre n situé sur la droite Z.

Cela posé:

Menons par l'axe Z un plan M coupant la surface Σ suivant une ellipse méridienne E ayant pour centre le point o, centre de la surface Σ, et pour sommets les points z et z', et passant par les points m et m' en lesquels le cercle C est coupé par le plan M.

Si nous allongeons l'axe zz' en transportant le point z' en z_1' sur la droite Z, l'ellipse E se transformera en une ellipse E_1 ayant toujours l'un de ses axes dirigés suivant Z et égal à $\overline{zz_1'}$ et passant par les points fixes z, m et m'.

La courbe E_1, en tournant autour de l'axe Z, engendrera un nouvel ellipsoïde de révolution Σ_1, coupant la surface Σ suivant le cercle C, et les deux surfaces Σ et Σ_1 seront tangentes l'une à l'autre au point z.

Tout plan parallèle à un plan méridien M coupera l'ellipsoïde Σ_1 suivant une ellipse qui se projettera orthogonalement sur le plan M suivant une ellipse E_1' concentrique et semblable à l'ellipse méridienne E_1.

Cela posé :

Si l'on suppose que le sommet z' ou z_1' se trouve transporté à l'infini sur l'axe Z, l'*ellipse* E, située dans le plan méridien M, sera *transformée* en une *parabole* E_2 ayant son sommet au point z et passant par les points m et m' et la surface ellipsoïde de révolution Σ, sera *transformée* en un paraboloïde de révolution Σ_2, surface engendrée par la parabole E_2 tournant autour de son axe infini Z.

Or, en supposant que le sommet z' soit transporté à l'infini sur l'axe Z, on transforme évidemment toutes les ellipses E'_1..... sections faites dans l'ellipsoïde Σ_1 par des plans parallèles à un plan méridien M en des paraboles E_2'..... qui se projetteront orthogonalement sur le plan M, suivant des paraboles concentriques et semblables à la parabole méridienne E_2.

Or, on sait que des paraboles concentriques et semblables ne sont autres que des paraboles identiques ou superposables.

Cela posé :

554. Sachant qu'un paraboloïde de révolution (que nous pourrons désigner par Σ dans tout ce qui va suivre) est coupé par une série de plans parallèles entre eux et à l'axe de rotation Z, suivant des paraboles identiques et qu'il est coupé par des plans perpendiculaires à l'axe Z suivant des cercles, démontrons qu'un plan quelconque, mais oblique à l'axe Z, coupe toujours ce paraboloïde Σ suivant une ellipse.

Faisons glisser la surface paraboloïde Σ parallèlement à l'axe Z, le sommet z de cette surface se transportant en z' sur Z, et désignons par Σ' la nouvelle position de la surface Σ.

Les deux surfaces Σ et Σ' sont deux paraboloïdes concentriques et semblables.

Tout plan perpendiculaire à l'axe Z coupera les deux surfaces Σ et Σ' suivant deux cercles C et C' concentriques.

Tout plan parallèle à l'axe Z coupera les deux surfaces Σ et Σ' suivant deux paraboles δ et δ', qui seront concentriques et semblables.

Cela posé :

555. Coupons les deux surfaces paraboloïdes Σ et Σ' par un plan P oblique à l'axe Z et rencontrant dès lors cet axe Z en un certain point p, l'on obtiendra deux courbes β et β', et il faut démontrer que ces deux courbes ne sont autres que deux ellipses concentriques et semblables; et d'abord il est évident que ces deux courbes sont des courbes *fermées*.

Et ensuite si, en un point x de la surface Σ, on mène un plan T tangent à cette surface, ce plan coupera la surface Σ' suivant une courbe γ, démontrons que le point x est le centre de la courbe γ.

Pour cela faire, menons par le point x et dans le plan T une droite θ arbitraire, elle coupera la courbe γ, et par conséquent la surface Σ' en deux points q et q'; la proposition énoncée sera vraie si nous parvenons à démontrer que l'on a : $\overline{xq} = \overline{xq'}$.

Or : par la droite θ nous pourrons toujours mener un plan Q, parallèle à l'axe Z; ce plan Q coupera dès lors les deux surfaces Σ et Σ', suivant deux paraboles δ et δ' concentriques et semblables.

La courbe δ sera tangente en x à la droite θ, et la courbe δ' passera par les points q et q'.

Mais deux paraboles concentriques et semblables δ et δ' jouissent de la propriété suivante, savoir : que si, en un point x de la parabole intérieure δ on mène une tangente θ, cette droite coupe la parabole extérieure δ' en deux points q et q', tels que l'on a toujours $\overline{xq} = \overline{xq'}$. Donc, etc.

Ainsi les deux courbes β et β' jouissent de la propriété suivante, savoir : que si en un point quelconque m de β on mène une tangente ξ à cette courbe, cette droite ξ coupera la courbe β' en deux points b et b' tels que l'on aura : $\overline{mb} = \overline{mb'}$.

556. Si maintenant nous parvenons à démontrer que les deux courbes β et β' sont concentriques et semblables, il sera démontré, en vertu du (n° 342 *bis*), que ces deux courbes ne sont autres que deux sections coniques, concentriques et semblables, et comme elles sont *fermées*, il sera démontré qu'elles ne sont autres que deux *ellipses* concentriques et semblables; et dès lors il sera démontré que tout plan oblique à l'axe Z coupe un *paraboloïde de révolution* suivant une *ellipse*.

Or, nous pourrons toujours mener un plan Θ parallèle au plan P et tangent en un point s au paraboloïde Σ. Cela fait, menons par le point s une droite A parallèle à l'axe Z et perçant le plan P en un point a.

Si par la droite A nous faisons passer une suite de plans V, V', V'', etc., nous couperons la surface Σ suivant des paraboles $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., qui seront toutes identiques ou superposables entre elles et à la courbe méridienne de la surface Σ située dans le plan méridien parallèle aux divers plans V, V'.....

Ces mêmes plans V, V', V'', etc., couperont le plan Θ suivant des droites L, L', L'', etc., tangentes respectivement aux courbes $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., au point s.

Ces mêmes plans V, V', V'', etc., couperont le plan P suivant des droites K, K', K'', etc., parallèles respectivement aux droites L, L', L'', etc., et ces droites K, K', K'', etc., couperont la courbe $\mathcal{C}$ et les paraboles $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., en deux points, savoir :

K coupera		$\mathcal{C}$ et λ	aux points	b et d	et les courbes $\mathcal{C}$ et λ se coupent en ces deux points.		
K'	—	$\mathcal{C}$ et λ'	—	b' et d',	—	*idem.*	
K''	—	$\mathcal{C}$ et λ''	—	b'' et d'',	—	*idem.*	
etc.	—	etc.	—	etc.	—	etc.	

La droite A étant un diamètre commun aux paraboles $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., il s'ensuivra que le point a sera le milieu des cordes $\overline{bd}$, $\overline{b'd'}$, $\overline{b''d''}$, etc., de la courbe $\mathcal{C}$.

Si nous transportons parallèlement à la droite Z le paraboloïde Σ en la position Σ', le point s se transportera en s_1, la droite A restera la même, et les paraboles $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., seront transportés dans leurs plans respectifs V, V', V'', etc., en les paraboles $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_1''$, etc., et le plan P coupera le paraboloïde Σ' suivant la courbe $\mathcal{C}'$, et le plan Θ sera transporté parallèlement à lui-même en Θ_1, et ce plan Θ_1 sera tangent au point s_1 à la surface Σ'.

On démontrera donc, comme ci-dessus, que le point a est le milieu des cordes b_1d_1, $b_1'd_1'$, $b_1''d_1''$, etc., de la courbe $\mathcal{C}'$.

Ainsi les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont chacune un centre et elles ont le même centre.

Cela posé :

Si l'on fait mouvoir la courbe $\mathcal{C}$ parallèlement à elle-même, son centre a parcourant la droite A, elle engendrera un cylindre qui coupera la surface Σ' suivant une courbe $\mathcal{C}_1$, qui sera plane et parallèle à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$, et le centre a de $\mathcal{C}$ se sera transporté en a_1 centre de $\mathcal{C}_1$.

Cela posé :

Désignant par P_1 le plan de la courbe $\mathcal{C}_1$, les plans P et P_1 seront parallèles. Prenons pour plan horizontal de projection un plan perpendiculaire à l'axe Z, et pour plan vertical de projection le plan méridien M passant par les deux droites Z et A.

Projetons orthogonalement les paraboles $\lambda, \lambda', \lambda''$, etc., sur le plan M, nous aurons des paraboles $\lambda^v, \lambda'^v, \lambda''^v$, etc., tangentes en s à la droite L intersection des plans Θ et M (*fig.* 290).

Projetons aussi orthogonalement sur le plan M les paraboles $\lambda_1, \lambda_1', \lambda_1''$, nous aurons des paraboles $\lambda_1^v, \lambda_1'^v, \lambda_1''^v$, tangentes en s_1 à la droite L_1 intersection des plans Θ_1 et M.

Les droites L et L_1 seront parallèles, la droite A sera un diamètre commun et aux paraboles λ^v,..... et aux paraboles λ_1^v.....

Les droites K, K′, K″, etc., situées dans le plan P, se projetteront en une seule et même droite R, intersection des plans P et M.

Les droites K_1, K_1', K_1'', etc., situées dans le plan P_1, se projetteront en une seule et même droite R_1, intersection des plans P_1 et M.

Les droites R et R_1 seront parallèles.

R coupera λ^v en les points b^v et d^v
R coupera λ_1^v en les points b_2^v et d_2^v
R_1 coupera λ_1^v en les points b_1^v et d_1^v.

Les droites $\overline{b_2^v b_1^v}$ et $\overline{d_2^v d_1^v}$ iront concourir en un point y situé sur A.

R coupera λ'^v en les points b'^v et d'^v
R coupera $\lambda_1'^v$ en les points $b_2'^v$ et $d_2'^v$
R_1 coupera $\lambda_1'^v$ en les points $b_1'^v$ et $d_1'^v$.

Les droites $\overline{b_2'^v b_1'^v}$ et $\overline{d_2'^v d_1'^v}$ iront concourir au même point y situé sur A.

Et ainsi de suite (*fig.* 290).

Et cela a lieu parce que les paraboles λ^v, λ'^v, λ''^v,... tout comme les paraboles λ_1^v, $\lambda_1'^v$, $\lambda_1''^v$.... ont un diamètre commun et une tangente commune (nº 345 *quater*).

On aura donc :

$$a_1b_2^v : a_1b_2'^v : a_1b_2''^v : \text{etc.} :: ab_1^v : ab_1'^v : ab_1''^v : \text{etc.}$$

Or, l'on a :

$$a_1b_2 = ab,\ a_1b_2' = ab',\ a_1b_2'' = ab'',\ \text{etc.}$$

Et l'on a évidemment :

$$ab^v : ab'^v :: ab : ab'$$
$$ab^v : ab''^v :: ab : ab''.$$
$$\text{etc.}$$

Donc l'on aura :

$$ab : ab' : ab'' : \text{etc.} :: ab_1 : ab_1' : ab_1'' : \text{etc.}$$

Ainsi les deux courbes 6 et 6′ sont concentriques et semblables.

557. On peut donc énoncer ce qui suit :

Un paraboloïde de révolution Σ jouit des propriétés suivantes :

I. *Une droite ne peut le couper en plus de deux points.*

II. *Une série de plans parallèles à l'axe de rotation Z coupe la surface Σ suivant des paraboles identiques ou superposables.*

III. *Tout plan oblique à l'axe de rotation Z coupe le paraboloïde Σ suivant une ellipse.*

IV. *Une série de plans parallèles entre eux et obliques à l'axe Z, coupent le paraboloïde Σ suivant des ellipses semblables et semblablement placées.*

V. *Si l'on mène un plan Θ, tangent en un point* s *au paraboloïde Σ, une série de plans parallèles au plan Θ couperont la surface Σ suivant des ellipses qui seront deux à deux sur des cônes dont les sommets seront situés sur la droite* A *menée par le point* s *parallèlement à l'axe Z.*

Chacune de ces ellipses sera la courbe de contact d'un cône tangent à la surface Σ et ayant son sommet sur la droite A.

VI. *Deux sections planes parallèles entre elles èt à l'axe Z, étant deux paraboles identiques, on pourra les unir par un cylindre.*

Dès lors :

1° *Si l'on fait rouler un plan tangent à la surface Σ et parallèlement à une droite donnée, la surface enveloppe sera un cylindre tangent à la surface Σ suivant une parabole.*

2° *Si l'on fait rouler un plan tangent à la surface Σ en assujettissant ce plan à passer par un point fixe, la surface enveloppe sera un cône tangent à la surface Σ suivant une ellipse.*

VII. *Par une droite* D *oblique à l'axe Z on peut mener deux plans tangents à la surface Σ; mais le problème est impossible, lorsque la droite* D *est parallèle à l'axe Z.*

VIII. *On ne peut mener à la surface Σ qu'un seul plan tangent qui soit parallèle à un plan donné* P; *et lorsque le plan* P *est parallèle à l'axe Z, le problème est impossible.*

Nota. C'est l'analogue du problème : Mener une tangente θ à une parabole 6, qui soit parallèle à une droite D ; on sait que le problème est impossible lorsque la droite D est parallèle à l'axe infini B de la parabole 6, et qu'il n'est possible et n'a qu'une solution lorsque la droite D coupe l'axe infini B.

En employant un mode de démonstration identique à celui qui nous a servi pour la sphère (n° 367) (seulement au lieu d'avoir à considérer des *cercles*, on aura à considérer des *ellipses*), on arrivera aux trois *théorèmes* suivants :

IX. *Deux sections planes d'un paraboloïde de révolution Σ peuvent être enveloppées par deux cônes, si ces sections ne se coupent pas, ou si elles ont deux points communs, et on ne pourra les envelopper que par un seul cône, si elles se touchent par un point.*

Nota. Si les deux sections coniques sont, l'une une ellipse et l'autre une parabole, ou toutes deux des ellipses, la surface qui les enveloppera sera un *cône;* mais si les deux sections coniques sont l'une et l'autre une parabole, la surface qui les enveloppera sera un *cylindre :* car, dans le paraboloïde de révolution, toute section parallèle à l'axe de rotation Z est identique à la courbe méridienne (parabole) qui lui est parallèle.

Remarquons encore que deux sections paraboliques d'un paraboloïde de révo-

lution se coupent toujours en un point, car les plans de ces deux paraboles se coupent suivant une parallèle à l'axe Z de la surface paraboloïde, et par conséquent parallèle à chacun des axes *infinis* des deux *paraboles*.

X. *Si un cône* Δ *coupe un paraboloïde de révolution* Σ *suivant une ellipse ou une parabole, ce cône recoupera la surface* Σ, *suivant une seconde courbe plane qui sera toujours une ellipse.*

Et si l'on fait passer un cylindre 1° par une parabole, il recoupera la surface paraboloïde suivant une seconde parabole, et 2° par une ellipse, il recoupera la surface paraboloïde suivant une seconde ellipse.

XI. *Si par une droite* D *on mène deux plans* Θ *et* Θ' *tangents à un paraboloïde de révolution* Σ, *et si l'on unit les points de contact* m *et* m' *par une droite* D_1, *ces deux droites* D *et* D_1 *seront dites* polaires réciproques *de la surface* Σ, *et la surface* Σ *jouira, par rapport à ces deux droites* D *et* D_1, *de la propriété suivante :*

Si par la droite D, *on mène une suite de plans* P, P', P'', etc., *coupant la surface* Σ *suivant des ellipses* $\delta, \delta', \delta''$, etc. (*et une de ces courbes sera une parabole qui sera donnée par celui des plans* P *qui sera parallèle à l'axe de rotation* Z *de la surface* Σ), *ces courbes auront la droite* D *pour* polaire commune et extérieure, *et leurs* pôles *seront sur la droite* D_1; *et tous les cônes* $\Delta, \Delta', \Delta''$, etc., *tangents à la surface* Σ *suivant ces courbes* $\delta, \delta', \delta''$, etc., *auront leurs sommets* d, d', d'', etc., *situés sur la droite* D_1; *et* réciproquement, *si par la droite* D_1 *on fait passer une suite de plans* P_1, P_1', P_1'', etc., *ces plans couperont la surface* Σ *suivant des ellipses* $\delta_1, \delta_1', \delta_1''$, etc., (*une d'elles sera une parabole qui sera donnée par celui des plans* P_1 *qui sera parallèle à l'axe* Z *de rotation de la surface* Σ), *ces courbes auront la droite* D_1 *pour* polaire commune et intérieure, *et leurs* pôles *seront sur la droite* D, *et tous les cônes* Δ_1, Δ_1', Δ_1'', etc., *tangents à la surface* Σ *suivant ces courbes* $\delta_1, \delta_1', \delta_1''$, etc., *auront leurs sommets* d_1, d_1', d_1'', etc., *situés sur la droite* D.

Si l'on conçoit deux paraboloïdes de révolution Σ et Σ' concentriques et semblables, on sait que ces deux surfaces ont même axe Z de rotation, et qu'en faisant glisser la surface Σ parallèlement à elle-même et à la droite Z, elle viendra se superposer avec la surface Σ'.

Tout plan parallèle à l'axe Z, coupant les deux surfaces Σ et Σ' suivant des paraboles identiques ou superposables, on peut énoncer ce qui suit.

XII. *Si l'on conçoit un cylindre* Δ *tangent à la surface* Σ *suivant une parabole* δ, *il coupera la surface* Σ' *suivant une parabole* δ' *identique à* δ, *et les plans des deux courbes* δ *et* δ' *seront parallèles.*

Le mode de démonstration employé pour démontrer que deux *ellipsoïdes* de révolution concentriques et semblables sont coupés par un plan oblique à leur

axe commun de rotation Z suivant deux ellipses semblables et concentriques, nous permet d'énoncer ce qui suit :

XIII. *Si l'on construit un plan* Θ *tangent en un point* m *au paraboloïde* Σ, *ce plan coupera le paraboloïde* Σ' *suivant une ellipse* $\mathcal{E}$ *ayant le point* m *pour centre.*

Et si par le point m *on mène une droite* Z' *parallèle à l'axe de rotation* Z, *le cône* Δ *tangent à la surface* Σ' *suivant l'ellipse* $\mathcal{E}$, *aura son sommet* d *situé sur la droite* Z'.

Le mode de transformation employé pour passer de l'ellipsoïde de révolution au paraboloïde de révolution, nous permet d'énoncer ce qui suit :

XIV. *Si l'on conçoit deux paraboloïdes de révolution* Σ' *et* Σ'' *concentriques et semblables, si l'on regarde les divers points* d, d', d'', etc., *de la surface* Σ'', *comme les sommets de cônes* $\Delta, \Delta', \Delta''$, etc., *tangents à la surface* Σ' *suivant des ellipses* $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$, etc., *tous les centres* m, m', m'', etc., *de ces courbes* $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$, etc., *seront sur un paraboloïde de révolution* Σ *concentrique et semblable aux surfaces données* Σ' *et* Σ'', *et les* plans $\Theta, \Theta', \Theta''$, etc., *des courbes* $\mathcal{E}, \mathcal{E}', \mathcal{E}''$, etc., *seront tangents à la surface* Σ *et en les points* m, m', m'', etc.

Transformation du paraboloïde de révolution en paraboloïde elliptique.

558. Concevons un paraboloïde de révolution Σ ayant une droite Z pour axe de rotation ; par la droite Z menons deux plans M et M' rectangulaires entre eux, et coupant la surface Σ suivant deux paraboles φ et φ', identiques comme courbes méridiennes d'une surface de révolution ; menons un troisième plan P perpendiculaire à l'axe Z et coupant la surface Σ suivant un cercle C, ayant son centre o sur la droite Z et désignons son rayon par R.

Cela posé :

La parabole φ coupera le cercle C en deux points p et q, et la parabole φ' coupera ce même cercle C en deux points p' et q'. Les droites $\overline{pq}$ et $\overline{p'q'}$ seront deux diamètres, rectangulaires entre eux, du cercle C.

Cela posé :

Traçons dans le plan P une ellipse E ayant le point o pour centre, $\overline{pq}$ pour l'un de ses axes, et ayant son autre axe dirigé suivant $\overline{p'q'}$, lequel sera plus grand ou plus petit que $p'q'$; ainsi prenons sur $\overline{p'q'}$ deux points arbitraires p'' et q'', mais équidistants du centre o, et $\overline{p''q''}$ sera le second axe de l'ellipse E.

Dès lors, pour une même abscisse comptée sur $\overline{pq}$, le cercle C et l'ellipse E auront leurs ordonnées (parallèles à $\overline{p'q'}$) dans un rapport constant qui sera égal à :

$$\frac{\overline{p'o}}{\overline{p''o}} = \alpha.$$

Dès lors le demi-axe $\overline{op}$ de l'ellipse E sera égal à R, et le demi-axe $\overline{op''}$ de l'ellipse E sera égal à (a.R).

Cela posé :

Si l'on coupe le paraboloïde Σ′ par une suite de plans P, P′, P″, P‴, etc., parallèles entre eux et au plan P, on aura une suite de cercles C, C′, C″, C‴, etc., dont les rayons R, R′, R″, R‴, etc., seront les ordonnées de la parabole φ et de la parabole φ′; et si, dans chaque plan P, P′, P″, etc., on construit des ellipses E, E′, E″, etc., de la même manière que nous avons construit l'ellipse E par rapport au cercle C, ces ellipses ayant dès lors leurs demi-axes situés dans le plan M′ égaux à R, R′, R″, etc., et leurs demi-axes situés dans le plan M, égaux à : aR, aR′, aR″, etc. ; toutes ces ellipses E, E′, E″, etc., seront semblables et semblablement placées, et si l'on unit tous leurs sommets situés sur le plan M′ par une courbe φ_1, cette courbe φ_1 ne sera autre qu'une *parabole*, puisque pour une même abscisse, les ordonnées des courbes φ′ et φ_1 seront dans un rapport constant.

Et si l'on mène une suite de plans Q, Q′, Q″, etc., parallèles à l'axe Z, ces plans couperont la surface Σ suivant des *paraboles* identiques entre elles et à φ ou à φ′, savoir δ, δ′, δ″, δ‴, etc., et chacune de ces paraboles coupera, savoir :

δ coupera	le cercle C	en les points	x et y
—	l'ellipse E	—	x_1 et y_1
—	le cercle C′	—	x' et y'
—	l'ellipse E′	—	x_1' et y_1'
—	le cercle C″	—	x'' et y''
—	l'ellipse E″	—	x_1'' et y_1''
—	etc.		etc.
δ′ coupera	*idem*.		*idem*.

Les points x_1, y_1, x_1', y_1', x_1'', y_1'', etc., seront sur une courbe δ_1' qui ne sera autre qu'une parabole ayant même sommet que la parabole δ, puisque, pour une même abscisse, les ordonnées de ces deux courbes seront évidemment dans un rapport constant.

La surface Σ_1, lieu de toutes les paraboles δ_1, δ_1', δ_1'', etc., a reçu le nom de *paraboloïde elliptique*.

Il est évident, d'après le mode *cylindrique* de transformation employé pour passer de la surface de révolution Σ à la surface Σ_1 (qui évidemment n'est pas de révolution), que les quatorze *théorèmes*, ou *propriétés* démontrées exister pour la surface Σ subsisteront pour la surface Σ_1.

Des sections circulaires du paraboloïde elliptique.

559. Prenons un paraboloïde elliptique Σ_1, ayant pour axe une droite Z; coupons cette surface par un plan P perpendiculaire à Z, nous aurons une ellipse E dont les axes passeront par le centre o situé sur Z et seront dirigés suivant deux droites X et Y, rectangulaires entre elles.

Désignons par A le demi-petit axe dirigé suivant X;

Désignons par B le demi-grand axe dirigé suivant Y.

Faisons passer par X et Z un plan M coupant la surface Σ_1 suivant une parabole δ, et faisons aussi passer par Y et Z un plan M' coupant Σ_1 suivant une parabole δ'; ces deux paraboles auront pour sommet commun le point s, en lequel l'axe Z est coupé par la surface Σ_1, et si en ce point s nous menons un plan Θ tangent à la surface Σ_1, les plans M et Θ se couperont suivant une droite θ tangente en s à la parabole δ, les plans M' et Θ se couperont suivant une droite θ' tangente au même point s à la parabole δ', et la droite Z sera l'axe infini de l'une et l'autre de ces paraboles δ et δ', puisque le plan Θ est perpendiculaire à Z.

Ce qui précède est évident, en vertu du mode *cylindrique* de transformation employé pour passer du paraboloïde de révolution au paraboloïde elliptique.

Le point s a reçu le nom de *sommet* du paraboloïde elliptique, et la droite Z a reçu le nom d'*axe* de cette surface.

Les plans M et M' sont dits *plans principaux* de la surface Σ_1, parce qu'ils divisent respectivement en deux parties égales toutes les cordes de la surface Σ_1 qui sont parallèles à la droite X ou θ et à la droite Y ou θ'; c'est-à-dire que chacun de ces plans M et M' divise en deux parties égales les cordes qui, parallèles entre elles, leur sont respectivement perpendiculaires.

Cela posé :

Du point o comme centre abaissons une normale N sur la parabole δ' et rencontrant cette courbe au point x.

Décrivons du point o comme centre, et avec ox pour rayon une sphère; je dis que cette sphère sera tangente en x au paraboloïde Σ_1.

Et en effet :

Prenons un point y sur la surface Σ_1; par ce point y menons un plan V perpendiculaire à l'axe Z; ce plan V coupera la surface Σ_1 suivant une ellipse α dont le centre a sera sur l'axe Z; et si nous menons en le point y le plan T tangent à la surface Σ_1, les deux plans V et T se couperont suivant une droite λ tangente au point y à la courbe α.

Or, si nous menons une normale N à la surface Σ_1 et au point y, elle se projet-

tera sur le plan V (pris pour plan horizontal de projection) en N^h, et N^h sera normale à la courbe α au point y.

Or, si le point y n'est pas un des quatre sommets de l'ellipse α, la droite N^h ne passera pas par le centre a de la courbe α.

Ainsi, il n'y a que les points de la surface Σ_1 situés sur les deux paraboles *principales* δ et δ' pour lesquels les normales à la surface Σ_1 s'appuient sur l'axe Z.

Ainsi donc, la droite ox sera normale à la surface Σ_1, et la sphère S et la surface Σ_1 seront tangentes l'une à l'autre au point x.

Cela posé (*fig.* 291) :

Faisons tourner le plan M' autour de l'axe Z pour le rabattre sur le plan M, la parabole δ' viendra en δ_1', et les deux paraboles δ et δ_1' auront même sommet s et même axe infini Z.

Le plan M coupera la sphère S suivant un cercle C ayant le point o pour centre, et ce cercle coupera la courbe δ en les quatre points m, n, m', n', qui formeront un trapèze régulier.

Le plan M' coupera la sphère S suivant un grand cercle C' ayant le point o pour centre et tangent en x à la parabole δ', et ce cercle C' se rabattra sur le plan M suivant un cercle qui ne sera autre que le cercle C, et ce cercle C sera tangent en x_1 à la parabole δ_1'.

En sorte que si l'on mène au point x une tangente ξ à la parabole δ', elle ira couper l'axe Z en un point z, et cette tangente ξ se rabattra sur le plan M en une droite ξ_1 passant par le point z et tangente en x_1 au cercle C et à la parabole δ_1'.

Or, l'on sait (*fig.* 292) que lorsque l'on a un trapèze régulier $mnm'n'$ inscrit dans un cercle C, les côtés non parallèles vont concourir en un point z, et si de ce point z on mène une tangente ξ_1 au cercle C, le point de contact x_1 et le point r en lequel se croisent les diagonales du trapèze, sont sur une même perpendiculaire à la droite Z unissant le point z et le centre o du cercle C.

Dès lors il est démontré que le point x_1, contact de la parabole δ_1' et du cercle C, se trouve uni au point r intersection des diagonales du trapèze $mnm'n'$, (dont les sommets m, n, m', n', sont les intersections du cercle C et de la parabole δ) par une droite $\overline{rx_1}$ perpendiculaire à la droite Z, par conséquent la droite $\overline{rx_1}$ située dans le plan M' sera perpendiculaire au plan M.

Or, la sphère S coupe évidemment la surface paraboloïde Σ_1 suivant une courbe composée de deux branches β et β' symétriques et par rapport au plan M et par rapport au plan M', et se croisant en les points x et x' contacts de la sphère S avec le paraboloïde Σ_1.

Les deux courbes β et β' se projetteront donc sur le plan M suivant deux arcs de

courbes δ'' et δ''' passant par les points m et n', m' et n, et se croisant au point r.

Démontrons maintenant que les courbes δ'' et δ''' sont des lignes droites, n'étant autres que les diagonales du trapèze régulier $mnm'n'$, et que dès lors les courbes δ et δ' sont planes et qu'elles sont dès lors des cercles égaux.

Concevons aux points x et x', contact de la sphère S et de la surface Σ_1, les plans tangents T et T' communs à ces deux surfaces.

Concevons deux plans Q et Q' perpendiculaires au plan M, et passant le premier par la diagonale mrn' et le second par la diagonale $m'rn$.

Ces deux plans se couperont suivant la droite $\overline{xrx'}$, et couperont :

1° La sphère S suivant deux cercles D et D' de même rayon;

2° La surface Σ_1 suivant deux ellipses K et K' égales;

3° Les plans T et T' suivant des droites I et I', J et J' qui seront, savoir :

J La tangente commune en x et au cercle D et à l'ellipse K,

I La tangente commune en x' et au cercle D et à l'ellipse K,

J' La tangente commune en x et au cercle D' et à l'ellipse K',

et I' la tangente commune en x' et au cercle D' et à l'ellipse K'.

Or, un cercle D et une ellipse K, qui ont quatre points communs m, x, x', n', et en deux de ces points x et x' des tangentes communes J et I, se confondent en une seule et même courbe ; l'ellipse K n'est donc autre que le cercle D, l'ellipse K' n'est donc (par les mêmes raisons) autre que le cercle D'.

D'après ce qui précède, il sera facile, étant donné un paraboloïde elliptique Σ_1 par son axe infini Z et sa parabole *génératrice* δ et l'ellipse *directrice* E dont le plan est perpendiculaire à l'axe Z et dont le centre o est sur cet axe, il sera facile, dis-je, de construire les *sections circulaires* de la surface Σ_1.

Des quatre modes principaux de génération dont le paraboloïde elliptique est susceptible.

560. Concevons 1° deux plans T et T' se coupant suivant une droite D, et 2° une droite R non située dans un même plan avec la droite D et faisant avec elle un angle arbitraire, et coupant respectivement les plans T et T' en les points m et m', enfin 3° une droite A s'appuyant sur les deux droites D et R, et coupant la première au point d et la seconde au point r, et cette droite A ayant une direction telle que le point r soit le point milieu de la corde $\overline{mm'}$.

Cela posé :

Menons 1° par les droites D et A un plan P, et 2° par les droites R et A un plan Q, et enfin 3° par la droite R un plan de direction arbitraire X, et coupant la droite D en un point s.

Le plan X coupera les plans T et T′ suivant deux droites θ et θ' se croisant au point s et passant respectivement par les points m et m'.

Le plan Q coupera les deux plans T et T′ suivant deux droites I et I′ se croisant au point d, et passant respectivement par les points m et m'.

Cela posé :

Nous pourrons toujours construire dans le plan Q une parabole B passant par les points m et m', et ayant pour tangentes en ces points les droites I et I′; la droite A sera un diamètre de la parabole B, et le point x, milieu de la droite $\overline{rd}$, sera un point de cette parabole B, et si en ce point x on mène une droite R′ parallèle à la droite R, elle sera tangente en ce point x à la parabole B.

Dans le plan P nous pourrons toujours construire une parabole H ayant la droite A pour diamètre et passant par le point x, et ayant en ce point x pour tangente une droite D′ parallèle à la droite D.

Cette parabole H sera coupée par le plan Z en deux points h et h'.

Dans le plan X nous pourrons construire une ellipse E passant par le point h et par les points m et m' et ayant en ces points les droites θ et θ' pour tangentes; cette courbe E passera *forcément* par le point h'.

Cela fait : nous savons qu'il existe un paraboloïde elliptique Σ passant par les trois sections coniques, E (*ellipse*), B et H (*paraboles*).

Tous les plans X, X′, X″,..... qui passeront par la droite R, couperont la surface Σ suivant des *ellipses* E, E′, E″,..... excepté le plan Q qui donnera la parabole B.

Tous les plans Y, Y′, Y″,..... qui passeront par la droite D, couperont la surface Σ suivant des *ellipses* U, U′, U″,..... excepté le plan P qui donnera la parabole H.

Tous les plans Z, Z′, Z″,..... qui passeront par la droite A, couperont la surface Σ suivant des *paraboles* H, H′, H″, H‴.....

561. De ce qui précède on déduit les trois modes suivants et principaux de *génération* ou de *construction* d'un paraboloïde elliptique. Ainsi l'on peut engendrer un paraboloïde elliptique Σ : 1° par une suite d'*ellipses* telles que E, E′, E″,... ayant pour *directrices* les deux *paraboles* B et H ; 2° par une suite d'*ellipses* telles que U, U′, U″,..... ayant pour *directrices* la *parabole* B et l'*ellipse* E; et 3° par une suite de *paraboles* telles que H, H′, H″,..... ayant pour *directrice* l'*ellipse* E, et ayant pour plan tangent commun au point x le plan déterminé par les droites R′ et D′.

Comme *cas particuliers* on peut supposer : 1° que la droite A soit perpendiculaire au plan X de l'ellipse E, et soit dès lors en même temps l'axe infini et de la parabole B et de la parabole H ; 2° que la droite D soit transportée à l'infini, alors

les plans Y, Y′, Y″,..... seront tous parallèles entre eux; et lorsqu'ils seront parallèles au diamètre A, les ellipses U, U′, U″,..... deviendront des *paraboles* identiques ou superposables; dans ce cas, la surface paraboloïde est engendrée par une parabole constante de forme et se mouvant parallèlement à elle-même, un de ses points parcourant une seconde parabole, ce qui donne le *quatrième* mode principal de *génération* ou de *construction* du paraboloïde elliptique; et lorsque les plans Y, Y′, Y″,..... couperont le *diamètre* A, alors ils donneront une suite d'ellipses U, U′, U″,..... parallèles entre elles, semblables et semblablement placées.

562. Remarque. En vertu de ces divers modes de génération du paraboloïde elliptique, on a donc, entre l'*ellipse* et la *parabole*, les quatre combinaisons suivantes :

1° Ellipses *génératrices* avec deux paraboles *directrices*.

2° Ellipses *génératrices* et pour *directrices* une ellipse et une parabole.

3° Paraboles *génératrices* avec une ellipse *directrice*.

4° Paraboles *génératrices* avec une parabole *directrice*.

DES PARABOLOÏDES HYPERBOLIQUES.

563. Nous avons vu, chapitre XI, que si l'on faisait mouvoir une droite K sur deux droites L et L′ et parallèlement à un plan P, on engendrait une surface gauche Σ et que cette surface était doublement réglée, parce que si l'on faisait mouvoir la droite L sur deux positions K et K′ de la droite K, et parallèlement au plan Q construit parallèlement aux droites L et L′, on engendrait précisément la même surface Σ; cette surface Σ est dite, *paraboloïde hyperbolique*.

Dans le chapitre XI nous avons aussi vu ce qui suit :

Les plans *directeurs* P et Q se couperont suivant une droite I, et il existera toujours une position K_1 de la droite K, telle qu'elle fera un angle droit avec I; de même il existera toujours une position L_1 de la droite L, telle qu'elle fera un angle droit avec la droite I, et ces deux droites K_1 et L_1 seront dans un plan R perpendiculaire à la droite I; et ces deux droites K_1 et L_1 se couperont en un point *s* qui sera dit *sommet* de la surface Σ; et la droite Z menée par le point *s*, parallèlement à la droite I, sera dite *axe* de la surface Σ; et si l'on projette orthogonalement les génératrices droites K, K′, K″, etc., dites du *premier système*, et les génératrices droites L, L′, L″, etc., dites du *second système*, sur le plan R (pris pour plan vertical de projection), on aura des droites K^v, K'^v, K''^v, etc., qui seront parallèles entre elles, et on aura aussi des droites L^v, L'^v, L''^v, etc., qui seront parallèles entre elles.

Toutes les droites K, K', K'', etc., projetées *obliquement* sur le plan *directeur* Q qui leur est parallèle (la projection s'effectuant par des droites parallèles à K_1), donneront des droites L^k, L'^k, L''^k, etc., qui se couperont au point k en lequel la droite K_1 perce le plan Q.

Cela posé :

564. Faisons mouvoir la surface Σ parallèlement à elle-même, et le long de l'*axe* Z. Le sommet s se transportera sur Z en un point s', et la surface Σ aura pris la position Σ'; et chacune des droites Z', Z'', Z''', etc., parallèles à Z, couperont les surfaces Σ et Σ' en deux points dont la distance sera égale à $\overline{ss'}$.

Cela posé :

Démontrons que si, en un point m de la surface Σ, nous menons un plan tangent T, ce plan T coupera la surface Σ' suivant une courbe δ dont le point m sera le centre.

Par le point m passent deux génératrices droites de *systèmes différents*, K et L; par le point m menons une droite Z' parallèle à la droite Z et par suite à la droite I. Prenons sur la droite L parallèle au plan Q, un point l', et par ce point menons la génératrice droite K' de la surface Σ; prenons sur la droite Z' un point arbitraire m', nous pourrons toujours construire une droite J passant par le point m', s'appuyant sur la droite K' et parallèle au plan T. Cette droite J coupera la droite K' au point i'.

Si, sur la droite J, je prends un point i'' distant du point m' comme l'est le point i', en sorte que l'on ait $\overline{m'i'} = \overline{m'i''}$, je dis que le point i'' sera sur la surface Σ; de sorte que si l'on mène par le point i'' une génératrice K'' de la surface Σ, elle coupera la droite L en un point l'', tel que l'on aura : $\overline{ml'} = \overline{ml''}$.

Et en effet,

Nous savons que si l'on a trois droites K, K', K'', non parallèles entre elles, mais parallèles à un plan P, elles sont coupées en parties proportionnelles par une suite de plans Q, Q', Q'', etc., parallèles entre eux.

Si donc nous considérons les deux génératrices droites K et L du paraboloïde Σ, qui se croisent au point m, et si 1° nous prenons sur la droite L deux points l' et l'' également distants du point m, et que nous construisions les génératrices K' et K'' du paraboloïde Σ passant respectivement par ces points l' et l''; et si, 2° nous prenons sur la droite K deux points k' et k'' également distants du point m, et que nous construisions les génératrices L' et L'' du paraboloïde Σ passant respectivement par ces points k' et k'', les quatre droites K', K'', L' et L'', détermineront un quadrilatère gauche.

Les sommets de ce quadrilatère seront les points, i' intersection des droites

K' et L', i'_{1} intersection des droites L' et K'', i'' intersection des droites K'' et L'', i_{1}'' intersection des droites L'' et K'.

Les points l', l'', k', k'', sont par construction les milieux des côtés de ce quadrilatère gauche.

Cela posé :

Si, par la droite K, nous menons un plan P_{1} parallèle à K', ce plan sera parallèle à K''.

Si, par la droite L, nous menons un plan Q_{1} parallèle à L', il sera parallèle à L''.

Les deux plans P_{1} et Q_{1} étant respectivement parallèles aux plans *directeurs* P et Q, se couperont suivant la droite Z' parallèle à la droite I.

Cela posé :

Menons par K' et K'' les plans P_{1}' et P_{1}'' parallèles à P_{1} ou P, menons par L' et L'' les plans Q_{1}' et Q_{1}'' parallèles à Q_{1} ou Q, et coupons tout le système par un plan Y perpendiculaire à la droite Z', ce plan sera dès lors perpendiculaire aux six plans P_{1}, P_{1}', P_{1}'', Q_{1}, Q_{1}', Q_{1}''; nous obtiendrons sur le plan Y un parallélogramme qui sera sur ce plan Y la projection orthogonale du quadrilatère gauche de l'espace (*fig.* 293). Par conséquent la droite J qui unit dans l'espace les points i' et i'', et la droite J_{1} qui unit dans l'espace les points i'_{1} et i''_{1} se projetteront suivant des droites J^{v} et J_{1}^{v} qui se croiseront au centre du parallélogramme $(i'^{v}i_{1}'^{v}i''^{v}i_{1}''^{v})$ projection sur le plan R du quadrilatère gauche $(i'i_{1}'i''i_{1}'')$.

Ainsi les droites J et J_{1}, qui unissent deux à deux les sommets opposés du quadrilatère gauche intercepté par les quatre génératrices K', K'', L', L'', du paraboloïde Σ, s'appuient sur la droite Z'.

Démontrons maintenant que ces deux droites J et J_{1} sont parallèles au plan T déterminé par les deux droites K et L.

La droite qui unit les points l' et k'' est dans le plan T; or ces points étant les milieux des côtés $\overline{i'i_{1}'}$, $\overline{i''i_{1}''}$ du triangle $(i'i_{1}''i'')$, il s'ensuit que la droite $\overline{i'i''}$ ou J est parallèle à la droite $\overline{l'k''}$, et par conséquent au plan T.

Ainsi, les deux droites J et J_{1} sont parallèles au plan T, et de plus elles coupent la droite Z', savoir : J en un point m', et J_{1} en un point m_{1}', tels que l'on a : $\overline{mm'} = \overline{mm_{1}'}$.

Cela posé :

Si par le point m' de la droite Z' nous menons un plan T' parallèle au plan T, ce plan T' coupera la surface Σ suivant une courbe δ dont le point m' sera le centre. Dès lors si nous faisons glisser la surface Σ parallèlement à elle-même, et le long de l'*axe* Z, d'une quantité égale à $\overline{mm'}$, le point m' se superposera sur le point m,

le plan T′ se superposera sur le plan T et la surface Σ prendra la position Σ′, et le plan T coupera la surface Σ′ suivant une courbe δ′ qui ne sera autre que la position que la courbe δ est venue occuper dans l'espace après le mouvement *de translation* de la surface Σ.

Ainsi il est démontré que le plan T coupe la surface Σ′ suivant une courbe δ′ dont le point *m* est le centre.

Si nous coupons les deux paraboloïdes Σ et Σ′ par un plan quelconque X, nous obtiendrons deux courbes planes ϐ et ϐ′, et si, par un point quelconque *m* de ϐ, nous menons un plan T tangent à la surface Σ, ce plan T coupera la surface Σ′ suivant une courbe δ′ dont le point *m* sera le centre, et ce plan T coupera le plan X suivant une droite θ tangente en *m* à la courbe ϐ; et cette droite θ coupera la courbe ϐ′ en les points *t* et *t′* qui sont précisément ceux en lesquels se coupent les courbes ϐ′ et δ′; on aura donc : $\overline{mt}=\overline{mt'}$.

Par conséquent, les deux courbes ϐ et ϐ′ jouissent de la propriété, savoir : que le point de contact *m* d'une tangente θ à la courbe ϐ est le milieu de la corde $\overline{tt'}$ interceptée sur θ par la courbe ϐ′. En vertu de ce qui a été dit (n°s 342 *bis* et suivants) les deux courbes ϐ et ϐ′ sont donc deux sections coniques, concentriques et semblables.

Nous pouvons donc énoncer ce qui suit :

I. *Tout plan, quelle que soit sa direction, coupe un paraboloïde hyperbolique suivant une section conique.*

II. *Une droite ne peut couper un paraboloïde hyperbolique en plus de deux points.*

565. Démontrons maintenant que les sections planes d'un paraboloïde hyperbolique ne peuvent être que des *paraboles* ou des *hyperboles*.

Si l'on prend sur une génératrice droite L d'un paraboloïde hyperbolique Σ un point *m*, le plan tangent T en ce point *m* passe par la génératrice du *second système* K qui passe par ce même point *m*.

Or, à mesure que le point *m* s'éloigne sur la droite L du sommet *s* du paraboloïde Σ, la droite K tend de plus en plus à devenir parallèle au plan directeur Q auquel la génératrice L est elle-même parallèle; en sorte que pour le point m_1 situé à l'infini sur la droite L, le plan tangent T_1 à la surface Σ est parallèle au plan Q.

Cela posé :

Tout plan sécant X ne pourra occuper que deux positions par rapport à l'*axe* Z, ou 1° être parallèle à cet axe, ou 2° couper cet axe.

1° *Le plan* X *étant parallèle à l'axe* Z.

Dans ce cas il existera une génératrice du système K et une génératrice du système L, parallèles au plan X, mais qui seront situées à l'infini.

Lorsque le plan X sera parallèle à l'un des plans *directeurs* P ou Q, et ainsi le

plan X étant parallèle au plan P, toutes les génératrices du système K lui seront parallèles, et la section de la surface Σ par le plan X ne sera autre qu'une des génératrices droites du système K.

De même si le plan X est parallèle au plan Q, il coupera le paraboloïde Σ suivant une génératrice droite du système L.

Lorsque le plan X coupe les deux plans *directeurs* P et Q, et qu'il est parallèle à leur intersection I, ou, en d'autres termes, qu'il est parallèle à l'*axe* Z, il est évident qu'il sera parallèle à deux génératrices de systèmes différents, mais situées à l'infini, car la génératrice du système K ou du système L, située à l'infini, est parallèle aux deux plans *directeurs* P et Q, et dès lors à leur intersection I.

Le plan X, dans ce cas, coupera donc la surface Σ suivant une courbe $\mathfrak{C}$ infinie.

Mais pour le point situé à l'infini sur la courbe $\mathfrak{C}$, le plan tangent T_1 à la surface Σ est parallèle à l'un des plans *directeurs*, et le point situé à l'infini sur la courbe $\mathfrak{C}$ est sur une génératrice située à l'infini, par conséquent le plan T_1 est tout entier à l'infini; il ne peut donc couper le plan X que suivant une droite située tout entière à l'infini; la courbe $\mathfrak{C}$ est donc une *parabole.*

2° *Le plan* X *coupant l'axe* Z.

Dans ce cas, le plan X coupe la droite I intersection des deux *plans directeurs* P et Q; on pourra donc toujours construire deux génératrices K (du système K) et L (du système L) parallèles à ce plan X, ces droites K et L étant situées à distance finie, et se coupant en un point m_1.

Le plan X coupera donc la surface Σ suivant une courbe $\mathfrak{C}$ infinie, puisque cette courbe aura des points situés à l'infini sur les droites K et L.

Or, si par K, nous menons un plan Θ parallèle au plan Q, le plan Θ sera tangent à la surface Σ au point situé à l'infini sur K; ce plan Θ coupera dès lors le plan X suivant une droite θ tangente à l'infini à la section $\mathfrak{C}$.

De même, si par L nous menons un plan Θ_1 parallèle au plan P, ce plan Θ_1 sera tangent au paraboloïde Σ au point situé à l'infini sur L, ce plan Θ_1 coupera donc le plan X suivant une droite θ_1 tangente à l'infini à la section $\mathfrak{C}$.

La courbe $\mathfrak{C}$ ayant deux asymptotes θ et θ_1, et étant une section conique, ne sera autre qu'une *hyperbole.*

Et comme nous avions établi précédemment que les droites K et L étaient parallèles au plan X, on voit que les asymptotes θ et θ_1 de l'hyperbole $\mathfrak{C}$ sont respectivement parallèles à ces génératrices de *systèmes différents* K et L.

En sorte que l'on peut énoncer ce qui suit :

III. *Un paraboloïde hyperbolique* Σ *ne peut être coupé par un plan* X *que suivant des paraboles, si ce plan* X *est parallèle à l'axe* Z *de la surface* Σ, *ou suivant des hyperboles, si ce plan* X *coupe l'axe* Z *de la surface* Σ.

***Et dans le cas où la section est une hyperbole, les asymptotes de cette courbe sont parallèles aux génératrices de systèmes différents qui déterminent un plan qui, tangent à la surface Σ, est parallèle au plan sécant* X.**

566. D'après le mode de génération du paraboloïde hyperbolique Σ, la forme de cette surface est telle que si l'on mène en son sommet s le plan tangent T, ce plan, qui coupera la surface suivant les deux génératrices droites K_1 et L_1, partagera la surface en deux parties, l'une située à droite et l'autre située à gauche par rapport à ce plan T, et de telle sorte que si, 1° l'on mène par *l'axe* Z une suite de plans V, V', V'', etc., compris dans l'un λ des deux angles λ et λ' (supplémentaires) formés par les droites K_1 et L_1, ces plans couperont la surface Σ suivant des paraboles $\gamma, \gamma', \gamma''$, etc., tournées dans un sens, et que si 2° l'on mène par ce même *axe* Z une suite de plans V_1, V_1', V_1'', etc., compris dans le second angle λ', formés par les droites K_1 et L_1, ces plans couperont la même surface Σ suivant des paraboles $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_1''$, etc., tournées en sens opposé par rapport aux premières $\gamma, \gamma', \gamma''$, etc.

Et si l'on conçoit deux plans passant respectivement par les droites K_1 et Z, L_1 et Z, et que l'on coupe la surface Σ par un plan P perpendiculaire à l'axe Z et dès lors parallèle au plan tangent T, ce plan P coupera les plans (K_1, Z) et (L_1, Z) suivant des droites θ et θ' qui comprendront entre elles les angles λ et λ' (supplémentaires l'un de l'autre), et ce même plan P coupera la surface Σ suivant une hyperbole μ qui sera comprise entre ses asymptotes θ et θ' dans l'angle λ et son opposé au sommet, si le plan P est à gauche du plan T, et au contraire, dans l'angle λ' et son opposé au sommet, si le plan P est à droite du plan T.

Cela posé :

Si, en un point m d'un paraboloïde hyperbolique Σ, on mène un plan tangent T, ce plan coupera la surface Σ suivant deux génératrices droites K et L de *systèmes différents*, et si, par le point m on mène une droite Z' parallèle à l'*axe* Z de la surface Σ, et que par cette droite Z' et chacune des droites K et L on mène deux plans Q et Q', ils seront coupés par une suite de plans P_1, P_2, P_3, etc., parallèles entre eux et au plan T suivant des droites θ_1 et θ_1', θ_2 et θ_2', θ_3 et θ_3', etc., qui seront les asymptotes des sections hyperboliques $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, etc., données dans la surface Σ par les plans P_1, P_2, P_3, etc., et les centres o_1, o_2, o_3, etc., de ces courbes, seront situés sur la droite Z'.

Je dis que les courbes $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, etc., sont des hyperboles semblables et semblablement placées, en admettant que les plans P_1, P_2, P_3, etc., sont tous situés d'un même côté par rapport au plan T.

Et en effet :

Les asymptotes θ_1, θ_2, θ_3, etc., sont parallèles à la droite K, les asymptotes θ_1', θ_2', θ_3', etc., sont parallèles à la droite L : par conséquent si l'on faisait glisser parallèlement à eux-mêmes les plans P_2, P_3, etc., pour les superposer sur le plan P_1, les points o_2, o_3, etc., viendraient se superposer sur le point o_1, et les droites θ_2, θ_3, etc., se superposeraient sur θ_1, les courbes ϵ_2, ϵ_3, etc., prendraient les positions ϵ_2', ϵ_3', etc., et les courbes ϵ_1, ϵ_2', ϵ_3', etc., auraient mêmes asymptotes θ_1 et θ_1'; elles seraient donc semblables et concentriques : donc, etc.

Ainsi l'on peut énoncer ce qui suit :

IV. *Si l'on mène un plan tangent* T *en un point* m *d'un paraboloïde hyperbolique* Σ, *et si l'on coupe cette surface* Σ *par une suite de plans parallèles entre eux et au plan* T *et situés tous à droite ou tous à gauche*, par rapport à ce plan T, *les sections seront des hyperboles semblables et semblablement placées, et dont les centres seront situés sur la droite Z' qui, passant par le point* m, *sera parallèle à l'axe Z de la surface* Σ.

V. *Si l'on prend un point* z *extérieur à un paraboloïde hyperbolique* Σ, *et qu'on le regarde comme le sommet d'un cône* Δ *tangent à la surface* Σ, *la courbe de contact* δ *sera toujours une hyperbole.*

Cela posé :

Concevons par la droite Z' un plan Y, ce plan coupera les hyperboles ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, etc., en les points b_1 et b_1', b_2 et b_2', b_3 et b_3', etc., et les droites o_1b_1, o_2b_2, o_3b_3, etc., o_1b_1', o_2b_2', o_3b_3', etc., seront parallèles entre elles; et comme les hyperboles ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, etc., sont semblables et semblablement placées, les tangentes B_1 en b_1 à ϵ_1, B_2 en b_2 à ϵ_2, B_3 en b_3 à ϵ_3, etc., seront parallèles; toutes ces droites B_1, B_2, B_3, etc., parallèles entre elles et au plan T, seront tangentes à la surface Σ et formeront un cylindre Δ, tangent à la surface Σ suivant la parabole δ, section faite dans la surface Σ par le plan Y.

On peut donc énoncer ce qui suit :

VI. *Si l'on fait rouler un plan* V *tangentiellement à un paraboloïde hyperbolique* Σ, *ce plan* V *restant pendant son mouvement parallèle à une droite, la surface enveloppe de l'espace parcouru par le plan* V *sera un cylindre ayant pour courbe de contact avec la surface* Σ *une parabole* δ, *dont l'axe infini sera parallèle à l'axe Z de la surface* Σ.

Et réciproquement :

Si l'on fait rouler tangentiellement sur un paraboloïde hyperbolique Σ *un plan* V, *de manière que le point de contact du plan* V *et de la surface* Σ *parcoure une parabole, tracée sur cette surface* Σ, *la surface enveloppe sera un cylindre* (*).

(*) Ce théorème nous conduit à la démonstration d'un problème-plan et que l'on énonce ainsi qu'il suit :

Étant données sur un plan P deux droites A et B se coupant en un point d, prenons sur la droite A deux points arbitraires a et a' et sur la droite B deux points aussi arbitraires b et b'; de telle sorte

567. Démontrons maintenant que si l'on coupe un paraboloïde hyperbolique Σ par une suite de plans parallèles entre eux et à l'*axe* Z de la surface Σ, on obtiendra des *paraboles* identiques ou superposables.

Nous avons fait voir (n° 381) que lorsqu'une surface Σ était engendrée par une courbe C qui se mouvait parallèlement à elle-même sans changer de forme ni de grandeur, l'on pouvait envelopper cette surface Σ par un cylindre Δ tangent à cette surface suivant la courbe C; et qu'ainsi désignant par C, C′, C″, etc. les diverses positions de la courbe génératrice C, on avait les cylindres Δ, Δ', Δ'', etc., respectivement tangents à la surface Σ suivant les courbes C, C′, C″, etc.

Et la réciproque est également vraie, savoir : si l'on peut construire une suite de cylindres Δ, Δ', Δ'', etc. tangents à une surface Σ suivant des courbes C, C′, C″, etc., parallèles entre elles, ces courbes C, C′, C″, etc., seront identiques ou superposables.

Nous pouvons donc énoncer ce qui suit :

VII. *Si l'on coupe un paraboloïde hyperbolique Σ par une suite de plans parallèles entre eux et à l'axe Z de la surface Σ, l'on aura une suite de paraboles identiques ou superposables.*

568. On démontrera comme pour la sphère (en employant le même mode de

---

que les droites $\overline{aa'}$ et $\overline{bb'}$ seront égales ou inégales en longueur; de telle sorte que le point *d* sera en dehors ou en dedans des points *a* et *a'* ou *b* et *b'*; de telle sorte que les longueurs $\overline{ad}$ et $\overline{bd}$ seront égales ou inégales entre elles.

Les points *a* et *a'*, *b* et *b'* étant placés sur les droites A et B, divisons la droite $\overline{aa'}$ en *n* parties égales et divisons aussi la droite $\overline{bb'}$ en le même nombre *n* de parties égales entre elles, unissons les points de division de la droite A avec ceux de la droite B, en croisant ou ne croisant pas les lignes ainsi que l'indiquent les figures 294 et 295, nous obtiendrons une série de droites qui, par leur intersection deux à deux (en considérant deux droites successives), détermineront un polygone dont les côtés seront tous tangents à une même parabole.

Et en effet :

Nous savons que si l'on a deux droites A_1 et B_1, situées dans l'espace (dont A et B seront les projections orthogonales sur le plan P), si l'on mène une série de plans Q, Q′, Q″, etc., parallèles entre eux et coupant ces droites A_1 et B_1 ainsi qu'il suit :

Q	coupera A_1	en un point	a_1	et B_1	en un point	b_1
Q′	—	—	a_1'	—		b_1'
Q″	—	—	a_1''	—		b_1''
etc.	—	—	etc.	—		etc.

Si l'on mène les droites unissant les points homologues a_1 et b_1, a_1' et b_1', etc., on aura en ces droites $\overline{a_1b_1}$, $\overline{a'_1b'_1}$, etc., les génératrices droites (d'un *système*) d'un paraboloïde Σ; et considérant un cylindre Δ tangent à la surface Σ, ce cylindre Δ ayant ses génératrices droites perpendiculaires au plan P, comme ce cylindre Δ sera tangent à la surface Σ suivant une parabole δ_1, il sera coupé par le plan P suivant une parabole δ (laquelle sera la projection orthogonale de la courbe δ_1).

Le cylindre Δ, comme étant tangent à la surface Σ, aura donc pour tangentes les diverses génératrices droites $\overline{a_1a_1'}$, $\overline{b_1b_1'}$, etc. de la surface Σ; dès lors il est évident que les droites $\overline{a_1a_1'}$, $\overline{b_1b_1'}$, etc., se projetteront sur le plan P, en des droites tangentes à la parabole δ projection de la parabole δ_1.

démonstration), que si l'on a deux sections planes d'un paraboloïde hyperbolique se coupant en deux points ou n'ayant aucun point commun, on peut les envelopper par deux cônes, et que si ces sections ont un point de contact on ne peut les envelopper que par un seul cône; mais il faudra que les sections soient tournées dans le même sens lorsqu'elles seront des hyperboles.

De sorte que le théorème admet une restriction pour le paraboloïde hyperbolique.

569. On démontrera comme pour la sphère (en employant le même mode de démonstration), que si un cône ou un cylindre coupe un paraboloïde hyperbolique Σ suivant une section conique, il recoupe cette surface Σ suivant une seconde section conique.

570. Il est facile de démontrer que : 1° lorsque l'une des *polaires réciproques* perce le paraboloïde hyperbolique Σ, l'autre *polaire* perce aussi cette surface Σ.

Et 2° lorsque l'une des *polaires réciproques* ne perce pas le paraboloïde hyperbolique Σ, l'autre *polaire* ne perce pas aussi cette surface Σ.

Et 3° lorsque l'une des *polaires réciproques* touche le paraboloïde Σ en un point *m*, l'autre *polaire* lui est tangente en ce même point *m*.

Et 4° si l'on a une droite D perçant la surface hyperboloïde Σ en un seul point *m*, alors cette droite D est parallèle à l'axe Z de la surface Σ, et elle est un diamètre infini de la surface.

Cela posé :

Si l'on mène deux génératrices droites G et K d'un paraboloïde hyperbolique Σ se croisant en un point *m* de la surface Σ, et si l'on mène par le point *m* une droite D parallèle à l'axe infini Z de la surface Σ, les deux plans (G, D) et (K, D) seront tangents à cette surface Σ, et ils seront l'un et l'autre parallèles à l'axe Z. Le premier plan (G, D) sera parallèle au plan directeur P des génératrices du système G, et le second plan (K, D) sera parallèle au plan directeur Q des génératrices du système K; l'un et l'autre de ces plans sera donc asymptote au paraboloïde Σ, la *polaire* D_1 réciproque de la polaire D sera donc tout entière située à l'infini.

Ce qui vient d'être énoncé ci-dessus est facile à vérifier; en effet :

Soit donnée une droite D, de direction arbitraire par rapport à un paraboloïde hyperbolique Σ; désignons par *s* le sommet, et par Z l'axe infini de la surface Σ; désignons par G et K les génératrices droites de *systèmes différents* se croisant au point *s*.

Les deux droites G et K comprennent entre elles un angle α et un angle 6 supplémentaire de α.

Supposons un plan Y passant par l'axe Z et partageant l'angle α, il coupera la

surface Σ suivant une parabole δ, et supposons un second plan Y' passant par l'axe Z et partageant l'angle 6, il coupera la surface Σ suivant une parabole δ'.

Or, nous savons que les paraboles δ et δ' seront tournées en sens opposés, l'une δ étant en dessous du plan (G, K), l'autre δ' étant en dessus de ce même plan (G, K).

Cela posé :

Si nous considérons un cylindre Δ tangent à la surface Σ, et dont les génératrices soient parallèles à la droite D, ce cylindre Δ touchera la surface Σ suivant une parabole δ' dont le plan contiendra la *polaire* D_1 *réciproque* de D.

Et il est évident que si la droite D perce la surface Σ en deux points, la droite D_1 percera aussi la surface Σ en deux points.

Il est encore évident que si la droite D ne rencontre pas la surface Σ, la droite D_1 ne rencontrera pas aussi la surface Σ.

D'ailleurs on peut facilement construire la droite D_1, la droite D étant donnée de position et quelle que soit sa position dans l'espace par rapport au paraboloïde hyperbolique Σ; car il suffit de mener par D deux plans P et P' coupant la surface Σ suivant des sections coniques C et C', ces deux courbes seront enveloppées par deux cônes dont les sommets x et x' détermineront la droite D_1. Lorsque les sommets x et x' seront à l'infini, ou, en d'autres termes, lorsque les deux cônes enveloppant les deux courbes C et C' se réduiront à un seul cylindre et quelle que soit la direction des plans P et P', alors la *polaire réciproque* D_1 sera située tout entière à l'infini; or, c'est ce qui a lieu évidemment lorsque la droite D est parallèle à l'axe Z de la surface Σ.

571. Nous démontrerons, comme nous l'avons fait pour le paraboloïde elliptique, les diverses propriétés qui existent pour deux paraboloïdes hyperboliques concentriques et semblables. Les énoncés de ces propriétés sont les mêmes pour l'un et l'autre *paraboloïde*.

On doit distinguer deux variétés de paraboloïde hyperbolique : celui pour lequel les plans *directeurs* se coupent sous l'angle droit, la surface est alors dite *rectangulaire*, et celui pour lequel les plans *directeurs* se coupent sous un angle aigu ou obtus, alors la surface est dite *oblique*.

Des divers modes de génération du paraboloïde hyperbolique, par des sections coniques.

572. *Premier mode de génération.* Concevons deux droites D et R non situées dans un même plan et faisant entre elles un angle arbitraire, et une troisième droite A s'appuyant sur les deux droites D et R, et ayant une direction d'ailleurs arbitraire; désignons par d et r les points en lesquels la droite A coupe respectivement les

droites D et R ; désignons par P le plan (D, A), par Q le plan (R, A), par X un plan quelconque passant par la droite D, par Y un plan quelconque passant par la droite R, et par Z un plan quelconque passant par la droite A.

Cela posé :

Prenons sur la droite R deux points m et m', équidistants du point r, et prenons aussi sur la droite D deux points n et n', équidistants du point d.

Désignons par T le plan (D, m), par T′ le plan (D, m'), par Θ le plan (R, n), et Θ' le plan (R, n').

Les plans T et T′ seront respectivement coupés par le plan (A, D), ou P, suivant deux droites θ et θ'.

Cela posé :

1° Nous pourrons toujours construire dans le plan Q une parabole B passant par les points m et m', et ayant pour tangentes en ces points les droites t et t' ; cette parabole aura la droite A pour *diamètre*, et la coupera au point s milieu de la droite $\overline{dr}$.

2° Nous pourrons toujours construire dans le plan P une parabole H passant par les points n et n', et ayant pour tangentes en ces points les droites θ et θ' ; cette parabole aura la droite A pour *diamètre*, et la coupera au même point s, celui en lequel le diamètre A est coupé par la parabole B (*).

La tangente R′ à la parabole B pour le point s sera parallèle à la droite R.

La tangente D′ à la parabole H pour le point s sera parallèle à la droite D.

Le plan (D′, R′) sera donc tangent en même temps aux deux paraboles B et H, et il sera parallèle aux deux droites R et D.

Cela posé :

Parmi les plans X passant par la droite D, prenons celui qui sera parallèle au plan (D′, R′), et traçons dans ce plan X une hyperbole λ ayant son centre au point d, et pour diamètre transverse la droite $\overline{nn'}$, et pour asymptotes deux droites arbitraires L_1 et L_2 se croisant au centre d.

Si l'on fait tourner le plan P autour de la droite A comme axe de rotation, ce plan P prendra diverses positions Z′, Z″, Z‴,.... et la parabole H prendra, en changeant de forme, les positions H′, H″, H‴,.... dans chacun de ces plans Z′, Z″, Z‴,.... Chaque forme H′, H″, H‴,.... de la parabole mobile et variable H seront faciles à déterminer, car pour le plan Z′, par exemple, ce plan Z′ coupera le plan (D′, R′) suivant une droite δ' et l'hyperbole λ en deux points l et l_1, et la parabole H′

(*) Le point s sera le milieu de la droite dr, pour l'une ou pour l'autre parabole B et H, parce que la sous-tangente est double de l'abscisse dans la parabole, que cette parabole soit rapportée à des axes rectangulaires ou à des axes obliques.

passera par les points l et l_1, et elle aura pour tangente au point s la droite δ' et pour *diamètre* la droite A.

La parabole H prendra donc les diverses positions indiquées, ci-dessus, sur les divers plans Z compris entre les plans (A, L_2) et (A, L_1), chacun de ces plans Z coupant en deux points l'hyperbole λ, et l'on voit qu'à mesure que le plan Z approche du plan (A, L_2), ou du plan (A, L_1), la parabole H tend à devenir une ligne droite. Ainsi parmi les paraboles H', H'', H''',.... on aura deux droites H_1 et H_2, tracées dans le plan (D', R') et parallèles respectivement aux asymptotes L_1 et L_2 de l'hyperbole λ, et lorsque le plan Z dépassera le plan (A, L_1) ou le plan (A, L_2), alors il ne coupera plus l'hyperbole λ; on devra donc, pour achever la surface, concevoir que par la droite R on a mené un plan Y parallèle au plan (D', R') et que l'on a tracé dans ce plan Y une hyperbole λ' ayant son centre au point r, pour diamètre transverse la droite mm', et pour asymptotes deux droites L_1' et L_2', se croisant au centre r et parallèles respectivement aux asymptotes L_1 et L_2 de l'hyperbole λ.

Alors la parabole B, en se déformant pendant qu'elle tourne autour de l'axe A, engendrera la seconde partie de la surface.

Il est évident que, par ce mode de génération, on obtiendra un paraboloïde hyperbolique.

Dans ce mode de génération, on a pour *génératrices* des paraboles et pour *directrices* deux hyperboles inversement semblables.

573. *Second mode de génération.* Tout étant disposé ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, nous pourrons faire tourner le plan X (qui contient l'hyperbole λ) autour de la droite D; ce plan X prendra les positions X', X'', X''',.... et la courbe λ prendra les positions successives λ_1, λ_2, λ_3,.... dont la forme sera déterminée de la manière suivante :

Prenant la parabole H et une seconde position H' de cette courbe H, on considérera ces deux paraboles H et H' comme *directrices* du mouvement de l'hyperbole *génératrice* λ. Dès lors le plan X' coupera, 1° la courbe H aux points n et n', et 2° la courbe H' aux points n_1 et n_1', et 3° la droite R en un point r'.

L'hyperbole λ_1, en laquelle se transforme l'hyperbole λ en passant du plan X dans le plan X', passera par les points n_1, n_1', n, n', et elle aura pour tangentes en les points n et n' les droites $\overline{nr'}$ et $\overline{n'r'}$.

On déterminerait de la même manière les diverses hyperboles λ_2, λ_3,..... Enfin lorsque le plan X, après avoir tourné autour de la droite D, et pris une série de positions en lesquelles il coupera la droite A, viendra passer par cette droite A, l'hyperbole λ se transformera en la parabole H.

Par ce mode de génération, on construit la surface en son entier; il diffère donc du précédent, qui ne permet de construire la surface que par moitié.

Dans ce mode de génération on a pour *génératrices* des hyperboles et pour *directrices* des paraboles.

574. *Troisième mode de génération.* Le paraboloïde hyperbolique peut être engendré par une parabole δ de forme invariable se mouvant parallèlement à elle-même, un de ses points parcourant une parabole fixe β, les axes infinis des deux paraboles δ et β étant parallèles entre eux et les deux paraboles δ et β étant tournés en sens inverse.

Ainsi, dans ce mode de génération, on a pour *génératrices* des paraboles, et pour *directrice* une parabole.

575. *Quatrième mode de génération.* Étant tracée sur un plan X une hyperbole λ, on construit une corde coupant ses deux branches, l'une en un point n et l'autre en un point n'; par le milieu d de la corde nn', on mène une droite A de direction arbitraire par rapport au plan X; on prend sur la droite A un point a et dans le plan (a, n, n'), on mène par le point a une droite θ parallèle à la corde $\overline{nn'}$; ensuite on trace dans le plan (a, n, n') une parabole H passant par les points n, n' et a et ayant pour tangente au point a la droite θ.

Cela fait, on fait mouvoir l'hyperbole λ parallèlement à elle-même; elle variera de forme, mais elle restera toujours semblable et semblablement placée et de telle manière que ses points n et n' décriront la parabole H.

Par ce mode de génération, on ne peut construire que la moitié de la surface; pour obtenir la seconde moitié il faudrait prendre une seconde parabole *directrice* β' tournée en sens inverse par rapport à la parabole β et les hyperboles *génératrices* λ' seraient inversement semblables aux hyperboles λ.

Dans ce mode de genération, on a pour *génératrices* des hyperboles et pour *directrice* une parabole.

DES HYPERBOLOÏDES A DEUX NAPPES.

576. Traçons dans le plan vertical une hyperbole H (*fig.* 296) et prenons le plan horizontal de projection perpendiculaire à l'axe transverse de cette courbe.

Désignons par Z cet axe transverse et par A et A' les deux asymptotes de la courbe H, lesquelles droites se croisent au centre o.

Cela posé :

Faisons tourner la courbe H (comme courbe méridienne) autour de l'axe Z, elle engendrera une surface de révolution Σ, et ses asymptotes engendreront un cône de révolution Δ ayant le point o pour sommet.

La surface Σ est composée évidemment de deux nappes distinctes, et chacune d'elles est infinie dans un sens. Cette surface Σ a reçu le nom d'*hyperboloïde à deux nappes de révolution*, et le cône Δ est dit *cône asymptote* de la surface Σ, car il est évident que, puisque les asymptotes A et A' touchent la courbe H à l'infini, le cône Δ touchera la surface Σ suivant deux cercles situés à l'infini, l'un de ces cercles appartenant à l'une des nappes, l'autre cercle appartenant à l'autre nappe de la surface Σ.

Cela posé :

Prenons un point x sur la surface Σ et faisons passer 1° par l'axe Z et le point x un plan M coupant la surface suivant un *méridien* H' et 2° par le point x un plan P perpendiculaire à l'axe Z et coupant la surface Σ suivant un *parallèle* δ.

Les tangentes au point x, savoir : θ à H' et ξ à δ détermineront un plan T tangent au point x à la surface Σ.

Or, le plan M coupe le cône Δ suivant deux génératrices droites G et G', asymptotes de l'hyperbole méridienne H'; donc θ coupe G et G' en deux points g et g' tels que l'on a : $\overline{gx}=\overline{g'x}$.

Or, le plan P coupe le cône Δ suivant un cercle C concentrique au cercle δ, donc ξ coupe C en deux points q et q' tels que l'on a : $\overline{qx}=\overline{q'x}$.

Or, le plan T coupe le cône Δ suivant une ellipse E dont le point x sera le centre, car les deux droites $\overline{qq'}$ et $\overline{gg'}$ sont rectangulaires entre elles, et si l'on construit les tangentes à la courbe E pour les points g et g' on trouve qu'elles sont horizontales; les deux droites $\overline{qq'}$ et $\overline{gg'}$ forment donc un système de diamètres conjugués rectangulaires entre eux, elles sont donc les axes de l'ellipse E.

Dès lors, si dans le plan T on mène par le point x une droite quelconque L, elle coupera l'ellipse E en deux points l et l' tels que l'on aura : $\overline{xl}=\overline{xl'}$.

Cela posé :

Si l'on mène un plan Q de direction arbitraire, mais coupant la surface Σ suivant une courbe $\mathfrak{S}$ et le cône Δ suivant une section conique $\mathfrak{S}_1$, il sera facile de démontrer que les courbes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_1$ sont concentriques et semblables et que $\mathfrak{S}$ n'est autre qu'une section conique; et en effet :

Si par un point x de la courbe $\mathfrak{S}$ on mène un plan T tangent à la surface Σ, il coupera le plan Q suivant une droite L, laquelle percera la section conique $\mathfrak{S}_1$ en deux points l et l', tels que l'on aura (en vertu de ce qui a été dit ci-dessus) $\overline{xl}=\overline{xl'}$. Et cela aura lieu pour tous les points x de la courbe $\mathfrak{S}$.

La courbe $\mathfrak{S}$, qui est inconnue, est intérieure par rapport à la section conique $\mathfrak{S}_1$. Mais il a été démontré (n° 342 *bis*, 1°) que lorsque l'on avait deux courbes telles que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_1$, elles étaient deux sections coniques concentriques et semblables.

Ainsi, on peut énoncer ce qui suit :

I. *Tout plan, quelle que soit sa direction, coupe un hyperboloïde à deux nappes et de révolution suivant une section conique, qui peut être ou une ellipse ou une parabole ou une hyperbole, suivant la direction du plan sécant par rapport au cône asymptote de la surface hyperboloïde.*

II. *Une droite peut percer un hyperboloïde à deux nappes et de révolution en un ou deux points, mais elle ne peut le rencontrer en plus de deux points.*

Menons par le centre o de l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution Σ une droite D coupant cette surface Σ en deux points d et d'; le point d sera sur l'une des nappes et le point d' sera sur la seconde nappe.

Par l'axe Z de révolution et la droite D nous ferons passer un plan P coupant la surface Σ suivant une hyperbole méridienne H, et ce même plan P coupera le cône asymptote Δ suivant deux génératrices droites G et G′ qui seront les asymptotes de la courbe H, laquelle aura le point o (centre de la surface Σ) pour son centre.

La droite D percera l'hyperbole H en les points d et d'.

Cela posé :

Par la droite D faisons passer une infinité de plans R, R′, R″, etc., ils couperont la surface Σ suivant des sections coniques $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., qui seront toutes des hyperboles en vertu des positions que les plans R, R′, R″, etc., affectent par rapport au cône asymptote Δ; puisque chacun de ses plans coupe le cône Δ suivant deux génératrices droites.

Construisons au point d un plan Θ tangent à la surface Σ, ce plan Θ sera coupé par les plans R, R′, R″, etc., suivant des droites $\theta, \theta', \theta''$, etc., qui seront respectivement tangentes aux courbes $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., et au point d.

Construisons au point d' un plan Θ_1 tangent à la surface Σ, ce plan Θ_1 sera coupé par les plans R, R′, R″, etc., suivant des droites $\theta_1, \theta_1', \theta_1''$, etc., qui seront respectivement tangentes aux courbes $\alpha, \alpha', \alpha''$, et au point d'.

Or, comme la surface Σ est de révolution, les plans Θ et Θ_1 seront perpendiculaires au plan méridien P; et comme la droite D est un diamètre de l'hyperbole méridienne H, il s'ensuit que les plans Θ et Θ_1 sont parallèles. Dès lors, les hyperboles de section $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., auront toutes le point o pour centre et la droite D ou $\overline{dd'}$ pour diamètre commun.

Cela posé :

Prenons le plan méridien P pour plan vertical de projection, et projetons orthogonalement sur ce plan P les courbes $\alpha, \alpha', \alpha''$, etc., nous obtiendrons les hyperboles $\alpha^v, \alpha'^v, \alpha''^v$, etc., qui auront la droite $\overline{dd'}$ pour diamètre commun, et qui auront en d et d' pour tangentes communes les droites parallèles entre elles λ et λ_1 intersection du plan P par les plans Θ et Θ_1. Or, si l'on mène une droite Y parallèle à λ, elle coupera respectivement les courbes $\alpha^v . \alpha'^v, \alpha''^v$, etc., en les points

m^v, m'^v, m''^v, etc., qui seront les projections des points m, m', m'', etc., situés sur les hyperboles α, α', α'', etc., et tous ces points m, m', m'', etc., seront sur la section conique γ intersection de la surface Σ par le plan X perpendiculaire au plan P, et dont V^x est la trace verticale; et évidemment le plan X est parallèle aux plans Θ et Θ_1.

Or, l'on sait : 1° que les tangentes ξ^v, ξ'^v, ξ''^v, etc., menées respectivement aux points m^v, m'^v, m''^v, etc., des courbes α^v, α'^v, α''^v, etc., se coupent en un même point z situé sur le diamètre D qui est lui-même situé sur le plan P (n° 346 *ter*), par conséquent les droites ξ, ξ', ξ'', etc., qui seront les tangentes aux courbes de l'espace α, α', α'', etc. pour les points m, m', m'', etc., se couperont en ce point z, etc., etc.; 2° que si l'on mène une seconde droite $V^{x'}$ parallèle à V^x et coupant les courbes α^v, α'^v, α''^v, etc., en les points n^v, n'^v, n''^v, etc., les points n, n', n'', etc., de l'espace seront sur une section conique γ' intersection du plan X' et de la surface Σ; en sorte que les deux courbes γ et γ' seront des sections parallèles de la surface Σ, et les droites δ^v, δ'^v, δ''^v, etc., qui uniront les points m^v et n^v, m'^v et n'^v, m''^v et n''^v, etc., iront se couper en un même point z_1 de la droite D; dès lors, les droites de l'espace δ, δ', δ'', etc., qui uniront deux à deux les points m et n, m' et n', m'' et n'', etc., iront se couper en ce même point z_1.

Les droites ξ, ξ', ξ'', etc., forment donc un cône K tangent à la surface Σ suivant la section conique γ.

Les droites δ, δ', δ'', etc., forment donc un cône K_1 qui coupe la surface Σ suivant deux sections coniques parallèles entre elles, γ et γ'.

Si l'on a une suite de plans X, X', X'', etc., parallèles entre eux et au plan Θ, et dès lors perpendiculaires au plan P, ces plans couperont la surface Σ suivant des sections coniques semblables et semblablement placées γ, γ', γ'', etc.

Ces courbes γ, γ', γ'', etc., couperont l'hyperbole méridienne H en des points h, h', h'', etc., pour lesquels les plans Q, Q', Q'', etc., tangents à la surface Σ seront perpendiculaires au plan méridien P; dès lors, les tangentes aux courbes γ, γ', γ'', etc., en ces points h, h', h'', etc., seront perpendiculaires au plan P; dès lors, si l'on fait mouvoir le plan Q tangentiellement à la surface Σ, son point de contact h parcourant la courbe H, la surface développable Φ, enveloppe de l'espace parcouru par ce plan Q sera un cylindre ayant l'hyperbole méridienne H pour section droite.

577. D'après ce qui précède, on peut énoncer ce qui suit :

III. *Si l'on prend un point* z *hors de l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution* Σ, *et qu'on le regarde comme le sommet d'un cône* K *tangent à la surface* Σ, *la courbe de contact* γ *sera une courbe plane, et dès lors une section conique.*

1° *Si le point* z *est dans l'intérieur du cône asymptote* Δ, *la courbe de contact* γ *sera une ellipse;*

2° *Si le point* z *est sur le cône asymptote, la courbe* γ *sera une parabole;*

3° *Si le point* z *est hors du cône asymptote, la courbe* γ *sera une hyperbole.*

IV. *Si l'on fait mouvoir un plan* Θ *tangentiellement à une surface hyperboloïde à deux nappes et de révolution* Σ, *et parallèlement à une droite* B, *la courbe de contact sera une hyperbole diamétrale, et le problème ne sera possible qu'autant qu'en menant par le centre* o *de la surface* Σ, *ou le sommet* o *du cône asymptote* Δ, *une droite* B′ *parallèle à* B, *cette droite* B′ *sera située dans l'intérieur du cône* Δ.

V. *Une suite de plans parallèles coupent l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution suivant des sections coniques semblables et semblablement placées.*

En vertu de ce qui a été démontré touchant deux sections coniques, concentriques et semblables, et semblablement placées, on peut énoncer ce qui suit :

VI. *Si l'on a deux hyperboloïdes à deux nappes et de révolution* Σ *et* Σ′ *ayant même axe de rotation* Z *et concentriques et semblables; si l'on mène un plan* T *tangent en un point* m *à la surface intérieure* Σ, *ce plan* T *coupera la surface extérieure* Σ′ *suivant une section conique* γ *dont le point* m *sera le centre.*

Si l'on fait rouler sur la courbe γ *un plan tangent à la surface* Σ′, *ce plan engendrera un cône* K *dont le sommet* z *sera sur une troisième surface* Σ″ *qui sera un hyperboloïde à deux nappes et de révolution concentrique et semblable aux deux premiers* Σ *et* Σ′.

Si l'on a deux hyperboloïdes à deux nappes et de révolution Σ″ *et* Σ′ *concentriques et semblables, et si l'on considère chaque point* z *de la surface* Σ″ *comme le sommet d'un cône* K *tangent à la surface intérieure* Σ′ *suivant une section conique* γ, *la surface enveloppe de tous les plans des courbes* γ *sera un troisième hyperboloïde à deux nappes et de révolution* Σ, *concentrique et semblable aux deux premiers* Σ′ *et* Σ″.

On peut appliquer à l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution, et cela mot à mot, la démonstration qui a été donnée pour la sphère au sujet des *polaires réciproques;* il suffit de changer le mot *cercle* en le mot *section conique.*

On peut donc énoncer ce qui suit :

VII. *Si par une droite* D *extérieure à un hyperboloïde à deux nappes et de révolution* Σ, *on mène deux plans* T *et* T′ *tangents aux points* m *et* m′, *la droite* D′ *qui unit les points de contact* m *et* m′ *est la polaire réciproque de la droite* D.

Les points m *et* m′ *seront sur une même nappe de la surface* Σ, *si la droite* D *coupe le cône asymptote* Δ; *ces points* m *et* m′ *seront, l'un sur une des nappes et l'autre sur la seconde nappe de la surface* Σ, *si la droite* D *ne rencontre pas le cône* Δ.

578. Toutes les propriétés que nous avons reconnues exister pour l'*ellipsoïde* de révolution et le *paraboloïde* de révolution, subsistent pour l'*hyperboloïde à deux*

nappes et de révolution; et tout ce qui a été établi rigoureusement ci-dessus, permettra de les démontrer (ces propriétés) ou de les déduire comme *conséquences;* et il ne sera pas difficile de reconnaître les modifications que doit faire apporter dans *les énoncés* la forme particulière de l'hyperboloïde à deux nappes.

Transformation de l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution en un hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux.

579. Concevons un hyperboloïde à deux nappes et de révolution Σ dont l'axe de rotation Z soit vertical.

Prenons pour plan vertical de projection, un plan passant par l'axe Z et pour plan horizontal de projection, un plan perpendiculaire à cet axe Z.

Le plan vertical coupera la surface Σ (*fig.* 296) suivant une hyperbole méridienne H, et le cône asymptote Δ suivant deux génératrices droites G et G'. Le plan horizontal coupera la surface Σ suivant un cercle C et le cône Δ suivant un cercle C'; ces deux cercles C et C' seront concentriques et auront le point Z^h pour centre commun.

Cela posé :

Traçons dans le plan horizontal une ellipse E concentrique au cercle C et ayant le diamètre $\overline{aa'}$ de ce cercle C pour l'un de ses axes.

L'ellipse E sera la *transformée cylindrique* du cercle C, de sorte que pour une même abscisse $\overline{qm^v}$, les ordonnées $\overline{mm^v}$ et $\overline{m_1m^v}$ seront dans un rapport constant.

Si par l'axe Z on fait passer un plan X, ce plan coupera la surface de révolution Σ suivant une hyperbole méridienne H' qui se projettera sur le plan vertical de projection en une hyperbole H'^v.

On transformera *cylindriquement* le plan X en un plan X_1 passant par l'axe Z, et l'hyperbole H' en une hyperbole H_1' située dans le plan X_1; et cette courbe H_1' sera dès lors la section faite par le plan X_1 dans le cylindre Φ ayant H'^v pour section droite.

En menant par l'axe Z une suite de plans X, X', X'', etc., ils couperont la surface de révolution Σ suivant des hyperboles H, H', H'', etc., et ces plans se transformeront *cylindriquement* en des plans diamétraux (passant tous par l'axe Z) X_1, X_1', X_1'', etc., sur lesquels seront les hyperboles H_1, H_1', H_1'', etc., *transformées cylindriques* des diverses courbes méridiennes H, H', H'', etc., de la surface Σ.

Toutes ces hyperboles H_1, H_1', H_1'', etc., détermineront une surface Σ_1 composée de deux nappes séparées entre elles comme pour la surface Σ. Et il est dès

lors évident que tout plan passant par l'axe Z coupera la surface Σ_1 suivant une hyperbole, et que tout plan perpendiculaire à l'axe Z coupera cette surface Σ_1 suivant une ellipse.

Et il est encore évident, en vertu du mode de *transformation cylindrique* employé, que les sections faites dans la surface Σ_1 par des plans perpendiculaires à l'axe Z seront des ellipses semblables et semblablement placées. Cette surface Σ_1 a reçu le nom d'*hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux*.

Il est, en outre, évident que toutes les propriétés que nous avons reconnues exister pour l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution Σ, passeront au moyen du mode de *transformation cylindrique* sur l'hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux Σ_1. Ainsi, l'*hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux* jouit des mêmes propriétés que l'*ellipsoïde à trois axes inégaux* et que le *paraboloïde elliptique*, sauf les modifications que la forme de chacune des surfaces peut et doit y apporter, modifications qu'il est facile de reconnaître.

Ainsi, en se servant du même mode de démonstration que celui employé pour la sphère, nous démontrerons avec facilité que :

1° *Si un cône coupe un hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux suivant une section conique, il recoupe cette surface suivant une seconde section conique;*

2° *Deux sections planes d'un hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux, peuvent toujours être enveloppées par deux cônes, si les sections planes ne se coupent pas ou se coupent en deux points, et par un seul cône si les deux sections planes ont un point de contact; et cette propriété subsiste, les deux sections planes étant situées en même temps sur une seule des deux nappes de l'hyperboloïde, ou l'une des sections planes étant sur l'une des deux nappes, l'autre section plane étant sur l'autre nappe de l'hyperboloïde.*

Des trois axes de l'hyperboloïde à deux nappes et non de révolution.

580. Nous avons dit ci-dessus que la surface Σ_1 avait été nommée, *à trois axes inégaux ;* cherchons ces axes.

Il est évident que si l'on emploie le même mode de transformation *cylindrique*, qui nous a servi à transformer l'hyperboloïde de révolution en un hyperboloïde non de révolution, on transformera le cône de révolution Δ asymptote à l'hyperboloïde de révolution Σ en un cône oblique (non de révolution) Δ_1 qui sera asymptote à l'hyperboloïde Σ_1.

Les deux surfaces Δ_1 et Σ_1 seront telles que si on les coupe par un plan Q perpendiculaire à l'*axe* Z, l'on obtiendra deux ellipses concentriques et semblables

et semblablement placées, et dont le centre sera au point q en lequel le plan Q coupe l'axe Z.

Or, lorsque nous avons (n° 374 *ter*) cherché les axes d'un cône oblique, nous avons déterminé, par ces *axes* combinés deux à deux, trois plans qui étaient rectangulaires entre eux, et qui étaient de plus des plans *conjugués*, chacun d'eux coupant, rectangulairement et en parties égales, les cordes parallèles à l'*axe* par lequel il ne passait pas.

Dès lors, on voit que l'hyperboloïde Σ_1 aura pour systèmes de plans diamétraux conjugués tous ceux de son cône asymptote Δ_1.

Dès lors, aussi, on voit que l'hyperboloïde Σ_1 n'aura qu'un système de plans diamétraux conjugués rectangulaires entre eux et qui sera précisément celui de son cône asymptote Δ_1.

On peut donc énoncer ce qui suit :

1° *Un hyperboloïde à deux nappes et non de révolution a une infinité de systèmes de plans diamétraux conjugués et un seul système de plans diamétraux principaux ou rectangulaires entre eux* ;

2° *Ayant déterminé le cône asymptote d'un hyperboloïde à deux nappes, on déterminera les trois axes rectangulaires entre eux de ce cône, et l'on aura la direction des trois axes rectangulaires entre eux de l'hyperboloïde à deux nappes.*

Déterminons maintenant la longueur des axes de l'hyperboloïde à deux nappes et non de révolution.

L'axe Z coupe la surface hyperboloïde Σ_1 en les deux points d et d' (*fig.* 297).

Un plan perpendiculaire à l'axe Z coupe la surface Σ_1 suivant une ellipse E, et le cône asymptote Δ_1 suivant une ellipse E_1, et ces deux courbes E et E_1 sont concentriques et semblables et semblablement placées.

Si par le point d on mène un plan Θ perpendiculaire à l'axe Z, il sera tangent en d à la surface Σ_1 (en vertu du mode de *transformations cylindriques* qui nous a fait passer de l'hyperboloïde de révolution Σ à la surface non de révolution Σ_1) et coupera le cône Δ_1 suivant une ellipse E' semblable et semblablement placée, par rapport à l'ellipse E_1.

Cela posé :

Si par l'axe Z on fait passer un plan quelconque, il coupera la surface Σ_1 suivant une hyperbole, et le cône Δ_1 suivant deux génératrices droites qui (en vertu du mode de *transformation* employé pour passer des surfaces de révolution Σ et Δ aux surfaces non de révolution Σ_1 et Δ_1) seront les asymptotes de cette hyperbole de section.

Or, on sait, que si au sommet d d'une hyperbole on mène une tangente θ à cette courbe et coupant une des asymptotes en un point n, en désignant par o

le centre de la courbe, les droites $\overline{od}$ et $\overline{dn}$ donnent les longueurs des demi-axes de l'hyperbole.

Dès lors, si par l'axe Z on mène un plan X coupant l'hyperboloïde Σ_1 suivant une hyperbole H et la courbe E' en un point a', les demi-axes de la courbe H seront égaux à $\overline{od}$ et $\overline{da'}$.

Et si l'on conçoit un cylindre ayant l'ellipse E' pour section droite et ayant dès lors ses génératrices droites parallèles à l'axe Z, ce cylindre sera coupé par un plan P passant par le centre o de la surface Σ_1 (ou le sommet o du cône asymptote Δ_1) et mené perpendiculairement à l'axe Z, suivant une ellipse δ identique à l'ellipse E'; le plan X coupera l'ellipse δ en un point p, et dès lors les demi-axes de l'hyperbole H seront $\overline{op}$ et $\overline{od}$, le point o étant le centre de cette courbe H.

On voit donc que toutes les hyperboles H, situées dans les divers plans X, qui passent par l'axe Z, ont un même centre o et un demi-axe commun et transverse $\overline{od}$, et que le second axe qui est non transverse varie comme les diamètres de l'ellipse δ.

Si l'on conçoit les axes A et B de l'ellipse δ, les trois plans (A, Z), (B, Z) et (A, B) seront les plans diamétraux *principaux* de la surface Σ_1, et ce sont les axes de l'ellipse δ et la droite $\overline{dd'}$ située sur Z, qui sont dits *les axes* de l'hyperboloïde Σ_1; et les points d et d' en sont dits les *sommets*.

Des sections circulaires de l'hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux.

387. L'hyperboloïde non de révolution et à deux nappes Σ_1 est toujours coupé par un plan quelconque P suivant une section conique E qui est concentrique et semblable et semblablement placé à la section conique E_1 obtenue dans son cône asymptote Δ_1 par le même plan P.

Or nous savons qu'un cône oblique Δ_1 peut être coupé par un plan et sous deux directions contraires, suivant des cercles; dès lors, il est évident que les plans qui donneront des *sections circulaires* dans le cône asymptote Δ_1, donneront aussi des *sections circulaires* dans l'hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux Σ_1.

Ainsi, il est démontré que : *l'hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux jouit de la propriété d'avoir des sections circulaires et qu'on peut les déterminer facilement au moyen de son cône asymptote.*

De plus, il est démontré que : *les plans des sections circulaires de l'hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux sont parallèles à l'axe moyen de cette surface.*

Des divers modes de génération dont est susceptible l'hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux.

582. Ce qui a été dit au sujet des *polaires réciproques*, nous permet de voir sur-le-champ que l'on pourra engendrer chaque nappe de l'hyperboloïde à deux nappes comme nous avons engendré le paraboloïde elliptique, et qu'il suffira de remplacer les *paraboles* considérées soit comme des *génératrices*, ou soit comme des *directrices* dans le paraboloïde elliptique, par des *hyperboles*, pour obtenir l'hyperboloïde à deux nappes.

Ainsi, on aura deux modes principaux de *génération* ou de *construction*, savoir : 1° par des ellipses *génératrices* se mouvant sur une hyperbole *directrice ;* 2° par des hyperboles *génératrices* se mouvant sur une ellipse *directrice*.

Dans le *premier cas*, chaque ellipse coupera en deux points la même branche de l'hyperbole.

Dans le *deuxième cas*, chaque hyperbole coupera l'ellipse en deux points et par une seule de ses branches.

DES HYPERBOLOÏDES A UNE NAPPE.

583. Nous avons vu, dans le chapitre onzième, que si l'on faisait mouvoir une droite sur trois droites, on engendrait une surface Σ qui, 1° était doublement réglée; 2° avait un centre *o*; 3° ce centre *o* était le sommet d'un cône Δ intérieur à la surface Σ et ayant pour *directrice* ou *base* une section conique, et qu'il était tel que chacune de ses génératrices droites G était parallèle à deux génératrices droites et de *systèmes différents* K et L de la surface Σ, la première génératrice K appartenant au *premier système* de génération en lignes droites, la seconde génératrice L appartenant au *second système* de génération en lignes droites de la surface Σ; 4° le plan T tangent au cône Δ suivant la génératrice G coupait la surface Σ suivant les droites K et L et était un plan asymptote de cette surface Σ; 5° tout plan P coupait la surface Σ et le cône Δ suivant des sections coniques, concentriques et semblables et semblablement placées.

La surface Σ a reçu le nom d'hyperboloïde à une nappe et à trois axes inégaux.

Cela posé :

Le cône Δ étant un cône oblique non de révolution, nous pourrons toujours déterminer ses axes X, Y, Z (nos 374 *bis* et suivants), et en menant un plan P perpendiculaire à l'axe Z, nous aurons pour section dans le cône Δ une ellipse E, et pour section dans la surface Σ une ellipse E′, et les courbes E et E′ seront sem-

blables et semblablement placées, et auront pour centre commun le point p en lequel l'axe Z est coupé par leur plan P.

Si l'on mène par l'axe Z un plan Q, ce plan coupera le cône Δ suivant deux génératrices droites G et G′ (et les angles $\widehat{Z,G}$, et $\widehat{Z,G'}$ seront égaux, puisque la droite Z est un des axes du cône Δ), et si nous menons deux plans tangents T et T′ au cône Δ, le premier par la droite G et le second par la droite G′, le plan T coupera l'hyperboloïde Σ suivant deux génératrices droites K et L, et le plan T′ coupera aussi l'hyperboloïde Σ suivant deux génératrices droites K′ et L′. Les droites K et L′, K′ et L se couperont respectivement en les points l' et l, comme étant des génératrices de *systèmes différents*.

La droite $\overline{ll'}$ passera par le centre o de la surface Σ ou le sommet o du cône asymptote Δ; le plan Θ′ passant par K et L′ et tangent au point l à la surface Σ, et le plan Θ′ passant par K′ et L et tangent au point l' à la surface Σ, seront parallèles entre eux et au plan Q.

Si l'on mène par le centre o de la surface Σ, ou sommet o du cône Δ, un plan R perpendiculaire à l'axe Z, ce plan R, qui ne sera autre que le plan diamétral principal (X, Y) du cône Δ, sera perpendiculaire aux trois plans Θ, Θ′ et Q, et coupera la surface Σ suivant une ellipse δ qui aura le point o pour centre; et puisque le plan Θ est perpendiculaire au plan R, les droites K et L′ seront projetées orthogonalement par le plan Θ sur ce plan R suivant une seule et même tangente θ à la courbe δ; par la même raison, les droites K′ et L se projetteront orthogonalement sur le plan R suivant une droite θ' (intersection des plans Θ′ et R) qui sera tangente à la courbe δ; et comme évidemment la surface Σ est symétrique par rapport aux trois plans diamétraux principaux (X, Z), (Y, Z), (X, Y) de son cône asymptote Δ, et que ces plans sont en même temps les plans diamétraux conjugués et principaux de la surface Σ, il s'ensuit que les points l et l' sont nécessairement sur l'ellipse δ et ne sont autres que les points de contact des droites θ et θ' avec cette ellipse δ. Mais la chose est évidente en remarquant que les deux plans T et T′ se coupent nécessairement suivant une droite I perpendiculaire à l'axe Z (puisque les génératrices G et G′ sont dans un plan Q passant par l'axe Z du cône Δ), et cette droite I ne sera autre que $\overline{ll'}$.

Cela posé :

Si l'on coupe la surface Σ par une suite de plans perpendiculaires à l'axe Z, on aura une suite d'ellipses semblables et semblablement placées δ, δ', δ'', etc., dont les centres seront sur l'axe Z; on peut dès lors considérer la surface Σ comme engendrée par la droite K se mouvant en s'appuyant sur trois de ces ellipses; or, comme nous avons vu ci-dessus que la droite K était projetée orthogonalement sur le plan

R (qui donne δ pour section) suivant une droite θ tangente à cette courbe δ au point l, on voit que tous les points de la droite K autres que le point l décriront des ellipses plus grandes que δ.

C'est ce qui a fait donner à la courbe δ, le nom d'ellipse *de gorge* de l'hyperboloïde à une nappe.

Construction des trois axes de l'hyperboloïde à une nappe et non de révolution.

584. Menons par l'axe Z un plan P, ce plan coupera l'hyperboloïde à une nappe Σ suivant une courbe α composée de deux branches infinies et le cône asymptote Δ suivant deux génératrices droites G et G'.

Démontrons que la courbe α est une hyperbole.

Par un point x de la courbe α nous pourrons mener une suite de plan X, X', X'', etc., coupant respectivement le cône Δ et la surface Σ suivant des ellipses β, β', β'', etc., et β_1, β_1', β_1'', etc., les courbes β et β_1, β' et β_1', etc., seront concentriques et semblables et semblablement placées ; le plan P coupera les plans X, X', X'', etc., suivant des droites L, L', L'', etc., et ces droites couperont les courbes β, β', etc., et β_1, β_1', etc., chacune en deux points, ainsi :

La droite	L	coupera	β	aux points	a et b et β_1	aux points	x et b_1
—	L'	—	β'	—	a' et b' et β_1'	—	x et b_1'
—	L''	—	β''	—	a'' et b'' et β_1''	—	x et b_1''
—	etc.						

Les points a et b, a' et b', a'' et b'', etc., seront situés respectivement sur les droites G et G'; rappelons-nous qu'il a été démontré (n° 326, 11°) que si l'on avait deux droites G et G' situées dans un plan P, et si l'on prenait sur ce plan P un point x, et si par ce point x on menait une suite de droites L, L', L'', etc., coupant respectivement les droites G et G' aux points a et b, a' et b', a'' et b'', etc. ; puis si l'on portait sur L, $\overline{bb_1}=\overline{ax}$; sur L', $\overline{b'b_1'}=\overline{a'x}$; etc., les points b_1, b_1', b_1'', etc., déterminaient une hyperbole passant par le point x et ayant les droites G et G' pour asymptotes.

Or, les courbes β et β_1, β' et β_1', etc., étant des sections coniques concentriques et semblables, il s'ensuit que les parties interceptées par elles sur les droites L, L', L'', etc., sont égales, on a donc : $\overline{bb_1}=\overline{ax}$, $\overline{bb_1'}=\overline{a'x}$, etc., donc, etc.

Cela posé :

Démontrons que ayant mené par le centre o de la surface hyperboloïde Σ, ou le sommet o du cône asymptote Δ, un plan P perpendiculaire à l'axe Z, lequel plan coupe la surface Σ suivant une ellipse δ (qui est l'ellipse de *gorge*), si l'on conçoit un cylindre B ayant pour section droite cette ellipse δ et ayant dès lors ses généra-

trices droites parallèles à l'axe Z, démontrons, dis-je, que ce cylindre B coupera l'une et l'autre des nappes du cône Δ, savoir : la première nappe suivant une ellipse δ' identique à δ, et la seconde nappe suivant une ellipse δ'' aussi identique à δ.

Et en effet : deux ellipses semblables et semblablement placées sont identiques si leurs diamètres parallèles sont égaux.

Or, remarquant que les deux courbes planes δ et δ' ont chacune leur centre sur l'axe Z, si nous menons par l'axe Z un plan Y, lequel coupera δ en un point d et δ' en un point d', la droite dd' sera parallèle à l'axe Z, puisque dd' sera une génératrice droite du cylindre B ; on aura donc en désignant par o et o' les centres des courbes δ et δ', $\overline{od} = \overline{o'd'}$; donc, etc.

Cela posé : le plan Y passant par l'axe Z coupera la surface hyperboloïde Σ suivant une hyperbole α et le cône asymptote Δ suivant deux génératrices droites G et G′ asymptotes de la courbe α.

Le point d sera le sommet de l'hyperbole α et $\overline{dd'}$ sera égal au demi-axe non transverse de cette hyperbole α et son axe transverse sera précisément $\overline{oo'} = \overline{dd'}$.

Dès lors, il est évident que les divers plans Y, Y′, Y″, etc., passant par l'axe Z couperont la surface hyperboloïde Σ, suivant des hyperboles α, α', α'', etc., ayant même axe non transverse $\overline{oo'}$ et dont les demi-axes transverses od, etc., seront les divers demi-diamètres de l'ellipse de gorge δ.

On peut donc concevoir la surface hyperboloïde à une nappe Σ comme engendrée par une hyperbole α tournant autour de son axe non transverse, son sommet parcourant une ellipse δ, et cette courbe α variant de forme à chaque instant de son mouvement, de manière à ce que son axe transverse varie comme les diamètres de l'ellipse δ, son axe non transverse restant constant.

Cela posé :

Le cylindre B coupera évidemment le cône Δ suivant deux ellipses δ' et δ'' identiques et parallèles à δ, les plans Q′ de la courbe δ' et Q″ de la courbe δ'' couperont l'axe Z, le premier au point o' et le second au point o'', et l'on aura : $\overline{oo'} = \overline{oo''}$.

On donne le nom d'*axes* de l'hyperboloïde à une nappe Σ, aux deux axes de l'ellipse de gorge δ (qui sont les axes transverses de la surface Σ), et à $o'o''$ (qui est l'axe non transverse de la surface Σ).

Et si l'on désigne par X et Y la direction des axes de l'ellipse de *gorge* δ, les plans (X, Y), (Y, Z), (X, Z) seront les plans diamétraux conjugués et principaux de l'hyperboloïde Σ et de son cône asymptote Δ.

Des diverses variétés des hyperboloïdes à une nappe et de révolution.

585. L'ellipse de *gorge* δ peut être un cercle, alors la surface Σ et son cône asymptote Δ sont des surfaces de révolution ayant l'axe Z pour axe commun de rotation.

1° L'hyperboloïde à une nappe et de révolution est dit *aplati*, lorsque le demi-angle au sommet du cône asymptote est plus grand qu'un angle demi-droit;

2° L'hyperboloïde à une nappe et de révolution est dit *allongé*, lorsque le demi-angle au sommet du cône asymptote est plus petit qu'un angle demi-droit;

3° L'hyperboloïde à une nappe et de révolution est dit *équilatéral*, lorsque le demi-angle au sommet du cône asymptote est égal à un angle demi-droit.

Toutes les propriétés que nous avons reconnues exister pour l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution, subsistent pour l'hyperboloïde à une nappe et de révolution; on les démontrera facilement par les mêmes *considérations géométriques.*

Seulement, on doit remarquer que certaines propriétés n'existeront qu'avec des modifications qui dépendront évidemment de la forme de la surface, et dès lors parce qu'elle n'a qu'une nappe au lieu de deux, et qu'elle enveloppe son cône asymptote au lieu d'en être enveloppée; ainsi :

I. Si un point z pris dans l'espace est regardé comme le sommet d'un cône A tangent à l'hyperboloïde Σ, surface à une nappe et de révolution, la courbe de contact δ sera toujours plane, et dès lors cette courbe sera une *section conique;* mais :

1° Si le point z est extérieur à la surface Σ la courbe δ sera une *hyperbole* tournée dans le même sens que l'hyperbole méridienne de la surface Σ;

2° Si le point z est intérieur à la surface Σ, mais situé entre cette surface Σ et son cône asymptote Δ, la courbe δ sera une *hyperbole* tournée en sens inverse de l'hyperbole méridienne de la surface Σ;

3° Si le point z est sur la surface conique et asymptote Δ, la courbe δ sera une *parabole;*

4° Si le point z est dans l'intérieur du cône asymptote Δ, la courbe δ sera une *ellipse.*

II. Si l'on mène le plan T tangent en un point x d'un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ, ce plan T coupe cette surface Σ suivant deux génératrices droites K et L de *systèmes différents.*

Si entre le centre o de la surface Σ et le plan T, on mène un plan T', parallèle à T, il coupe la surface Σ suivant une hyperbole α', dont les asymptotes K' et L' sont parallèles à K et L, et les branches de la courbe α' sont tournées dans le même sens que l'hyperbole méridienne.

Si au delà du plan T par rapport au centre o de la surface Σ, on mène un plan T'' parallèle au plan T, ce plan T'' coupera la surface Σ suivant une hyperbole α'' dont les asymptotes K'' et L'' seront parallèles à K et L, mais les branches de cette courbe α'' seront tournées en sens opposé par rapport à l'hyperbole méridienne de la surface Σ.

Il s'ensuit donc, que les sections parallèles de l'hyperboloïde à une nappe ne sont pas toujours des courbes semblables et semblablement placées; cela n'a lieu que pour les sections *elliptiques*, mais pour les sections *hyperboliques*, la chose n'a lieu que pour des plans parallèles situés d'un même côté par rapport au plan tangent qui leur est parallèle, et pour les sections *paraboliques*, cela n'a lieu que pour des plans coupant une seule des deux nappes du cône asymptote Δ.

586. Dès lors, par deux sections coniques d'une surface hyperboloïde à une nappe, on ne pourra pas toujours faire passer un *cône;* le problème ne sera possible que dans les cas suivants :

On pourra faire passer *deux* cônes :

1° Par deux *ellipses* qui se coupent ou ne se coupent pas;

2° Par une *ellipse* et une *parabole* qui se coupent ou ne se coupent pas;

3° Par une *ellipse* et une *hyperbole*, si l'ellipse ne coupe pas l'hyperbole ou coupe une de ses branches en deux points;

4° Par une *parabole* ou une *hyperbole*, si la parabole ne coupe pas l'hyperbole ou coupe une de ses branches en deux points;

5° Par deux *hyperboles* tournées dans le même sens, et dont deux branches se coupent en deux points ou ne se coupent pas.

On pourra faire passer un *seul* cône :

1° Par deux *ellipses* tangentes l'une à l'autre;

2° Par deux *paraboles* tangentes l'une à l'autre;

3° Par une *ellipse* et une *parabole* tangentes par un point;

4° Par une *ellipse* et une *hyperbole* tangentes par un point;

5° Par une *parabole* et une *hyperbole* tangentes en un point;

6° Par deux *hyperboles* tournées dans le même sens et tangentes par un point;

7° Par deux *paraboles* tournées dans le même sens ou en sens opposé; dans le premier cas, les deux paraboles seront situées sur la même nappe du cône; dans le deuxième cas, elles seront situées, l'une sur la nappe inférieure et l'autre sur la nappe supérieure du cône.

Mais, on ne pourra pas faire passer un cône par deux hyperboles tournées en sens opposés.

Des polaires réciproques de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution.

587. Si l'on a une droite D et un hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ, si l'on mène par la droite D deux plans P et P′ coupant la surface Σ suivant deux sections coniques C et C′, on pourra toujours envelopper ces deux courbes par deux cônes dont les sommets x et x' détermineront une droite D_1. Les droites D et D_1 sont dites *polaires réciproques*, parce qu'elles jouissent de cette propriété, savoir : si par la droite D on mène une série de plans P, P′, P″, P‴,.... coupant l'hyperboloïde à une nappe Σ suivant les sections coniques C, C′, C″, C‴,.... les sommets des cônes tangents à la surface Σ suivant chacune de ces courbes et les sommets des cônes enveloppant deux à deux ces courbes, sont tous distribués sur la droite D_1 et *réciproquement*, si par la droite D_1 on fait passer une série de plans P_1, P_1', P_1'', P_1''',.... coupant l'hyperboloïde Σ suivant les courbes C_1, C_1', C_1'', C_1''',.... les sommets des cônes tangents à la surface Σ suivant chacune de ces courbes, et les sommets des cônes enveloppant deux à deux ces courbes sont tous distribués sur la droite D.

Et en effet, nous avons démontré, chapitre sixième, que si l'on avait trois sections coniques C, C′, C″, dont les plans se coupaient suivant une même droite D, et si les courbes C et C′, C et C″, étaient sur des cônes Δ' et Δ'', les sommets x' et x'' de ces cônes déterminaient une droite D_1 sur laquelle se trouvait le sommet x du cône enveloppant les courbes C′ et C″.

Si donc on a quatre courbes C, C′, C″, C‴, situées sur l'hyperboloïde Σ, et dont les plans passent par la même droite D, comme ces courbes sont nécessairement enveloppées deux à deux par un cône, il s'ensuit que l'on aura :

Le cône Δ	enveloppant	C et C′	et ayant pour	sommet un point	x
Δ'	—	C et C″	—	—	x'
Δ''	—	C et C‴	—	—	x''
Δ_1	—	C′ et C″	—	—	x_1
Δ_1'	—	C′ et C″	—	—	x_1'
Δ_1''	—	C″ et C‴	—	—	x_1''

Et si l'on prend un point y sur la droite D et qu'on le regarde comme le sommet d'un cône B tangent à la surface Σ, le plan Q de la courbe de contact coupera les quatre courbes, C, C′, C″, C‴, savoir :

La courbe	C	en les points	a et b
—	C′	—	a' et b'
—	C″	—	a'' et b''
—	C‴	—	a''' et b'''

Et ses points pourront être unis deux à deux par des droites qui seront toutes situées dans le plan Q.

Or il est évident :

que le plan (y, aa') sera tangent au cône Δ suivant la génératrice aa'
— (y, aa'') — Δ' — aa''
— etc. — etc. — etc.

Ainsi tous les sommets x, x', x'',... des cônes Δ, Δ', Δ'',... seront sur le plan Q; en prenant sur la droite D un autre point y', on trouverait que tous les sommets x, x', x'',... sont sur le plan Q′, plan de la courbe de contact d'un cône B′ tangent à la surface Σ et ayant le point y' pour sommet, et dès lors tous les sommets x, x', x'',... sont sur la droite D_1 intersection des plans Q et Q′.

Le théorème relatif aux *polaires réciproques* étant démontré en général, voyons quelle modification il subit suivant la position particulière que la droite D occupe dans l'espace, par rapport à la surface hyperboloïde à une nappe et de révolution Σ.

1° Si la droite D perce l'hyperboloïde Σ en deux points p et p', on aura deux génératrices droites de *systèmes différents* G et K (appartenant à la surface Σ) qui passeront par le point p, et nous aurons de même deux génératrices droites G′ et K′ passant par le point p'.

Les droites G et K′ se couperont en un point p_1.

Les droites G′ et K se couperont en un point p_1'.

Et la droite D_1, qui unira les points p_1 et p_1', sera la *polaire réciproque* de D.

2° Si la droite D ne perce l'hyperboloïde Σ qu'en un point m, on aura deux génératrices G et K se croisant en ce point.

Puisque la droite G ne perce l'hyperboloïde qu'en un point, elle est parallèle à une génératrice droite du cône asymptote, elle est donc parallèle à un plan R, asymptote de l'hyperboloïde Σ; ce plan R coupera la surface Σ suivant deux génératrices droites G′ et K′ parallèles entre elles et à la droite D.

Les droites G′ et K se couperont en un point n;

Les droites G et K′ se couperont en un point n';

Et la droite $\overline{nn'}$ ou D_1 sera la *polaire réciproque* de D.

Or il est évident que la droite D_1 sera située dans le plan asymptote R.

3° Si la droite D ne perce pas la surface Σ, sa *polaire réciproque* D_1 ne rencontrera pas la surface Σ.

4° Si la droite D touche la surface Σ en un point m, sa *polaire réciproque* D_1 touche la surface Σ au même point m.

Dans ce cas les deux *polaires réciproques* D et D_1 sont dans un même plan T, tangent au point m à l'hyperboloïde à une nappe.

Monge avait donné à ces deux droites le nom de *tangentes conjuguées.*

588. On pourra toujours, en employant la *transformation cylindrique*, transformer un hyberboloïde à une nappe et de révolution en un hyperboloïde à une nappe et à trois axes inégaux, et cela de la même manière que nous avons transformé l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution en un hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux (et à ce sujet il suffit de comparer entre elles les *fig.* 296 et 298; la première est relative à la transformation de l'hyperboloïde à deux nappes et de révolution en un hyperboloïde à deux nappes et à trois axes inégaux, et la seconde est relative à la transformation de l'hyperboloïde à une nappe et de révolution en un hyperboloïde à une nappe et à trois axes inégaux).

Toutes les propriétés qui existent pour l'hyperboloïde de révolution et à une nappe, existent donc pour l'hyperboloïde à une nappe et à trois axes inégaux.

Pour déterminer les trois *axes* de l'hyperboloïde à une nappe et non de révolution, on pourra employer une construction analogue à celle que nous avons employée lorsqu'il s'est agi de l'hyperboloïde à deux nappes et non de révolution; et à ce sujet on peut comparer entre elles les *fig.* 297 et 299.

Des sections circulaires de l'hyperboloïde à une nappe et à trois axes inégaux.

589. Le cône asymptote Δ et l'hyperboloïde Σ étant coupés par un plan suivant des sections coniques, concentriques et semblables et semblablement placées, et quelle que soit la direction du plan sécant lorsque les sections sont des *ellipses* (le théorème n'étant en défaut que dans le cas où les sections sont des *hyperboles*), il s'ensuit que les plans des *sections circulaires* du cône oblique Δ seront en même temps les plans des *sections circulaires* de l'hyperboloïde Σ à une nappe et à trois axes inégaux.

Des divers modes de génération par des sections coniques dont est susceptible l'hyperboloïde à une nappe et à trois axes inégaux.

590. Ce que nous avons dit touchant les *polaires réciproques* nous montre que l'on peut engendrer l'hyperboloïde à une nappe comme l'hyperboloïde à deux nappes, et ainsi :

1° Au moyen d'ellipses *génératrices* et d'une hyperbole *directrice.*

2° Au moyen d'hyperboles *génératrices* et d'une ellipse *directrice.*

Dans le *premier cas*, chaque ellipse *génératrice* aura deux points communs avec

l'hyperbole *directrice*, mais l'un de ces points étant sur l'une des branches, et l'autre de ces points étant sur l'autre branche de l'hyperbole.

Dans le *deuxième cas*, chaque hyperbole *génératrice* aura deux points communs avec l'ellipse *directrice*, mais l'un de ces points appartiendra à la première branche, et l'autre de ces points appartiendra à la seconde branche de l'hyperbole.

Et en se rappelant ce qui a été dit touchant l'hyperboloïde à deux nappes, on voit que les modes de *génération* ou de *construction* pour l'un et l'autre des deux hyperboloïdes (à une nappe et à deux nappes) ne diffèrent entre eux que parce que ces deux points sont, pour l'une des surfaces, situés ensemble sur une même branche de l'hyperbole, et que, pour l'autre des surfaces, ces deux points sont séparés et situés l'un sur une branche, et l'autre sur l'autre branche de l'hyperbole.

Nomenclature des surfaces qui peuvent être coupées par un plan et quelle que soit sa direction suivant une section conique.

591. Nous venons d'étudier quelques-unes des propriétés géométriques dont jouissent les cinq surfaces connues sous le nom d'ellipsoïde, de paraboloïde elliptique, de paraboloïde hyperbolique, d'hyperboloïde à deux nappes et d'hyperboloïde à une nappe. On a démontré par l'*analyse* qu'il n'existait que ces cinq surfaces (en mettant de côté le cône et les trois cylindres à base section conique) qui jouissaient de la propriété d'être coupées par un plan, et quelle que soit sa direction suivant une section conique, voyons si la *méthode des projections* ne pourrait pas nous conduire à la démonstration du même théorème, et ainsi si, par le *raisonnement géométrique* seul, et en nous appuyant sur ce que nous avons dit touchant les cinq surfaces étudiées ci-dessus, nous ne pourrons pas démontrer *rigoureusement* qu'en effet il n'existe que ces cinq surfaces (en mettant de côté le cône et les trois cylindres à base section conique, que nous avons étudiés dans le chapitre VIII) qui puissent être coupées par un plan, et quelle que soit sa direction suivant une section conique.

Pour qu'une surface Σ puisse être coupée par un plan P quelconque suivant une section conique C, il faut que cette surface n'ait qu'un *seul* centre o, et en effet :

Si la surface Σ avait plusieurs centres o, o', o'',... on pourrait unir deux à deux ces centres par une droite; je désigne l'une de ces droites (o, o') par exemple, par D. Par la droite D faisons passer une série de plans Q, Q′, Q″,... chacun de ces plans coupera la surface Σ suivant une courbe, et l'on aura ainsi les sections C, C′, C″,... et chacune de ces courbes aura nécessairement deux centres qui seront les points o et o'.

La surface Σ ne serait donc pas coupée par un plan quelconque suivant une section conique, la surface Σ ne peut donc avoir qu'un *seul centre.*

Cela posé :

La surface Σ, ayant un seul centre *o*, ne pourra affecter que *trois formes* distinctes, et en effet : si par le centre *o* nous menons un plan quelconque Q, ce plan coupera la surface Σ suivant une ellipse E ou suivant une hyperbole H, puisque parmi les sections coniques, l'ellipse et l'hyperbole sont les seules courbes ayant un centre.

Le plan Q pourra prendre autour du point *o* toutes les positions imaginables, et il ne pourra *évidemment* arriver que les trois choses suivantes :

1° Quelle que soit la position du plan Q, la section sera toujours une *ellipse ;*

2° Quelle que soit la position du plan Q, la section sera toujours une *hyperbole.*

3° Pour certaines positions du plan Q, la section sera une *ellipse*, et pour d'autres positions du plan Q, la section sera une *hyperbole.*

On voit donc que, dans le *premier cas*, on aura des surfaces ayant la forme d'un *ellipsoïde.*

Dans le *deuxième cas*, on aura des surfaces ayant la forme d'un *hyperboloïde à deux nappes.*

Et dans le *troisième cas*, on aura des surfaces ayant la forme d'un *hyperboloïde à une nappe.*

Examinons le *premier cas.*

Comme la surface Σ doit être coupée par tout plan P passant par le centre *o* suivant une section conique, cette surface ne pourra être coupée que suivant une *ellipse*, puisque la forme qu'elle affecte est celle d'un *ellipsoïde*, et ainsi cette surface devra pouvoir être engendrée par une ellipse *génératrice* se mouvant sur une ellipse *directrice ;* c'est précisément le mode de génération qui nous a donné la surface connue sous le nom d'ellipsoïde à trois axes inégaux.

Examinons le *deuxième cas.*

Nous pourrons toujours couper l'une des deux nappes de la surface Σ par un plan, de manière à obtenir une *ellipse ;* cette surface pourra donc être engendrée par une hyperbole *génératrice* et une ellipse *directrice*, une seule branche de l'hyperbole génératrice s'appuyant sur l'ellipse directrice ; et c'est précisément le mode de génération qui nous a donné la surface connue sous le nom d'hyperboloïde à deux nappes.

Examinons le *troisième cas.*

Nous pourrons toujours couper la surface par un plan suivant une *ellipse*, nous aurons donc une hyperbole *génératrice* et une ellipse *directrice*, mais chaque branche de l'hyperbole génératrice s'appuiera sur l'ellipse directrice, et c'est ce

mode de génération qui nous a donné la surface connue sous le nom d'hyperboloïde à une nappe.

Or, dans le cas d'une surface ayant un seul centre, nous venons de combiner de toutes les manières possibles les deux sections coniques ayant un centre, et nous ne trouvons que trois formes de surfaces possibles et ayant des modes de génération identiques à ceux reconnus précédemment exister pour l'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes; n'en doit-on pas conclure que ces trois surfaces sont les seules surfaces ayant un seul centre, qui puissent être coupées par un plan et quelle que soit sa direction suivant une section conique?

Une surface Σ peut avoir un seul centre, mais ce centre peut être situé à l'infini; dans ce cas, pour que la surface Σ soit coupée par tout plan suivant une section conique, il faut évidemment qu'une série de plans $P, P', P'', \ldots\ldots$ passant par une même droite D, coupe cette surface Σ suivant des paraboles $\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots$ ayant respectivement leur axe infini parallèle à la droite D.

Mais les paraboles $\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots$ pourront affecter les unes par rapport aux autres des positions différentes, et ainsi : 1° certaines courbes $\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots$ seront tournées dans un sens, et certaines autres $\delta_1, \delta_1', \delta_1'', \ldots\ldots$ seront tournées en sens opposé; ou 2° toutes les courbes $\delta, \delta', \delta'', \ldots\ldots$ et $\delta_1, \delta_1', \delta_1'', \ldots\ldots$ seront tournées du même côté.

Dès lors il est évident que dans le *premier cas* la surface Σ est composée de deux parties, dont l'une aura son centre situé à l'infini *à droite* sur la droite D, et dont l'autre aura son centre situé à l'infini, mais *à gauche*, sur la même droite D.

Et, dans ce cas, un plan dirigé de manière à couper la droite D devant donner pour section dans la surface Σ une section conique, on ne pourra obtenir qu'une *hyperbole*.

On doit donc avoir, dans ce *premier cas*, une surface Σ ayant la forme d'un *paraboloïde hyperbolique*, et comme cette surface Σ aura pour mode de génération une parabole *génératrice* s'appuyant sur une hyperbole *directrice*, on doit en conclure que cette surface Σ ne sera autre que le paraboloïde hyperbolique.

Il est de même évident, dans le *deuxième cas*, qu'en vertu de ce que la surface Σ n'a qu'un centre situé à l'infini sur la droite D, tout plan oblique à la droite D coupera cette surface Σ suivant une *ellipse*, et que dès lors son mode de génération sera donné par une parabole *génératrice* s'appuyant sur une ellipse *directrice*, ce qui nous donne le paraboloïde elliptique.

Ainsi il se trouve démontré qu'il n'existe que *neuf* surfaces du second ordre ou du deuxième degré, savoir : le cône à base section conique, les trois cylindres (*parabolique*, *elliptique* et *hyperbolique*), l'ellipsoïde, les deux para-

boloïdes (*elliptique* et *hyperbolique*) et les deux hyperboloïdes (à *une* nappe et à *deux* nappes).

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DONT JOUISSENT DEUX SURFACES DU SECOND ORDRE, LORSQUE CES SURFACES SONT COMBINÉES DEUX A DEUX.

592. *Deux surfaces du second ordre se coupant suivant une courbe composée de deux branches, si l'une des branches (ou courbe* d'entrée) *est plane, l'autre branche (ou courbe* de sortie) *est aussi plane.*

Si deux surfaces du second ordre Σ et Σ' se coupant (d'abord) suivant une section conique C, se recoupent (ensuite) suivant une seconde courbe C', cette seconde courbe C' n'est autre qu'une section conique.

Et en effet :

Prenons trois points arbitraires m, m', m'', sur la courbe C'; ces trois points détermineront un plan P, lequel coupera : 1° la surface Σ suivant une section conique B, et 2° la surface Σ' suivant une section conique B'; ainsi, les deux sections coniques B et B' sont dans un même plan P et ont en commun trois points m, m', m''.

Cela posé :

Nous pourrons toujours envelopper, 1° les deux sections coniques C et B par un cône Δ, et les deux sections coniques C et B' par un cône Δ'.

Les deux cônes Δ et Δ' auront donc en commun leur *base* qui est la section conique C et les trois points m, m', m'', et comme ils doivent se recouper (en vertu de ce qu'ils ont déjà une section conique C commune) suivant une seconde section conique X, cette section conique X passera par les trois points m, m', m'', et sera dès lors située dans le plan P.

Or les courbes X et B étant des sections faites dans le cône Δ par un même plan P, se confondent en une seule et même courbe.

Or les courbes X et B' étant aussi des sections faites dans le cône Δ' par le même plan P, se confondent en une seule et même courbe.

Ainsi les trois sections coniques X, B et B' ne sont qu'une seule et même courbe.

Ainsi par la section conique C et les trois points m, m' et m'', on peut toujours faire passer un cône coupant l'une et l'autre surface Σ et Σ', suivant une même section conique X ayant pour plan le plan (m, m', m'').

Les deux surfaces Σ et Σ' ayant en commun une courbe plane C et les trois points m, m', m'' (situés hors du plan de cette courbe C), se coupent donc suivant une seconde section conique X passant par les trois points m, m', m''; ainsi la

courbe C′ (de sortie) n'est autre et ne peut être autre que la section conique X. Donc, etc., etc. (*).

593. *Deux surfaces du second ordre étant enveloppées par un même cône, ne peuvent s'entrecouper que suivant une ou deux sections coniques.*

Si deux surfaces du second ordre Σ et Σ' sont tellement placées dans l'espace, l'une par rapport à l'autre, qu'elles soient enveloppées par un même cône Δ, elles ne pourront s'entrecouper que suivant des sections coniques. Mais la *réciproque* n'a pas lieu. Ainsi deux surfaces du second ordre Σ et Σ' peuvent s'entrecouper suivant une ou deux sections coniques, sans pour cela pouvoir être enveloppées l'une et l'autre par le même cône.

Désignons par d le sommet du cône Δ enveloppant, et par C la section conique qui est la coube de contact de ce cône Δ et de la surface Σ, et par C′ la section conique qui est aussi la courbe de contact de ce même cône Δ et de la seconde surface Σ'. Les plans des deux courbes C et C′ se couperont suivant une droite I; je dis que les plans des sections coniques, suivant lesquelles s'entrecouperont les deux surfaces Σ et Σ', passeront par la droite I.

Pour démontrer ce théorème important (ou cette propriété remarquable) concernant deux surfaces du second ordre, nous sommes obligé de considérer d'abord les propriétés de *relation de position* dont jouissent deux sections coniques situées sur un même plan et ayant des tangentes communes.

Des propriétés géométriques et des relations de position dont jouissent deux sections coniques situées sur un même plan, et ayant une, ou deux, ou trois, ou quatre tangentes communes (**).

594. Concevons deux sections coniques C et C′, situées sur un plan, et telles qu'on puisse leur mener, 1° deux tangentes communes *extérieures* θ et θ_1 se coupant en un point p, et 2° deux tangentes communes *intérieures* θ' et θ_1' se coupant en un point p'.

(*) *Voyez*, dans le *Complément de géométrie descriptive*, le mémoire qui a pour titre : *Propriétés des courbes du second degré considérées dans l'espace*, mémoire qui a été publié pour la première fois dans la *Correspondance mathématique et physique des Pays-Bas* (Vol. III, n° 3).

(**) Je suppose, pour tout ce qui va suivre, que l'on a présent à l'esprit tout ce qui est relatif, 1° à l'*épure* de la section du cône par un plan; et 2° à l'*épure* de l'intersection de deux cônes ou de l'intersection d'un cône et d'un cylindre, et qu'ainsi on se rappelle le mode de construction employé pour déterminer un *point* de la courbe de section ou d'intersection et pour déterminer la *tangente* en ce point.

Désignons les points de contact des courbes et des tangentes de la manière suivante :

θ touchera C au point	e	et C' au point	e'	
θ_1	—	e_1	—	e_1'
θ'	—	i	—	i'
θ_1'	—	i_1	—	i_1'

Cela posé :

Je dis que les propriétés suivantes existent :

1° Les deux cordes $\overline{ee_1}$ et $\overline{e'e_1'}$ étant prolongées, se couperont en un point q, et les deux cordes $\overline{ii_1}$ et $\overline{i'i_1'}$ étant prolongées, se couperont en le même point q.

2° Si par le point q on mène deux tangentes β et β_1 à la courbe C, et β' et β_1' à la courbe C', les quatre points de contact seront sur une droite Q passant par les points p et p'.

3° Si par le point p on mène une suite de droites Y, Y', Y'',..... coupant chacune des deux sections coniques C et C' en deux points, les quatre tangentes construites pour ces points aux courbes C et C', se couperont deux à deux en six points, dont deux seront, l'un sur la corde de contact $\overline{ee_1}$ et l'autre sur la corde de contact $\overline{e'e'_1}$, et dont les quatre autres seront distribués deux à deux sur deux droites E et I; l'une de ces droites E sera *extérieure* aux deux courbes C et C', l'autre droite I sera *intérieure* à ces courbes C et C' et ces deux droites I et E passeront par le point q.

4° Si par le point p' on mène une suite de droites X, X', X''..... coupant chacune les deux sections coniques C et C' en deux points, les quatre tangentes construites pour ces points aux courbes C et C' se couperont deux à deux en six points, dont deux seront, l'un sur la corde de contact $\overline{ii_1}$ et l'autre sur la corde de contact $\overline{i'i'_1}$, et dont les quatre autres seront distribués deux à deux sur les deux mêmes droites E et I (dont il a été parlé ci-dessus).

Nous allons établir l'existence de ces diverses propriétés, en ne nous servant que de la méthode des *projections orthogonales*.

Premier cas. *Les sections coniques* C *et* C' *étant extérieures l'une à l'autre et n'ayant aucun point commun.*

595. Soient données sur un plan, que nous prendrons pour plan horizontal de projection, deux sections coniques C et C' (*fig.* 300), telles qu'elles n'aient aucun point en commun, et qu'étant extérieures l'une à l'autre, on puisse leur mener deux tangentes communes et extérieures θ et θ_1 se coupant en un point p, et deux tangentes communes et intérieures θ' et θ_1' se coupant en un point p'.

Ces tangentes toucheront les courbes C et C′ chacune en un point, et ainsi on aura :

θ	touchant	la courbe	C	au point	e
	—	—	C′	—	e'
θ_1	touchant	la courbe	C	au point	e_1
	—	—	C′	—	e_1'
θ'	touchant	la courbe	C	au point	i
	—	—	C′	—	i'
θ_1'	touchant	la courbe	C	au point	i_1
	—	—	C′	—	i_1'

Désignons respectivement par P, P_1, P′, P_1', les cordes de contact $\overline{ee_1}$, $\overline{ii_1}$, $\overline{e'e_1'}$, $\overline{i'i_1'}$ ces cordes étant supposées indéfiniment prolongées.

On voit de suite que pour la courbe C : 1° le point p est *pôle* et la droite P *polaire*, 2° le point p' est *pôle* et la droite P_1 *polaire;* que pour la courbe C′ : 1° le point p est *pôle* et la droite P′ *polaire*, 2° le point p' est *pôle* et la droite P_1' *polaire*.

Ainsi les deux courbes C et C′ sont liées l'une à l'autre par deux *pôles* p et p', qui sont communs aux deux courbes, et chacune de ces deux courbes a une polaire distincte, chacune de ces polaires correspondant à l'un des deux pôles communs p et p'.

Cela posé :

Imaginons par le point p une verticale Z, et prenons sur cette droite Z un point arbitraire s, et considérons ce point s comme le sommet d'un cône Δ ayant pour *base* ou trace horizontale la section conique C.

Imaginons ensuite un cylindre vertical (C′) ayant ses génératrices droites parallèles à Z, et ayant pour base ou trace horizontale (et en même temps pour section droite) la section conique C′.

Les deux surfaces Δ et (C′) se couperont suivant deux courbes planes (*sections coniques*) C_1 et C_2 qui se projetteront horizontalement et orthogonalement suivant la courbe C′, puisque évidemment ces deux surfaces ont deux plans tangents communs (lesquels sont verticaux, puisqu'ils passent tous deux par la droite Z) et dont les traces horizontales ne sont autres que les tangentes extérieures θ et θ_1; et de plus ces deux plans, que je désignerai par Θ et Θ_1, touchent 1° le cône Δ, savoir : le premier suivant la génératrice droite se et le second suivant la génératrice droite se_1; ils toucheront 2° le cylindre (C′) suivant deux génératrices droites K et K_1 qui sont verticales et qui percent le plan horizontal de projection aux points e' et e_1'.

Cela posé :

Les droites K et se se coupent en un point e'', et les droites K_1 et se_1 se coupent en un point e_1''; et ces deux points ont respectivement pour projections horizontales les points e' et e'_1.

Ces points e'' et e_1'' sont évidemment ceux en lesquels se coupent les deux courbes C_1 et C_2, et la droite $e''e_1''$ (qui prolongée sera désignée par S) sera l'intersection des deux plans (C_1) et (C_2) des courbes C_1 et C_2; et il est évident que le plan (S, P), qui contient les génératrices droites se et se_1 du cône Δ et le plan (P') qui sera vertical et qui contient les génératrices droites K et K_1 du cylindre (C'), se coupent suivant la droite S.

Dès lors il est évident que les trois droites S, P et P' viennent se couper en un même point q, qui sera la trace horizontale de la droite S.

Dès lors encore les plans (C_1) et (C_2) couperont le plan horizontal de projection suivant des droites I et E, qui devront passer par le point q.

Cela posé :

Si du point q on mène deux tangentes θ et θ_1 à la courbe C, leurs points de contact b et b_1 et le point p seront en ligne droite; et en effet : les droites sb et sb_1 seront des génératrices droites du cône Δ, les plans B et B_1 tangents à ce cône Δ suivant ses génératrices sb et sb_1, auront respectivement pour traces horizontales les tangentes θ et θ_1; ces deux plans tangents B et B_1 se couperont suivant la droite sq, et devront contenir les tangentes en chacun des quatre points en lesquels les courbes C_1 et C_2 coupent les génératrices droites sb et sb_1, et ces tangentes se projetteront horizontalement suivant des tangentes θ' et θ_1' à la courbe C. Dès lors puisque ces tangentes aux courbes C_1 et C_2 se projettent deux à deux suivant une seule droite, il s'ensuit que leurs points de contact avec les courbes C_1 et C_2 sont deux à deux sur une verticale, et ainsi sur une génératrice droite du cylindre (C'). On aura donc deux génératrices droites, l'une K' projetant deux points (situés, l'un sur la courbe C_1 et l'autre sur la courbe C_2) en le point b' contact de la courbe C' avec sa tangente θ'; et l'autre K_1' projetant deux autres points (situés, l'un sur la courbe C_1 et l'autre sur la courbe C_2) en le point b_1' contact de la courbe C' avec sa tangente θ'_1. Et ainsi il se trouve démontré que les deux génératrices droites sb et sb_1 sont dans un même plan vertical passant par le sommet s du cône Δ et par les deux génératrices droites K' et K_1' du cylindre (C').

Nous pouvons donc affirmer que les trois points b, b_1 et p sont en ligne droite.

Cela posé :

Puisque les droites I et E passent par le point q, ainsi que les tangentes θ et θ_1, il s'ensuit que les tangentes θ' et θ_1' passeront aussi par ce même point q, puisqu'elles sont les projections horizontales des droites suivant lesquelles les plans tangents B et B_1 sont coupés par les plans (C_1) et (C_2). Ainsi les cinq points

b, b_1, b', b_1' (contact des tangentes β, β_1, β' et β_1', menées du point q aux deux courbes C et C′) et le point p sont sur une droite que j'ai déjà désignée ci-dessus par Q.

Et il est évident que le point q est un *pôle* commun aux deux courbes C et C′, et que la droite Q est *polaire* commune à ces deux mêmes sections coniques C et C′.

Cela posé :

Examinons comment les droites I et E sont *liées* aux courbes C et C′.

Menons par le point p une droite Y coupant la courbe C aux points m et n, et la courbe C′ aux points m' et n' ; construisons les tangentes en ces points et respectivement aux courbes C et C′, on aura les quatre tangentes, savoir : M au point m, N au point n, M′ au point m', N′ au point n', et ces droites se couperont deux à deux en six points x, x', y, y', l, l'.

Les points l et l' seront évidemment situés, le premier sur la droite P *polaire* de la courbe C pour le *pôle* p, et le second sur la droite P′ *polaire* de la courbe C′ pour le même *pôle* p.

Cela posé :

Je dis que les quatre autres points seront situés, savoir : deux, x et x' sur la droite E ; et deux, y et y' sur la droite I ; et en effet :

Les génératrices droites sm et sn du cône Δ seront situées dans un plan sécant vertical ayant la droite Y pour trace horizontale.

Ces droites sm et sn couperont les courbes C_1 et C_2, chacune en deux points, en sorte que l'on aura quatre points qui se projetteront horizontalement et deux à deux en les points m' et n' sur la courbe C′.

Les tangentes M′ et N′ à la courbe C′ en ces points m' et n' seront donc les projections horizontales des quatre tangentes menées en les quatre points des courbes C_1 et C_2 ; ces droites M′ et N′ seront donc les projections des intersections des plans (C_1) et (C_2) avec les plans (M) et (N) tangents au cône Δ suivant les génératrices sm et sn, ces plans (M) et (N) ayant respectivement pour trace horizontale les droites M et N ; dès lors il est évident que les points x et x', y et y' seront situés sur les droites E et I, traces horizontales des plans (C_1) et (C_2).

Ce que nous venons de dire en considérant le point p, nous pourrons le dire en considérant le point p'. Ainsi nous pourrons imaginer par le point p' une verticale Z′ et prendre sur Z′ un point s' arbitraire, et regarder ce point s' comme le sommet d'un cône Δ' ayant la courbe C pour base ou trace horizontale ; puis considérer la courbe C′ comme la section droite d'un cylindre vertical (C′) ; les deux surfaces Δ' et (C′) ayant deux plans tangents communs, se couperont suivant deux courbes planes C_1' et C_2', et nous retrouverons toutes les propriétés ci-dessus exposées ; nous aurions donc un point q' homologue du point q, une droite Q′ homo-

logue de la droite Q, des droites I′ et E′ respectivement homologues des droites I et E, et il faut démontrer que les points q et q' ne sont qu'un seul et même point, et que chaque groupe des droites Q et Q′, I et I′, E et E′, n'est aussi qu'une seule et même droite Q, I et E.

Pour démontrer cette proposition, nous ferons remarquer que nous savons, que lorsque deux sections coniques sont situées sur un cône, si ces sections coniques n'ont aucun point commun, on peut toujours les envelopper par un second cône. Ainsi en considérant la courbe C et la courbe C_1 que nous savons être situées sur le cône Δ qui a son sommet placé sur la droite Z passant par le point p, nous pourront faire rouler un plan tangentiellement à ces deux courbes C et C_1 mais intérieurement, et nous obtiendrons pour enveloppe de l'espace parcouru par ce plan le second cône enveloppant les deux courbes C et C_1; mais il est évident que, parmi toutes les positions que peut prendre dans l'espace le plan mobile, considéré en chacune de ses positions comme une *enveloppée*, il y en aura deux où il sera vertical, et où il aura dès lors pour trace horizontale les tangentes intérieures θ' et θ_1' aux deux courbes C et C′. Le sommet s_1' du second cône Δ_1' sera donc situé sur la verticale Z′ passant par le point p'.

Dès lors, en considérant le point p', ainsi que nous avons considéré le point p, nous voyons que les droites I et I′ se confondent en une seule et même droite.

Mais nous aurions pu combiner la courbe C avec la courbe C_2, et nous aurions trouvé un second cône Δ_2' ayant encore son sommet s_2' situé sur la droite Z′, et dès lors nous aurions établi que les droites E et E′ se confondent.

Il se trouve donc démontré que la considération du point p ou du point p' conduit toujours aux trois mêmes droites Q, I et E.

Cela posé, si nous désignons par R la droite qp, par R′ la droite qp', par r, r_1, r', r_1' les points d'intersection des droites P, P_1, P′, P_1' avec la droite Q, nous pourrons établir la nomenclature des divers *systèmes polaires*, qui *lient* l'une à l'autre deux sections coniques C et C′, qui, situées dans un même plan, ont deux tangentes communes intérieures et deux tangentes communes extérieures.

Cette nomenclature peut être établie ainsi qu'il suit :

1° Un système complet, composé d'un *pôle* q et de la *polaire* Q (système polaire commun unique).

2° Deux systèmes composés, l'un du *pôle* p et des *polaires* P et P′, et l'autre du *pôle* p' et des *polaires* P_1 et P_1' (*pôle* unique conjuguant deux *polaires* séparées).

3° Deux systèmes composés, l'un de la *polaire* R et des *pôles* r et r', et l'autre de la *polaire* R′ et des *pôles* r_1 et r_1' (*polaire* unique conjuguant deux *pôles* séparés).

Pour la courbe C (dans les deux systèmes polaires), les *polaires* P_1 et R′, P et R passent respectivement l'une par le *pôle* de l'autre.

Pour la courbe C′ (dans les deux systèmes polaires), les *polaires* P_1' et R′, P′ et R passent respectivement l'une par le *pôle* de l'autre.

DEUXIÈME CAS. *Les deux sections coniques* C *et* C′ *étant extérieures et ayant un point de contact.*

596. Les deux sections coniques C et C′ peuvent être extérieures l'une à l'autre et avoir un point de contact ; dans ce cas elles pourront avoir trois tangentes communes. Examinons quelles sont les *modifications* que subissent dans ce cas les *propriétés polaires* qui *lient* l'une à l'autre les deux sections coniques.

Il suffit de jeter les yeux sur la *fig.* 301 et de la comparer à la *fig.* 300 précédente, pour voir de suite que les droites tangentes θ', θ_1', 6_1, $6'$, ainsi que les *polaires* R′, P_1, P_1' de la *fig.* 300 se confondent sur la *fig.* 301 en la seule droite I, et que par conséquent les points b_1, b', r_1, r_1' se superposent sur le point p' qui, dans la *fig.* 301, devient le point de contact des deux sections coniques données C et C′.

TROISIÈME CAS. *Les deux courbes* C *et* C′ *se coupant en deux points.*

597. Les deux sections coniques C et C′ peuvent se couper en deux points et avoir deux tangentes communes extérieures.

Dans ce cas, les tangentes intérieures θ' et θ_1' n'existent plus, ainsi que les points r_1 et r_1' et les *polaires* P et P_1'.

Démontrons que, pour ce cas particulier (*fig.* 302), les droites I et R′ se confondent. Si l'on regarde la courbe C comme la base ou trace horizontale d'un cône Δ ayant son sommet s situé sur une verticale Z passant par le point p, et si l'on regarde la courbe C′ comme la base et section droite d'un cylindre vertical (C′), les deux surfaces Δ et (C′) se couperont suivant deux courbes planes C_1 et C_2, puisqu'elles ont deux plans tangents communs et verticaux, dont les traces horizontales ne sont autres que les tangentes communes et extérieures θ et θ_1. Or comme la courbe C′ coupe la courbe C aux deux points z et z', il s'ensuit que le plan de l'une des deux courbes C_1 et C_2 aura pour trace horizontale la corde $\overline{zz'}$ prolongée, ainsi la droite zz' n'est autre que I. Cette droite I coupe la droite Q en un point p' que je dis jouer ici le même rôle que le point p' de la *fig.* (301) précédente, c'est-à-dire que ce point p' est la projection horizontale des sommets de cônes qui, ayant la courbe C pour base, seraient coupés par le cylindre (C′) suivant une courbe plane C_1 projetée en C′.

Et en effet :

Nous savons que par deux courbes C et C_1 qui ont deux points d'intersection z et z' ou une corde commune $\overline{zz'}$, on peut toujours faire passer deux cônes Δ et Δ',

qui ont deux plans tangents communs (T) et (T′), en les points z et z' extrémités de la corde zz' commune aux deux sections coniques C et C_1.

Or puisque nous supposons que la courbe C est sur le plan horizontal de projection, les tangentes T et T′ pour les points z et z' seront les traces horizontales des plans tangents (T) et (T′), et ces plans (T) et (T′) seront déterminés de position dans l'espace par les tangentes aux mêmes points z et z' à la courbe C_1 dont C′ est la projection horizontale.

Si donc par le point t, en lequel se coupent les tangentes T et T′ (point t qui est évidemment sur la droite Q), on fait passer une droite D située dans le plan vertical passant par Q, cette droite D coupera la verticale Z passant par le point p en un point s, et la verticale Z′ passant par le point p' en un point s', et si l'on considère ces points s et s' comme les sommets respectifs de deux cônes Δ et Δ' ayant la courbe C pour base commune, ces deux cônes se recouperont dès lors et nécessairement suivant une seconde courbe plane C_1 dont la trace horizontale de son plan ne sera autre que la droite I.

Quelle que soit la direction de la droite D, pourvu qu'elle s'appuie toujours sur les droites Z et Z′, et qu'elle passe toujours par le point t, les points s_1 et s_1' que l'on obtiendra pour une autre position D_1 de cette droite D, seront les sommets de deux nouveaux cônes Δ_1 et Δ_1', qui, ayant toujours pour base commune la courbe C, se recouperont toujours et nécessairement suivant une courbe plane C_1' dont la trace horizontale de son plan sera toujours la droite I.

Démontrons maintenant que les courbes C_1, C_1',.... se projetteront toujours horizontalement suivant la courbe C′, ou, en d'autres termes, que ces diverses courbes planes C_1, C_1',.... seront situées sur le cylindre vertical (C′) ayant la section conique C′ pour section droite.

Puisqu'en faisant varier la position de la droite D, on obtient une série de courbes C_1 dont les plans passent tous par la droite I, il suffit de démontrer qu'un plan quelconque passant par la droite I, coupera toujours un certain cône ayant son sommet sur la droite Z, suivant une courbe se projetant suivant C′; ou, en d'autres termes, il suffit de démontrer que la courbe C et une courbe C_1 ayant la courbe C′ pour projection (le plan de cette courbe C_1 passant par la droite I), sont toujours enveloppées par un cône ayant son sommet sur la droite Z.

Or la courbe C_1 aura son plan (C_1) déterminé par sa trace horizontale I, et par par un point de l'espace; prenons pour ce point un point e'' ayant pour projection horizontale le point e'; la droite ee'' coupera la verticale Z en un point s qui sera le sommet du cône Δ ayant la courbe C pour base et étant coupé par le plan (e'', I) suivant une section conique C_1.

Cette section conique C_1 passera par les points z, z' et e''; sa projection horizon-

tale passera donc par les points z, z' et e'; et comme le plan vertical, qui a pour trace horizontale la tangente θ, est tangent au cône Δ suivant la génératrice droite ee'', il s'ensuit que la projection horizontale de la courbe C_1 devra être tangente en e' à la droite θ; de plus, la courbe C_1 devra se projeter horizontalement suivant une courbe tangente à la droite θ_1, puisque cette droite θ_1 est la trace horizontale d'un second plan vertical et tangent au cône Δ; la projection horizontale de la courbe C_1 doit donc passer par les trois points z, z', e', et être tangente aux droites θ et θ_1, elle ne peut donc être autre que la courbe C′, puisque cette courbe C′ satisfait aux cinq mêmes conditions. Donc, etc.

Et comme nous pouvons arbitrairement choisir l'une des deux courbes C et C′, pour la base du cône sur laquelle se trouvera placée la courbe C′, il s'ensuit que si aux points z et z', nous menons à la courbe C′ les tangentes Θ et Θ' qui se couperont en un point i situé sur la droite Q, nous pourrons faire passer par ce point i une droite B coupant les verticales Z et Z′ en des points d et d' qui seront les sommets de deux cônes λ et λ' ayant la courbe C′ pour base commune, et se coupant suivant une seconde courbe plane dont la projection horizontale sera la courbe C, et le plan de cette seconde section passera par la droite I.

Quatrième cas. *Les deux sections coniques* C *et* C′ *ayant un point de contact et deux points d'intersection.*

598. Traçons sur le point horizontal de projection deux sections coniques C et C′ se coupant en deux points z et z' et se touchant en un point b_1. Ces deux courbes pourront être telles qu'elles aient trois tangentes communes (*) (*fig.* 303), savoir : la tangente au point b_1, et les deux tangentes extérieures θ et θ_1 touchant la courbe C aux points e et e_1, et la courbe C′ aux points e' et e_1'.

Les trois tangentes communes se coupent en les points p', p'', p''', et ces trois points sont les sommets d'un triangle circonscrit aux deux courbes données C et C′.

Cela posé :

Le point p peut être regardé comme la projection horizontale et orthogonale du sommet d'un cône Δ ayant la courbe C pour base, et la courbe C′ peut être regardée comme la base ou section droite d'un cylindre vertical (C′); or, puisque évidemment ces deux surfaces Δ et (C′) ont deux plans tangents communs, verti-

(*) Nous verrons plus loin, lorsque nous examinerons le cas où deux sections coniques se coupent en quatre points, que ces sections coniques peuvent être telles qu'elles aient quatre ou trois ou aucune tangentes communes, car le nombre des tangentes communes ne dépend pas du nombre des points communs entre les deux sections coniques, mais des positions qu'affectent l'une par rapport à l'autre les deux sections coniques.

caux et ayant pour traces horizontales les tangentes θ et θ_1, ces deux surfaces Δ et (C′) se couperont suivant deux courbes planes C_1 et C_2 ayant la courbe C′ pour projection horizontale, et il est évident que la corde $\overline{zz'}$ prolongée sera la trace du plan de la courbe C_1, et que la tangente au point b_1 sera la trace du plan de la seconde courbe C_2.

Dès lors ces droites ne seront autres que les droites désignées ci-dessus par I et E et se coupant au point q; et si l'on mène du point q des tangentes β et β' aux courbes C et C′, les points de contact b et b' seront en ligne droite avec le point b_1, et ainsi la droite Q sera déterminée.

Il est évident que, ni le point k (en lequel les droites Q et $\overline{zz'}$ se coupent) ni le point de contact b_1 des deux courbes C et C′ ne peut être considéré comme la projection horizontale du sommet d'un cône Δ' ayant C pour base, et coupant le cylindre (C′) suivant une courbe plane projetée en C′, car il est évident pour ceux qui sont habitués à lire dans l'espace, que, pour que le point k pût être le sommet d'un tel cône, il faudrait que la courbe C′ ne fût pas tangente à la courbe C, et que pour que le point b_1 fût le sommet d'un tel cône, il faudrait que la courbe C′ fût enveloppée par la courbe C, ou enveloppât cette courbe C.

Ainsi le point p' n'existe pas dans le cas particulier qui nous occupe.

Mais il existe deux nouveaux points qui jouent le même rôle que le point p, ce sont les points p'' et p'''.

Ainsi le point p'' peut être considéré comme la projection du sommet d'un cône Δ'' ayant la courbe C pour base, et qui sera coupé par le cylindre (C′) suivant deux courbes planes C_1'' et C_2'' projetées horizontalement en C′, et cela parce que les deux surfaces Δ'' et (C′) ont deux plans tangents communs, verticaux et ayant pour traces les tangentes θ et $\overline{qb_1}$.

Il est évident que les traces horizontales des plans de ces deux courbes C_1'' et C_2'' se confondront en une seule droite qui ne sera autre que $\overline{qz_1}$, en sorte que cette droite sera en même temps pour le point p'' les deux droites I″ et E″.

Par les mêmes raisons, la droite $\overline{z'b_1}$ jouera, par rapport au point p''', le rôle des droites I‴ et E‴, et le point b_1 sera un second point q' jouant le même rôle que le point q, et la droite $\overline{qb_1}$ sera une droite Q′ jouant, par rapport au point q', le même rôle que la droite Q par rapport au point q.

Cinquième cas. *Les deux sections coniques* C *et* C′ *n'ayant qu'un seul point de contact et s'enveloppant l'une l'autre.*

599. Soient tracées sur le plan horizontal deux sections coniques C et C′ (*fig.* 304), n'ayant en commun qu'un seul point de contact p, s'enveloppant l'une l'autre et n'ayant dès lors qu'une seule tangente commune. Nous pourrons re-

garder le point p comme la projection orthogonale du sommet d'un cône Δ ayant la courbe C pour base, et nous pourrons considérer la courbe C' comme la base ou section droite d'un cylindre vertical (C'). Démontrons que les deux surfaces se coupent toujours suivant une courbe plane C_1.

Les deux surfaces Δ et (C') ont pour génératrice de contact la droite verticale Z passant par le point p, on doit donc considérer ces deux surfaces Δ et (C') comme se coupant déjà suivant une courbe plane C_2 (qui n'est autre que la droite Z) et dont le plan sera le plan tangent (I) commun à ces deux surfaces; ce plan (I) aura pour trace horizontale la droite I tangente commune en p aux deux courbes données C et C'.

Puisque les deux surfaces Δ et (C') ont déjà une section plane C_2 commune, elles doivent se recouper suivant une seconde courbe plane C_1 : par conséquent, si, par la droite Z, on mène une suite de plans verticaux (Y)...., ils couperont la surface conique Δ suivant des génératrices droites G.... lesquelles couperont la courbe C_1 en des points y.... et la courbe C en des points m.... et les tangentes à la courbe C_1 pour les points y.... et les tangentes à la courbe C pour les points m.... se couperont en des points x.... qui seront sur la droite E trace horizontale du plan (C_1) de la courbe C_1.

Il suffit donc, pour déterminer cette droite E, de mener par le point p une suite de droites Y, Y',.... coupant C' en les points m', m_1',.... et coupant la courbe C aux points $m. m_1$,.... et de construire les tangentes $m'x$, $m_1'x'$,.... à la courbe C' pour les points m', m_1',.... et les tangentes mx, m_1x',.... à la courbe C pour les points m, m_1.... Les tangentes $m'x$ et mx se couperont en un point x, les tangentes $m_1'x'$ et m_1x' se couperont en un point x' et ainsi de suite, et les divers points x,x',.... seront sur une droite E qui coupera la droite I en un point q, tel que si de ce point q on mène deux tangentes θ à C et θ' à C', les deux points de contact b et b' seront avec le point p en ligne droite, et la droite $\overline{bb'p}$ sera précisément la droite Q.

Sixième cas. *Les deux sections coniques* C *et* C' *n'ayant aucun point commun, et étant intérieures l'une par rapport à l'autre.*

600. Étant données deux sections coniques C et C' satisfaisant à la condition de s'envelopper l'une l'autre, on voit de suite que si l'on prend dans l'espace un point s, et qu'on le regarde comme le sommet commun à deux cônes Φ et Φ' ayant pour base, le premier la courbe C, et le second la courbe C', ces deux cônes devront aussi s'envelopper l'un l'autre, et que dès lors on pourra toujours les couper par un plan, de manière à avoir pour section deux ellipses, dont l'une sera intérieure par rapport à l'autre; de plus, il est évident que l'on pourra toujours choisir la position du point s et diriger le plan sécant, de manière que l'une des sections

soit un cercle B, et que l'autre section soit une ellipse A, intérieure ou extérieure au cercle B.

Il nous suffit donc d'examiner ce qui doit arriver pour un cercle B et une ellipse A enveloppée par le cercle B, pour avoir résolu la question dans toute sa généralité, et ainsi quelles que soient les sections coniques C et C'.

Si au lieu d'avoir un cercle B et une ellipse A, on avait deux cercles B' et A', intérieurs l'un à l'autre, alors il serait facile de déterminer leur *pôle* unique et leur *polaire* unique, car la *polaire* serait l'*axe* de similitude, et le *pôle* serait le *centre* de similitude.

Et au moyen des *projections*, on détermine de suite cet *axe* et ce *centre*.

Car d'abord l'axe de similitude S (*fig*. 305), passe évidemment par les centres b' et a' des deux cercles B' et A', et si l'on prend pour ligne de terre la droite S il suffira de déterminer la position (sur le plan vertical de projection) du sommet s d'un cône Δ, qui, ayant le cercle B' pour base, serait coupé par un cylindre vertical et de révolution (A') ayant le cercle A' pour base, suivant une courbe plane A_1'. Or il est évident que, puisque tout plan horizontal coupera le cône Δ suivant un cercle et le cylindre (A') aussi suivant un cercle, il est évident, dis-je, que les deux surfaces Δ et (A') se couperont suivant deux cercles horizontaux. Pour déterminer le sommet s, il suffira donc de mener par les points l^h et l'^h (en lesquels la droite S perce le cercle A') des perpendiculaires à la ligne de terre et de mener une parallèle $A_1'^v$ à cette ligne de terre, les points l et l' étant unis aux points i et i' (en lesquels la droite S perce le cercle B'), on aura deux droites qui se couperont en un point s, et abaissant de ce point s une perpendiculaire sur la droite S, on aura en s^h le *pôle* ou *centre* de similitude des deux cercles A' et B'.

Mais si l'on a deux ellipses α et 6 concentriques, il ne pourra arriver que deux cas : ou 1° ces deux ellipses seront semblables et semblablement placées, ou 2° elles ne seront pas semblables, ou, étant semblables, elle ne seront pas semblablement placées.

Dans le *premier cas*, les deux courbes α et 6 auront évidemment une infinité de systèmes de diamètres conjugués, superposés en direction.

Dans le *deuxième cas*, les deux courbes α et 6 n'auront qu'un seul système de diamètres conjugués superposés en direction ; et en effet, supposons que l'ellipse α soit intérieure à l'ellipse 6, nous pourrons construire une infinité d'ellipses α', α'',.... concentriques et semblables à l'ellipse α, et il est évident que, parmi toutes ces ellipses, il y en aura une α_1 qui sera tangente en deux points à l'ellipse 6, et ces deux points seront les extrémités d'un diamètre d commun aux ellipses α_1 et 6; dès lors il est évident que le conjugué d_1' de d pour l'ellipse α_1 aura la même di-

rection que le conjugué d' de d pour l'ellipse β; par conséquent le système des diamètres d et d' de la courbe β se superposera avec l'un des systèmes de diamètres conjugués de l'ellipse α.

Cela posé :

Ayant deux ellipses concentriques et semblablement placées α et β, si l'on conçoit dans l'espace un point s pris pour sommet commun à deux cônes ayant respectivement pour base les courbes α et β, si un plan coupe l'un de ces cônes suivant un cercle, il coupera le second suivant une ellipse, et si l'on a deux ellipses simplement concentriques, le plan qui coupera l'un des cônes suivant un cercle coupera encore le second cône suivant une ellipse. Mais il est évident que, dans les deux cas, le cercle et l'ellipse ne pourront pas avoir entre eux les mêmes *relations polaires*. On voit donc que, si l'on a un cercle B et une ellipse A intérieurs l'un à l'autre, il ne serait pas convenable de ramener le problème à la solution du problème si simple, mais si particulier, de la recherche du *pôle* de similitude de deux cercles, et de plus on voit très-bien que l'on se trouve traiter, dans toute sa généralité, la *question polaire* relative à *deux sections coniques* intérieures l'une à l'autre, en examinant le cas simple d'un *cercle* et d'une *ellipse* intérieure à ce cercle.

De plus, ce qui précède nous fait voir que nous pouvons passer de ce qui existe *polairement* pour deux ellipses simplement concentriques, à ce qui doit être *polairement* entre deux ellipses, ou entre un cercle et une ellipse (intérieures l'une à l'autre, et non concentriques) et que les *propriétés polaires*, auxquelles nous arriverons par ce moyen, auront toute la *généralité* possible.

Or, si nous considérons deux ellipses seulement concentriques, et ayant dès lors un seul *système* de diamètres conjugués superposés en direction, et pour rendre la *fig.* 306 plus simple, nous supposons que le *système* soit celui des *axes*, nous voyons que les deux courbes sont telles qu'on peut circonscrire à chacune d'elles un parallélogramme, ou, d'après la *fig.* 306, un rectangle, et que ces deux parallélogrammes ou rectangles ont leurs côtés respectivement parallèles, mais que leurs diagonales ne se superposent pas en direction.

Désignons par o le centre commun aux deux ellipses α et β; par m et n, p et q, les extrémités des axes $\overline{mn}$ et $\overline{pq}$ de l'ellipse α; par m' et n', p' et q' les extrémités des axes $\overline{m'n'}$ et $\overline{p'q'}$ de l'ellipse β; par M, N, P, Q, M', N', P', Q', les côtés des parallélogrammes ou rectangles circonscrits, en supposant ces côtés indéfiniment prolongés; par x et x_1, y et y_1 les extrémités des diagonales $\overline{xx_1}$ et $\overline{yy_1}$ du parallélogramme ou rectangle circonscrit à l'ellipse α; par x' et x_1', y' et y_1' les extrémités des diagonales $\overline{x'x_1'}$ et $\overline{y'y_1'}$ du parallélogramme ou rectangle circonscrit à

l'ellipse β; par X, Y, X', Y', les diagonales elles-mêmes, en les supposant prolongées indéfiniment; par S et T les axes prolongés.

Cela posé :

Prenons dans l'espace un point s, et regardons ce point comme le sommet commun à deux cônes Δ et Δ' ayant respectivement pour bases les courbes α et β, et de plus, par chacune des droites du *système plan* et par le point s faisons passer un plan; nous désignerons par (M), (N),.... les plans passant par le point s et les droites M, N,....

Les couples de plans qui passeront par des droites qui sont parallèles entre elles sur le *système plan* (sur le plan des courbes α et β), se couperont suivant une droite qui passera par le point s et qui sera parallèle aux droites parallèles entre elles et situées dans le plan (α, β), et par conséquent qui sera parallèle au plan des bases α et β.

Menons donc par le point s un plan γ parallèle au plan des bases α et β, nous aurons des droites S_1, T_1, M_1, N_1, P_1, Q_1, X_1, Y_1, X_1', Y_1', respectivement parallèles aux droites situées dans le plan des bases.

Coupons tout le système conique par un plan quelconque λ, nous obtiendrons sur ce plan deux ellipses α' et β', sections faites par ce plan λ dans les cônes Δ et Δ', et une droite R, intersection de ce plan λ avec le plan γ, et les droites M_1, N_1,... couperont cette droite R en des points par lesquels passeront respectivement les intersections des divers plans (M), (N),.... par le plan λ.

Nous aurons donc la *fig.* 306 *bis*, qui nous montre que les deux courbes α' et β' intérieures l'une à l'autre, sont *liées* l'une à l'autre par un *triangle polaire* dont les sommets sont respectivement les *pôles* des côtés opposés qui en sont les *polaires*, l'un des côtés *prolongé* de ce triangle étant la droite R : en sorte que les deux courbes α' et β' ont trois *systèmes polaires* en commun, chaque système étant composé d'un *pôle* unique et d'une *polaire* unique.

Si, au contraire, nous avions considéré deux ellipses α et β, concentriques, semblables et semblablement placées (*fig.* 307), on aurait pu circonscrire à chacune de ces courbes une infinité de systèmes de parallélogrammes ayant leurs côtés respectivement parallèles et leurs diagonales étant superposées en direction, et l'on obtiendrait sur le plan λ la *fig.* 307 *bis*, qui nous montre que, dans ce cas, les courbes α' et β' ont une infinité de systèmes polaires communs, ou une infinité de *triangles polaires* communs ayant tous un sommet commun, qui est le *pôle* de la droite R, sur laquelle sont placées les bases de tous ces triangles.

Ainsi, il se trouve démontré que lorsque l'on a deux sections coniques C et C', intérieures l'une à l'autre, elles seront toujours *liées* l'une à l'autre par l'un des *systèmes polaires* représentés par les *fig.* 306 *bis* et 307 *bis*.

Lorsque l'on a deux courbes α' et $6'$ *liées* entre elles comme elles le sont sur la *fig.* 307 *bis*, en menant par le point s une droite D de direction arbitraire dans l'espace, deux cônes Δ et Δ' ayant leurs sommets d et d' situés arbitrairement sur cette droite D et ayant pour base, le premier la courbe α', et le second la courbe $6'$, s'entrecouperont suivant deux courbes planes dont les plans passeront par la droite R; en sorte que cette droite R joue le même rôle que les droites I et E de la *fig.* 300. Et cela est évident, puisque les points conjugués t et u, t' et u',.... sont tous distribués sur la droite R.

Mais si, par le point s de la *fig.* 306 *bis*, on menait une droite D de direction arbitraire dans l'espace, les cônes Δ et Δ' ne s'entrecouperaient pas suivant deux courbes planes, et cela est évident en considérant la *fig.* 306 ; car si, par le point o, on élève une droite verticale ou une droite de direction arbitraire, peu importe, deux cônes qui auront leurs sommets sur cette verticale ou sur la droite de direction arbitraire, et qui auront respectivement pour bases les courbes α et 6, ne pourront jamais se couper suivant des courbes planes; tandis que l'on voit très-bien par la *fig.* 307, que lorsque les ellipses α et 6 sont semblables et semblablement placées, les deux cônes Δ et Δ' s'entrecouperont toujours suivant deux courbes planes dont les plans seront parallèles entre eux et horizontaux, ou, en d'autres termes, parallèles au plan des courbes α et 6.

Ainsi, dans le cas de la *fig.* 306 *bis*, les droites I et E seront remplacées par des *lignes courbes*.

SEPTIÈME CAS. *Les deux sections coniques* C *et* C' *se coupant en quatre points.*

601. Lorsque nous avons examiné les *propriétés polaires* qui devaient exister entre deux sections coniques, 1° n'ayant aucun point commun, et extérieures ou intérieures l'une à l'autre, 2° ayant un point de contact, et étant intérieures ou extérieures l'une à l'autre, 3° se coupant en deux points, 4° se touchant en un point et se coupant en deux points, nous aurions dû combiner les diverses espèces de sections coniques et examiner dès lors ce qui devait arriver dans chaque cas particulier, en considérant les *divers systèmes* formés, 1° de deux ellipses, 2° de deux hyperboles, 3° de deux paraboles, 4° d'une ellipse et d'une hyperbole, 5° d'une hyperbole et d'une parabole, et 6° enfin d'une ellipse et d'une parabole.

C'est ce que nous allons faire en discutant le cas où les deux sections coniques données C et C' se coupent en quatre points; et l'on pourra revenir aux cas précédents et y appliquer tout ce que nous allons dire sur ce dernier cas, savoir : celui où les deux sections coniques données ont quatre points communs.

Toutefois je n'entrerai pas dans le détail complet des diverses propriétés *polaires*

du système de deux sections coniques ayant quatre points communs. Ceux qui voudront étudier d'une manière complète la *théorie des polaires*, doivent lire l'ouvrage remarquable publié par M. Poncelet sous le titre de *Théorie des propriétés projectives* (*).

1° *Les courbes* C *et* C′ *étant deux ellipses.*

Nous pouvons supposer d'abord que les deux ellipses C et C′ se coupant en quatre points, ont même centre (*fig.* 308). Alors elles auront nécessairement quatre tangentes communes formant un parallélogramme circonscrit en même temps aux deux courbes, et les quatre points d'intersection seront les sommets d'un parallélogramme inscrit aussi en même temps aux deux courbes, et il est évident que ces deux courbes auront un *système* de diamètres conjugués tel que ces diamètres seront superposés en direction.

Cela posé :

Il pourra arriver deux cas : ou 1° les diagonales du parallélogramme inscrit seront respectivement parallèles aux côtés du parallélogramme circonscrit; ou 2° les diagonales du parallélogramme inscrit ne seront pas respectivement parallèles aux

(*) Je n'expose ici quelques-unes des propriétés *polaires* des sections coniques et des surfaces du second ordre, combinées deux à deux ou trois à trois, que pour faire voir que l'on peut établir toute la *théorie des polaires*, relativement aux sections coniques et aux surfaces du second ordre, par la seule méthode des projections, et ainsi en employant la langue graphique ou, en d'autres termes, la *Géométrie descriptive*, et sans avoir besoin de recourir ni aux rapports harmoniques employés par les anciens géomètres, ni à l'involution de six points, théorème qui est dû à Désargues.

Il y a bien longtemps que j'ai reconnu que la géométrie descriptive pouvait suffire pour rechercher, et établir, et démontrer les *propriétés polaires* dont jouissent les sections coniques et les surfaces du second ordre, combinées deux à deux ou trois à trois, lorsqu'elles ont entre elles certaines *relations de position*.

En 1824, je montrai dans mes leçons, à l'école de Marieberg, près Stockholm, et après avoir lu l'ouvrage de M. Poncelet, que les belles et nouvelles propriétés trouvées par ce savant géomètre, pouvaient facilement être démontrées par la *Géométrie descriptive*, attendu qu'elles étaient *écrites* dans les *épures* de la section faite par un plan dans un cône à base section conique, et dans les *épures* de l'intersection de deux cônes ayant chacun pour base une section conique et s'entrecoupant suivant deux courbes planes, et qu'ainsi il suffisait d'apprendre à *lire* les propriétés *polaires* écrites sur nos épures.

Étant venu à Paris en 1825, j'exposai à la Société philomathique mes idées à ce sujet, et plus tard, je publiai dans la *Correspondance de mathémathiques et de physique des Pays-Bas*, rédigée par M. Quételet, de Bruxelles, plusieurs mémoires basés sur cette manière d'envisager la théorie des polaires.

Voyez le mémoire *Sur les propriétés des courbes du second degré considérées dans l'espace*, le mémoire *Sur les propriétés de trois courbes planes situées sur une surface du second ordre*, le mémoire *Sur les propriétés polaires qui existent entre les huit courbes tangentes à trois sections planes d'une surface du second ordre*, etc., etc., etc.

côtés du parallélogramme circonscrit; et il est évident que ces deux manières d'être des deux ellipses, l'une par rapport à l'autre, sont les seules qui puissent exister.

Si donc on prend dans l'espace un point s arbitraire, et qu'on le regarde comme le sommet commun à deux cônes Δ et Δ' ayant respectivement pour bases les courbes C et C', et si, par ce sommet s et par chacune des diverses droites du système tracé sur le plan horizontal, on fait passer un plan, on voit de suite que l'on obtiendra pour section plane dans le *système conique* de l'espace, une figure telle que celle indiquée *fig.* 308 *bis*.

Mais cette *fig.* 308 *bis* pourra présenter deux variétés très-distinctes. Ainsi, lorsque (*fig.* 308) les côtés opposés du parallélogramme circonscrit seront respectivement parallèles aux diagonales du parallélogramme inscrit, la *fig.* 308 *bis* nous donnera les points p''' et p'' situés sur la droite $\overline{qq_1}$, et ces points p''' et p'' seront en même temps situés sur les diagonales du quadrilatère inscrit aux deux sections coniques se coupant en quatre points; mais lorsque (*fig.* 308, a) les côtés opposés du parallélogramme circonscrit ne sont pas respectivement parallèles aux diagonales du parallélogramme inscrit, alors les points p'' et p''' seront toujours placés (*fig.* 308 *ter*), sur la droite $\overline{qq_1}$, mais en dehors des diagonales du quadrilatère inscrit.

En sorte que lorsque l'on se donne deux *ellipses* C et C' se coupant en quatre points a, a', b, b' (*fig.* 308 *bis* ou *ter*), les quatre tangentes communes et toutes extérieures aux ellipses C et C' se coupent deux à deux en six points, dont quatre p et p', p_1 et p_1' sont situés, savoir : deux sur la droite Q et deux sur la droite Q_1; et les deux autres p'' et p''' seront, 1° les intersections de la droite $\overline{qq_1}$ et des diagonales du quadrilatère inscrit $aa'bb'$ (*fig.* 308 *bis*), ou seront 2° situés tous les deux sur la droite $\overline{qq_1}$, mais en dehors des diagonales prolongées $\overline{bb'}$ et $\overline{aa'}$ (*fig.* 308 *ter*).

Ces deux résultats *polaires* et différents entre eux, et qui sont les seuls qui peuvent exister, étant signalés, examinons quelles sont les droites du système (*fig.* 308 *bis* et *ter*), qui représenteront les droites désignées ci-dessus par I..... et par E.....

Du moment que les deux ellipses C et C' ont deux tangentes communes, on peut regarder le point en lequel ces tangentes se coupent comme la projection horizontale du sommet d'un cône Δ ayant pour base la courbe C, et ce cône Δ sera coupé par le cylindre vertical (C') suivant deux courbes planes C_1 et C_2, et les traces des plans (C_1) et (C_2) de ces courbes C_1 et C_2 ne seront autres que les droites I et E demandées.

Or il est évident, d'après tout ce qui a été dit ci-dessus et à ce sujet, que les

côtés opposés $\overline{ab}$ et $\overline{a'b'}$ du quadrilatère inscrit, seront précisément les droites I et E, soit que l'on considère le point p, soit que l'on considère le point p' comme étant la projection du sommet du cône.

Par les mêmes raisons, soit que l'on considère le point p_1, soit que l'on considère le point p_1', les côtés opposés $\overline{ab'}$ et $\overline{a'b}$ du quadrilatère inscrit seront les droites I_1 et E_1.

Lorsque l'on considérera le point p''' (qu'il soit ou non l'intersection de la diagonale et de la droite $\overline{qq_1}$) comme la projection du sommet d'un cône ayant l'ellipse C pour base, les traces des plans des courbes suivant lesquelles le cylindre (C') coupera ce cône, se confondront en une seule et même droite qui ne sera évidemment autre que la diagonale $\overline{bb'}$ prolongée ; on aura donc en cette diagonale bb' les droites I''' et E'''.

Par les mêmes raisons, encore, lorsque l'on considérera le point p'', la diagonale $\overline{aa'}$ prolongée *jouera le rôle* des droites I'' et E''.

2° *Les courbes* C *et* C' *étant deux hyperboles.*

Traçons (*fig.* 309) deux hyperboles C et C' se coupant en quatre points a, a', b, b', et ayant même centre o; et supposons : 1° que ces deux hyperboles sont tellement placées qu'on puisse leur mener quatre tangentes communes, ce qui aura lieu évidemment toutes les fois que les deux courbes auront un système de diamètres conjugués qui sont superposés en direction, et il faudra en même temps que les deux diamètres transverses se superposent en direction.

Les quatre tangentes communes aux deux hyperboles se couperont en quatre points p et p', p_1 et p_1', situés deux à deux sur les diamètres conjugués superposés en direction, et il est facile de voir que jamais les côtés opposés du parallélogramme $pp'p_1p_1'$ circonscrit (par le prolongement de ses côtés) aux deux hyperboles concentriques ne pourront être parallèles aux diagonales $\overline{aa'}$ et $\overline{bb'}$ du parallélogramme inscrit.

En mettant la *fig.* 309 *en perspective*, on obtiendra la forme de *système polaire* qui *lie* entre elles deux hyperboles qui se coupent en quatre points et qui ont quatre tangentes communes.

Supposons : 2° que les deux hyperboles concentriques se coupant en quatre points $a_1a_1'b_1b_1'$ (*fig.* 310) sont tellement placées l'une par rapport à l'autre qu'on ne puisse leur construire de tangente commune, ce qui arrivera évidemment toutes les fois que les deux hyperboles seront inversement placées.

En faisant la *perspective* de la *fig.* 310, on obtiendra deux hyperboles ayant en commun un quadrilatère inscrit, mais comme ces courbes n'auront pas de tan-

gentes communes, on ne pourra plus employer la considération d'un cône Δ ayant pour base l'une C des hyperboles et d'un cylindre (C') ayant l'autre hyperbole C' pour section droite, puisque ces deux surfaces n'auraient pas deux plans tangents communs; car, dans ce cas, nous ne pourrions plus affirmer si ces surfaces se coupent ou ne se coupent pas suivant des courbes planes. Plus loin nous reviendrons sur ce *cas* et sur d'autres analogues et qui vont se présenter, et je montrerai qu'on ne peut les résoudre que par la considération des surfaces gauches doublement réglées enveloppant deux sections coniques; et qu'ainsi lorsque précisément on ne peut pas résoudre ces cas tout particuliers, par la considération des surfaces coniques, on le peut toujours par la considération des surfaces gauches doublement réglées.

3° *Les courbes* C *et* C' *étant deux paraboles.*

Lorsque deux paraboles se coupent en quatre points (*fig.* 311), on peut toujours leur construire trois tangentes communes qui se coupent deux à deux en trois points p, p', p''; et ces trois points qui pourront dès lors être chacun considérés comme la projection horizontale du sommet d'un cône Δ, qui, ayant pour base l'une C des paraboles, sera recoupé suivant deux courbes planes par le cylindre (C') ayant la seconde parabole C' pour section droite; on établira donc le *système polaire* tout aussi facilement que pour les *fig.* 300 et 301.

4° *Les courbes* C *et* C' *étant l'une une ellipse et l'autre une hyperbole.*

Il peut se présenter deux cas : ou (*fig.* 312) l'ellipse C' coupera chaque branche de l'hyperbole en deux points, et on ne pourra pas construire de tangente commune aux deux courbes ; ou 2° (*fig.* 313) l'ellipse C' coupera seulement une des branches de l'hyperbole C et en quatre points. Dans ce dernier cas, on aura quatre tangentes communes à l'ellipse et à la branche d'hyperbole sur laquelle se trouvent situés les quatre sommets du quadrilatère inscrit, si l'ellipse ne coupe pas les asymptotes de l'hyperbole; et deux tangentes communes seulement, si l'ellipse coupe les deux asymptotes; et trois tangentes communes, si l'ellipse ne coupe qu'une des deux asymptotes. Mais les quatre tangentes communes existeront toujours, parce que l'on pourra mener, ou deux tangentes, ou une tangente commune et à l'ellipse et à la seconde branche de l'hyperbole, dans les deux derniers cas particuliers que nous venons d'énoncer ci-dessus.

Dans le cas de la *fig.* 312, on ne pourra pas établir le *système polaire* par la considération des cônes, mais bien par la considération des surfaces gauches doublement réglées et enveloppant deux sections coniques.

Dans tous les cas que peut présenter la *fig.* 313, on pourra établir le *système*

polaire par la considération des cônes enveloppant deux surfaces coniques, et on pourra dès lors raisonner *géométriquement*, ainsi que nous l'avons fait pour les *fig.* 300 et 301, etc.

5° *Les courbes* C *et* C′ *étant l'une une parabole et l'autre une hyperbole.*

Lorsque la parabole coupera chacune des branches de l'hyperbole (*fig.* 314), nous redirons ce qui a été dit ci-dessus pour la *fig.* 312.

Lorsque la parabole coupera une seule branche de l'hyperbole (*fig.* 315), alors elle coupera toujours une des asymptotes; il pourra donc arriver, *seulement*, ou 1° que la parabole ne coupe pas la seconde asymptote, et alors on pourra construire trois tangentes communes à la parabole et à la branche de l'hyperbole qui est coupée en quatre points par la parabole; ou 2° que la parabole coupe la seconde asymptote, alors on ne pourra plus construire que deux tangentes communes à la parabole et à la branche de l'hyperbole coupée par cette parabole, mais, dans ce cas, on pourra construire une troisième tangente commune à la parabole et à la seconde branche de l'hyperbole. Ainsi on aura toujours trois tangentes communes, déterminant, par leur intersection deux à deux, un triangle circonscrit aux deux sections coniques données.

On pourra donc, dans ce dernier cas, établir le *système polaire* comme pour les *fig.* 300 et 301. Mais, dans le premier cas, on devra considérer des surfaces gauches doublement réglées et enveloppant deux sections coniques.

6° *Les courbes* C *et* C′ *étant l'une une parabole et l'autre une ellipse.*

Il sera toujours possible (*fig.* 316) de construire quatre tangentes communes à une ellipse et à une parabole se coupant en quatre points. Le *système polaire* peut donc être facilement établi, comme pour les *fig.* 300 et 301.

Des polaires réciproques du système formé de deux cônes à base section conique.

602. Concevons un cône Δ du second degré, et ayant son sommet en un point *s* de l'espace; coupons ce cône par deux plans P et P′, on obtiendra deux sections coniques 𝔊 et 𝔊′ qui pourront avoir trois manières d'être entre elles, suivant la direction donnée aux plans sécants P et P′.

1° Les deux courbes 𝔊 et 𝔊′ peuvent n'avoir aucun point commun, et alors la droite S, suivant laquelle se coupent les plans P et P′, sera extérieure au cône Δ, ou, en d'autres termes, cette droite S n'aura aucun point commun avec le cône Δ.

2° Les deux courbes 𝔊 et 𝔊′ peuvent se couper en deux points *b* et *b′*, et alors

les deux plans P et P′ se couperont suivant une droite S qui ne sera autre que la corde $\overline{bb'}$ supposée prolongée indéfiniment; cette droite S sera dès lors intérieure au cône Δ, ou, en d'autres termes, cette droite S percera le cône Δ en les deux points *b* et *b′*.

3° Les deux courbes 6 et 6′ peuvent se toucher en un point *a;* alors les deux plans P et P′ se couperont suivant une droite S qui passera par le point *a*, et qui sera tangente en ce point aux deux courbes 6 et 6′.

Cela posé :

Nous savons que l'on peut toujours faire passer un second cône Δ′ par les deux sections coniques 6 et 6′, lorsqu'elles n'ont aucun point commun, ou qu'elles se coupent en deux points *b* et *b′*; et nous savons aussi que lorsqu'elles se touchent en un point *a*, on ne peut les envelopper que par un seul cône.

Dès lors, dans les deux premiers cas, les courbes 6 et 6′ seront enveloppées par deux cônes Δ et Δ′, dont les sommets *s* et *s′* détermineront une droite Z.

Ce sont les droites S et Z qui ont reçu le nom de *polaires réciproques* des deux cônes.

Il est évident que, 1° lorsque la droite S est intérieure au cône Δ, la droite Z est extérieure par rapport aux nappes des deux cônes Δ et Δ′, et 2° lorsque la droite S est extérieure au cône Δ, la droite Z est intérieure par rapport aux nappes des deux cônes Δ et Δ′.

Cela posé :

Énonçons la propriété remarquable dont jouissent les *polaires réciproques* S et Z de deux cônes du second ordre ou du second degré.

Tout plan passant par la droite S coupera le cône Δ suivant une section conique δ, et le cône Δ′ suivant une section conique δ′.

Tout plan K passant par la droite Z coupera les cônes Δ et Δ′ suivant des génératrices droites G et G_1, G′ et G_1'.

Les diverses sections coniques δ... et δ′... seront enveloppées deux à deux par des cônes dont les sommets seront distribués sur la droite Z.

Les plans T et T_1 tangents au cône Δ suivant les génératrices G et G_1, et les plans T′ et T_1' tangents au cône Δ′ suivant les génératrices G′ et G_1', se couperont tous les quatre en un point *t*, situé sur la droite S.

Il est inutile de démontrer la vérité de cette propriété, elle est évidente pour tous ceux qui savent lire dans l'espace.

Et réciproquement :

Si par un point *t* de la droite S, on mène des plans tangents T et T_1 au cône Δ,

et T' et T_1' au cône Δ', les quatre génératrices droites de contact G et G_1, G' et G'_1 seront situées dans un même plan K.

Le point *t* est dit *pôle*, et le plan K est dit *plan polaire* du *système* des deux cônes.

Et ainsi : les deux cônes Δ et Δ', se coupant suivant deux courbes planes $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$, jouissent de la propriété, savoir : qu'ils ont une infinité de *plans polaires* communs K, et une infinité de *pôles t*, chacun de ces *pôles* correspondant à un *plan polaire* particulier :

Tous les *plans polaires* communs passent par la droite Z ;

Tous les *pôles* communs sont situés sur la droite S.

C'est cette propriété remarquable qui a fait donner aux droites Z et S le nom de *polaires réciproques* du *système* de deux cônes du second ordre.

Lorsque les deux courbes $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ sont tangentes l'une à l'autre par un point *a*, alors on ne peut les envelopper que par un seul cône Δ.

Dans ce cas particulier, les polaires réciproques du cône Δ sont la tangente S commune aux deux courbes $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}'$ pour le point *a*, et la génératrice droite G de ce cône Δ passant par le point *a ;* ou mieux, les droites S et G *jouent* le rôle de *polaires réciproques.*

Remarquons que, lorsque la droite S est *extérieure* aux deux cônes Δ et Δ', la droite Z est *intérieure* à ces cônes, et que dès lors, ces cônes ne peuvent avoir de plans tangents communs ; et remarquons aussi que, lorsque au contraire la droite S est *intérieure*, la droite Z est *extérieure*, et que, dans ce cas, les deux cônes Δ et Δ' ont deux points de contact, qui sont les points *b* et *b'* en lesquels ils sont percés par la droite S, et que dès lors ces cônes ont deux plans tangents communs.

Ainsi on peut énoncer ce qui suit :

Lorsque deux cônes du second ordre se coupent suivant deux sections coniques, ou, en d'autres termes, suivant deux courbes planes, ils ont un système de polaires réciproques.

Et réciproquement :

Lorsque deux cônes du second ordre possèdent un système de polaires réciproques, *ils se coupent nécessairement suivant deux courbes planes.*

Et dès lors :

Si deux cônes du second ordre, qui ont deux plans tangents communs, se coupent suivant deux courbes planes, c'est qu'ils ont forcément dans ce cas un système de polaires réciproques ; *et dans ce cas la* polaire S *est* intérieure.

Et si deux cônes du second ordre peuvent se couper suivant deux courbes planes, sans avoir deux plans tangents communs, c'est qu'ils ont dans ce cas un système de polaires réciproques, *et dans ce cas la polaire* S *est* extérieure.

603. Concevons deux cônes Δ et Δ' du second ordre, se coupant suivant deux courbes planes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, dont les plans P et P' se coupent suivant une droite S, et désignons par Z la droite qui unit les sommets s et s' des deux cônes Δ et Δ'.

Cela posé :

Nous savons que, si sur la droite S, qu'elle soit *intérieure* ou *extérieure* aux deux cônes Δ et Δ', on prend un point t, et que l'on mène par ce point t deux plans T et T_1 tangents aux cônes Δ, et deux plans T' et T_1' tangents aux cônes Δ', les génératrices droites de contact sont toutes quatre dans un plan K passant par la droite Z.

Si donc nous désignons par o et o' les points en lesquels la droite Z perce les plans P et P', il est évident que, si de chaque point t de la droite S, on mène deux tangentes θ et θ_1 à la courbe $\mathcal{E}$, et θ' et θ_1' à la courbe $\mathcal{E}'$, les points de contact n et n_1, n' et n_1' de ces tangentes et des courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ satisferont aux conditions suivantes :

1° Les cordes $\overline{nn_1}$..... passeront par le point o.

2° Les cordes $\overline{n'n_1'}$..... passeront par le point o'.

3° Les quatre points n, n_1, n', n_1', seront dans un même plan K passant par la droite Z, et dès lors les cordes $\overline{nn_1}, \overline{n'n_1'}$ étant prolongées, se couperont en un point t_1, situé sur la droite S, et qui sera celui en lequel le plan K coupe cette droite S.

4° Les quatre points n, n_1, n', n_1', seront unis deux à deux par six droites qui se couperont deux à deux en trois points, qui seront le point t_1 et les deux sommets s et s' des deux cônes Δ et Δ'.

Cela posé :

Si nous projetons tout le système conique précédent sur un plan A, nous aurons sur ce plan A deux sections coniques C et C', projections des courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, et le *système polaire* de l'espace se projettera suivant un *système polaire plan* qui reliera entre elles les deux sections coniques C et C', qui sont tracées sur le plan A.

Or le plan A peut avoir toute direction par rapport au système conique de l'espace, on voit donc de suite que l'on pourra du système de l'espace passer à divers systèmes plans particuliers, et pouvoir ainsi établir de suite le *système*

polaire qui doit relier l'une à l'autre deux sections coniques C et C′, qui seraient l'une par rapport à l'autre en des positions très-différentes dans le plan sur lequel elles seront données ou tracées.

Des diverses relations de position qui peuvent exister entre les projections des courbes $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$*, intersections planes de deux cônes du second ordre.*

604. Nous aurons trois systèmes coniques de l'espace à considérer.

1° Celui pour lequel la droite Z qui unit les sommets des deux cônes Δ et Δ′ est *intérieur* à ces cônes, et dès lors la droite S est *extérieure* aux cônes Δ et Δ′.

Dans ce cas, les deux cônes Δ et Δ′ n'ont pas de plans tangents communs.

2° Celui pour lequel la droite Z qui unit les sommets de deux cônes Δ et Δ′ est *extérieur* à ces cônes, et dès lors la droite S est *intérieure* aux cônes Δ et Δ′.

Dans ce cas, les deux cônes Δ et Δ′ ont deux plans tangents communs, et ils ont aussi et *nécessairement* deux points de contact situés sur la droite S.

3° Celui pour lequel les deux sections coniques ne peuvent être enveloppées que par un seul cône Δ; dans ce cas, les deux sections coniques ont un point de contact.

Cela posé :

En prenant le premier *système conique de l'espace*,

Nous pourrons : 1° diriger le plan A, sur lequel on doit projeter les deux sections coniques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, parallèlement à la droite Z et coupant la droite S; dans ce cas, les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, se projetteront suivant deux courbes C et C′ situées l'une par rapport à l'autre, comme dans la *fig.* 300.

Les points p et p' seront les projections des sommets s et s' des deux cônes Δ′ et Δ; ces deux points p et p' seront alors des *pôles conjugués*.

Nous pourrons : 2° diriger le plan A perpendiculairement à l'une des génératrices droites G du cône Δ dont le sommet s est *extérieur;* alors les courbes C et C′ seront situées l'une par rapport à l'autre, comme dans la *fig.* 304.

Nous pourrons : 3° diriger le plan A perpendiculairement à l'une des génératrices droites G′ du cône Δ′ dont le sommet s' est *intérieur;* alors les courbes C et C′ seront situées l'une par rapport à l'autre, comme dans la *fig.* 301.

Nous pourrons : 4° diriger le plan A perpendiculairement à la droite Z; alors les deux courbes C et C′ seront *intérieures* l'une à l'autre, comme dans la *fig.* 307 *bis*.

En prenant le second *système conique de l'espace*,

Nous pourrons : 1° diriger le plan A parallèlement à la droite Z, et coupant la droite S ; dans ce cas, les courbes C et C′ seront situées l'une par rapport à l'autre, comme dans la *fig.* 302.

Nous pourrons : 2° diriger le plan A perpendiculairement à l'une des génératrices droites G du cône Δ, ou G′ du cône Δ′, et dans ce cas les courbes C et C′ seront situées comme dans la *fig.* 303.

En prenant le troisième *système conique de l'espace*,

Nous pourrons : 1° diriger le plan A perpendiculairement à la génératrice droite G du cône Δ, génératrice qui passe par le point de contact des deux sections coniques 6 et 6′, et alors les courbes C et C′ seront entre elles comme dans la *fig.* 304.

Nous pourrons : 2° diriger le plan A parallèlement à la génératrice droite G, qui passe par le point de contact des deux sections coniques 6 et 6′, et alors les courbes C et C′ seront entre elles comme dans la *fig.* 301 ou comme dans la *fig.* 304.

Nous voyons donc que les *fig.* 301 et 304 nous donnent chacune des projections identiques pour deux systèmes coniques différents entre eux.

Les propriétés polaires qui existeront dans ce cas entre les courbes C et C′ seront donc les projections des propriétés de relation de position qui existent séparément pour l'un et l'autre système conique de l'espace.

De sorte que l'ensemble des propriétés *polaires* dont peuvent jouir les courbes C et C′, placées l'une par rapport à l'autre, comme dans les *fig.* 301 et 304, ne peut être établi complétement qu'en examinant ce qui existe pour les deux *systèmes coniques* de l'espace, et non pas seulement ce qui existe pour un seul de ces *systèmes coniques de l'espace*.

Nous pourrions diriger le plan A de diverses autres manières, et nous trouverions alors des *cas particuliers* se rapportant à l'une ou à l'autre des *positions générales* représentées par les *fig.* 300, 301, 302, 303, 304, 307 *bis*.

Il est évident, en vertu de tout ce qui précède, que l'étude et l'examen de ces cas particuliers, ne peut offrir aucune difficulté.

605. Nous venons d'établir ce qui doit arriver lorsque les courbes C et C′ sont les projections de deux sections coniques 6 et 6′ situées sur un cône Δ; mais il peut arriver que les courbes C et C′ ne soient pas les projections de deux courbes planes 6 et 6′ situées sur un cône; et cela peut en effet arriver, car nous devons nous rappeler que lorsque nous avons examiné les propriétés des surfaces du

second ordre, nous avons reconnu que parmi ces surfaces, deux d'entre elles, savoir, le paraboloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe, pouvaient être coupées par deux plans, de telle manière que les sections coniques obtenues ne soient pas susceptibles d'être enveloppées par un cône.

Lorsque cela arrivera comme dans les *fig.* 310, 312, 314, où les sections coniques C et C′ se coupent et n'ont pas de tangentes communes, alors on pourra toujours regarder ces courbes C et C′ comme les projections de sections coniques 6 et 6′ enveloppées dans l'espace par un hyperboloïde à une nappe ou par un paraboloïde hyperbolique.

Et alors, au lieu de considérer la courbe C comme la base d'un cône, et la courbe C′ comme la base d'un cylindre vertical, il faudra concevoir deux surfaces gauches doublement réglées passant l'une et l'autre par la courbe C, et se coupant dès lors suivant une seconde courbe plane C_1 ayant la courbe C′ pour projection.

Du tronc de pyramide quadrangulaire, inscrit à deux sections coniques enveloppées par un cône.

606. Concevons deux sections planes 6 et 6′ d'un cône du second ordre Δ; désignons par S la droite suivant laquelle les plans P et P′ des courbes 6 et 6′ se coupent, et par *s* le sommet du cône Δ.

Les deux courbes 6 et 6′ étant supposées n'avoir aucun point commun, on pourra les envelopper par un second cône Δ′ ayant son sommet *s′* *intérieur* par rapport aux plans des courbes 6 et 6′, et le sommet *s* sera *extérieur* à ces plans.

Désignons par Z la droite qui unit les sommets *s* et *s′*.

Cela posé :

La droite Z perce le plan P en un point *o*, et le plan P′ en un point *o′*, et nous savons que la droite S est *polaire*, le point *o* étant *pôle* pour la courbe 6; nous savons de même que la droite S est *polaire*, le point *o′* étant *pôle* pour la courbe 6′. Prenons sur la droite S un point *l*, nous pourrons construire la droite L qui, passant par le point *o*, sera *polaire* de la courbe 6 pour le *pôle* *l*, et cette droite L coupera la droite S en un point *l′*, qui sera le *pôle* de la *polaire* L′ qui unit les points *l* et *o*.

Le point *l* sera aussi le *pôle* d'une droite L_1, qui, tracée dans le plan de la courbe 6′, passera par le point *o′*, et cette droite L_1 viendra évidemment percer la droite S au même point *l′* (indiqué ci-dessus) puisque les deux courbes 6 et 6′ sont enveloppées par un même cône Δ.

Ce point l' sera le *pôle* de la *polaire* L_1' qui unit les points l et o'.

Cela posé :

Construisons un quadrilatère inscrit à la courbe $\mathcal{E}$ et ayant ses côtés opposés, prolongés, passant par les points l et l', et ses diagonales se croisant au point o. Désignant les sommets de ce quadrilatère par n, n', m, m', les diagonales étant $\overline{nm}$ et $\overline{n'm'}$, si par le sommet s du cône Δ, et par chacun des quatre côtés et des deux diagonales, on fait passer un plan, on aura six plans qui passeront, savoir : deux par la droite $\overline{sl}$, deux par la droite $\overline{sl'}$, deux par la droite $\overline{ss'}$ ou Z ; et ces plans détermineront sur la courbe $\mathcal{E}'$ quatre points n_1, n_1', m_1, m_1', qui seront les sommets d'un quadrilatère inscrit à cette courbe $\mathcal{E}'$, et tel que ses diagonales $\overline{n_1m_1}$ et $\overline{n_1'm_1'}$ se croiseront au point o', et que les côtés opposés étant prolongés passeront par les points l et l'.

Ces deux quadrilatères formeront un tronc de pyramide quadrangulaire, commun à trois pyramides quadrangulaires, ayant respectivement pour sommet les points s, l et l', et les diagonales de ce tronc pyramidal se croiseront au point s', et les diagonales des quatre faces latérales se croiseront en des points qui seront, pour les faces opposées au point l, sur une droite X passant par le point l, et pour les faces opposées au point l', sur une droite Y passant par le point l'.

En sorte que les six faces du tronc pyramidal forment trois groupes composés chacun de deux faces opposées, et les points en lesquels se croisent les diagonales de ces six faces, sont distribués deux à deux sur les droites Z, X, Y, passant respectivement par les sommets s, l, l' des trois pyramides quadrangulaires qui interceptent entre elles le tronc pyramidal.

Si l'on projette sur un plan A tout ce système de l'espace, on voit de suite que la projection des arêtes du tronc pyramidal et des sections coniques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ et des points l, l', s et s' et de la droite S et des droites Z, X, Y, etc., donnera une *figure* dans laquelle il sera facile de lire de nouvelles *propriétés polaires liant* entre elles deux sections coniques C et C′ tracées sur un plan (*).

Examinons maintenant les propriétés dont jouissent deux surfaces du second ordre lorsqu'elles peuvent être enveloppées par un même cône.

Des relations polaires qui peuvent exister entre deux surfaces du second ordre.

607. Démontrons d'abord que l'on peut toujours construire deux surfaces du

(*) *Voyez* le mémoire qui a pour titre : *Des propriétés polaires de quelques polyèdres*, et que j'ai publié pour la première fois dans la *Correspondance mathématique et physique des Pays-Bas*. Tome III, n° 4.

second ordre Σ et Σ', telles qu'elles soient toutes deux enveloppées par un même cône Δ.

Pour cela, prenons la *fig.* 300, et concevons par le point q une droite S de direction arbitraire dans l'espace.

Menons par la droite S et chacun des points b, b_1, b', b_1', en lesquels la droite Q perce les sections coniques C et C′ des plans (S, b), (S, b_1), (S, b'), (S, b_1').

Cela fait, menons par la droite S et la droite P un plan (S, P), et traçons dans ce plan une section conique ε coupant la courbe C aux points e et e_1.

Concevons le cône Δ ayant le point p pour sommet, et la section conique ε pour base ou directrice.

Cela posé :

Nous pourrons faire tourner la courbe C autour de la droite Q, de manière à ce qu'en variant de *forme*, elle s'appuie sur la courbe ε, et soit tangente en les points *fixes* b et b_1 aux plans (S, b) et (S, b_1). Nous savons que par ce mode de *génération* ou de *construction*, on obtient une surface du second ordre Σ, tangente au cône Δ suivant la courbe plane ε.

Cela posé :

Coupons le cône Δ par le plan (S, P′), nous aurons une section conique ε', et en faisant tourner la courbe C′ autour de la droite R, de manière à ce qu'en changeant de *forme*, elle s'appuie sur la courbe ε' et soit tangente en les points *fixes* b' et b_1' aux deux plans (S, b') et (S, b_1'), on obtiendra une seconde surface du second ordre Σ' tangente au cône Δ suivant la courbe plane ε'.

On voit de suite que les droites S et Q sont *polaires réciproques*, et pour la surface Σ et pour la surface Σ', en sorte que ces deux surfaces ont en commun un *système* de polaires réciproques.

Il est facile de voir que, lorsque l'on considère les deux surfaces Σ et Σ', et non plus seulement les deux courbes C et C′, le point q est remplacé par la droite S et que les droites P, P′, P_1, P_1', R, R′, sont remplacées par les plans $\overline{(S, P)}$, $\overline{(S, P')}$, (S, P_1), (S, P_1'), (S, R), (S, R′), et que les cordes de contact $\overline{ee_1}$, $\overline{e'e_1'}$, $\overline{ii_1}$, $\overline{i'i_1'}$, sont remplacées par des courbes planes ε, ε', J, J′, qui sont respectivement les courbes de contact des surfaces Σ et Σ' et du cône Δ ayant son sommet au point p, et du cône Δ' ayant son sommet au point p'.

Lorsque les courbes C et C′ se coupent en deux points comme dans la *fig.* 312, elles donneront naissance à deux surfaces du second ordre Σ et Σ' se coupant suivant une courbe plane dont le plan sera (S, I), et ces deux surfaces seront enveloppées par un cône Δ ayant son sommet au point p.

Lorsque les courbes C et C′ se coupent en quatre points, comme dans la *fig.* 308 *bis*, elles donneront naissance à deux surfaces du second ordre Σ et Σ', qui, pour être enveloppées par deux cônes, ayant l'un son sommet au point p'' et l'autre son sommet au point p''', devront se couper suivant deux courbes planes dont les plans passent par les diagonales bb' et aa' du quadrilatère inscrit; et, dans ce cas, la droite S devra passer par le point q' en lequel ces diagonales se croisent. Dès lors les courbes suivant lesquelles les deux surfaces Σ et Σ' s'entrecoupent, se coupent en deux points z et z' situés sur la droite S, et pour ces points z et z', les deux surfaces Σ et Σ' ont deux plans tangents communs, ou, en d'autres termes, les deux surfaces Σ et Σ' se touchent en ces deux points z et z'.

Lorsque les courbes C et C′ se coupent en deux points et se touchent en un point, comme dans la *fig.* 313, elles donneront naissance à deux surfaces du second ordre Σ et Σ', qui seront enveloppées par un seul cône ayant son sommet au point p, et ces deux surfaces se toucheront au point b_{ι} et se couperont suivant une courbe plane dont le plan passera par la corde $\overline{zz'}$.

On voit donc par ce qui précède, que lorsque deux surfaces du second ordre sont enveloppées par un cône, elles peuvent être :

1° Extérieures l'une à l'autre et n'avoir aucun point commun.

2° Extérieures l'une à l'autre et se toucher par un point.

3° Se couper suivant *une seule* courbe plane.

4° Se toucher en un point et se couper suivant une courbe plane.

6° Se couper suivant *deux* courbes planes se coupant en deux points, qui sont en même temps deux points de contact des surfaces.

Deux surfaces du second ordre peuvent se couper suivant des courbes planes, et cependant n'être point enveloppées par un cône; cela arrivera toutes les fois que les deux surfaces auront en commun un *système de polaires réciproques*.

Ainsi en considérant les *fig.* 310, ou 312, ou 314, les courbes C et C′ pourront donner naissance à deux surfaces du second ordre Σ et Σ' se coupant suivant deux courbes planes, et ne pouvant pas être cependant enveloppées par un même cône.

Mais les deux courbes planes ξ et ξ', suivant lesquelles s'entrecouperont les deux surfaces Σ et Σ', pourront être enveloppées par deux cônes dont la droite Z unissant les sommets de ces cônes sera (pour l'une et l'autre surface Σ et Σ') *la polaire réciproque* de la droite S suivant laquelle se coupent les plans des courbes ξ et ξ'.

608. Ce qui vient d'être énoncé ci-dessus nous permet de considérer les deux sections coniques C et C′ (ayant entre elles les relations de position indiquées par

les *fig.* 308 *bis*, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315 et 316), comme étant la section faite dans le système de deux surfaces du second ordre Σ et Σ' par un plan diamétral principal, commun à ces deux surfaces.

Et dès lors nous pourrons, dans toutes ces figures, comme nous allons le faire pour la *fig.* 308 *bis*, regarder les courbes (*sections coniques*) C et C', se coupant en quatre points a, a', b, b', comme appartenant à trois *systèmes* différents entre eux et composés chacun de deux surfaces du second ordre, ayant le plan de ces courbes C et C' pour plan diamétral principal commun.

Et en effet :

Nous pourrons : 1° concevoir deux surfaces du second ordre Σ et Σ' se coupant suivant deux courbes planes projetées orthogonalement suivant les côtés opposés *fig.* 308 *bis*, ab et $a'b'$ du quadrilatère inscrit. Ces deux courbes (ab) et $(a'b')$ seront enveloppées par deux cônes ayant pour sommets respectifs les points q' et q_1.

Nous pourrons : 2° concevoir deux surfaces du second ordre Σ_1 et Σ_1' se coupant suivant deux courbes planes projetées orthogonalement suivant les côtés opposés ab' et $a'b$ du quadrilatère inscrit; et les sommets des cônes enveloppant les courbes (ab') et $(a'b)$ seront les points q' et q.

Nous pourrons : 3° concevoir deux surfaces du second ordre Σ_2 et Σ_2' se coupant suivant deux courbes planes projetées orthogonalement suivant les diagonales bb' et aa' du quadrilatère inscrit, et les sommets des cônes enveloppant les courbes (bb') et (aa') seront les points q et q_1.

Ainsi, deux sections coniques tracées sur un plan, peuvent être considérées comme la projection orthogonale de deux sections planes d'un cône, et en même temps comme la section faite dans plusieurs systèmes, composés chacun de deux surfaces du second ordre, par un plan diamétral principal commun à chacun de ces systèmes. Dès lors les propriétés polaires de deux sections coniques tracées sur un plan, seront les projections sur ce plan des propriétés de relation de position, qui existent, soit entre les intersections planes de deux cônes du second ordre, soit entre les intersections planes des divers systèmes qui peuvent exister et qui seront composés chacun de deux surfaces du second ordre, ayant un même plan diamétral principal.

Des propriétés polaires qui peuvent exister entre trois sections coniques tracées sur un plan.

609. Pour trouver les propriétés polaires qui peuvent exister entre trois sections coniques tracées sur un plan, nous pourrons : 1° considérer deux

sections coniques C et C′ tracées sur un plan, pris pour plan horizontal de projection, comme étant les bases de deux cônes, savoir : la courbe C d'un cône Δ et la courbe C′ d'un cône Δ′, ces cônes Δ et Δ′ étant tels qu'ils aient deux plans tangents communs, ou un système commun de polaires réciproques ; dès lors ces deux cônes Δ et Δ′ se couperont suivant deux courbes planes C_1 et C_2, qui se projetteront horizontalement suivant deux sections coniques C_1^h et C_2^h ; et en projetant les relations de position qu'il sera facile d'étudier sur les deux cônes qui relient entre elles les courbes C, C′, C_1 et C_2, et les sommets *s* et *s′* de ces cônes, on pourra énoncer, sans difficulté aucune, toutes les propriétés polaires qui *lient* les courbes C et C′ avec l'une seulement, ou avec les deux courbes C_1^h et C_2^h.

On peut encore 2° considérer les relations de positions qui existent entre trois sections planes C, C′, C″, d'une surface du second ordre Σ, et les projeter sur un plan, et l'on déterminera facilement par ce moyen les propriétés polaires qui peuvent exister entre trois sections coniques C^h, C'^h, C''^h, tracées sur un plan (*).

Pour que le plan sur lequel sont tracées trois sections coniques C^h, C'^h, C''^h, *joue* par rapport à ces courbes le même rôle que la surface du second ordre Σ, sur laquelle se trouvent données trois sections planes C, C′, C″, il faut que les courbes C^h, C'^h, C''^h, soient *liées* l'une à l'autre par les *relations géométriques* qui existent forcément entre les courbes C, C′, C″, en vertu de ce que ces trois courbes C, C′, C″, sont les sections planes d'une surface du second ordre.

Or j'ai démontré le premier, et par la *Géométrie descriptive*, en 1814, dans le tome III, n° Ier de la *Correspondance de l'école polytechnique*, publiée par Hachette, que si l'on avait, sur une surface du second ordre Σ, trois sections planes C, C′, C″, telles qu'elles puissent être enveloppées deux à deux par un cône, ces trois courbes pourraient dès lors être enveloppées par six cônes dont les sommets seraient distribués trois à trois sur quatre droites situées dans un même plan.

Ce système de l'espace étant projeté sur un plan P, nous donnera pour condition à exister entre trois sections coniques C^h, C'^h, C''^h, tracées sur ce plan P et pour que ce plan P *joue* par rapport à ces courbes le *rôle* d'une surface de second ordre, la condition suivante, savoir : que les trois points en lesquels se coupent

---

(*) *Voyez* dans la *Correspondance de mathémathiques et de physique des Pays-Bas*, les mémoires dans lesquels je me suis occupé *des relations polaires qui existent entre les trois sections planes d'une surface du second ordre*, et *des relations polaires qui existent entre les huit sections coniques tangentes à trois sections planes d'une surface du second ordre.*

deux à deux les tangentes, *extérieures*, menées à ces courbes combinées deux à deux, soient en ligne droite.

Lorsque cette condition sera remplie, les trois courbes C^k, C'^k, C''^k, jouiront de *propriétés polaires* qui seront les *projections* des relations de position, reconnues exister entre trois sections planes d'une surface du second ordre.

610. Nous ferons observer en terminant ce chapitre, qu'il existe une corrélation remarquable entre les propriétés *polaires* des sections coniques et les propriétés des *transversales*, corrélation facile à saisir, en vertu du mode de *recherche* et de démonstration que nous avons employé, savoir : celui des *projections*. Et en effet, on doit se rappeler que, dans la première partie de cet ouvrage, nous avons considéré les transversales comme la projection d'un système de droites de l'espace, données par les intersections de divers plans ayant entre eux certaines relations de position, et nous avons fait voir que les *propriétés des transversales* se déduisaient en définitive de la solution *graphique* du problème de l'intersection de deux plans.

Et par ce qui précède on voit : 1° que les *propriétés polaires* de deux sections coniques tracées sur un plan, se déduisent en définitive de la solution *graphique* du problème de la section faite dans un cône du second ordre par un plan ; et 2° que les *propriétés polaires* de trois sections coniques tracées sur un plan, se déduisent aussi en définitive de la solution *graphique* du problème de l'intersection de deux cônes du second ordre, s'entrecoupant suivant deux courbes planes.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

ADDITIONS

AU

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

OUVRAGES SUR LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PUBLIÉS

PAR M. THÉODORE OLIVIER.



I. **COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE** (1844) :

PREMIÈRE PARTIE. Du point, de la droite et du plan ; in-4 de 325 pages, avec un atlas de 42 pl. in-4.

DEUXIÈME PARTIE. Des courbes et des surfaces, et en particulier des courbes et des surfaces du 2e ordre; in-4 de 400 pages , avec un atlas de 54 pl. in-4.

II. **ADDITIONS AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE** (1847) : Démonstration nouvelle des propriétés principales des sections coniques; in-4 de 400 pages, avec un atlas de 15 pl. in-4.

III. **DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE** (1843); in-4 de 460 pages, avec un atlas in-4 de 27 pl.

IV. **COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE** (1845), in-4 de 472 pages, avec un atlas de 58 pl. in-folio.

V. **APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE** aux ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux engrenages (1846) ; in-4 de 415 pages, avec un atlas de 58 pl. in-folio.

VI. **THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES ENGRENAGES** destinés à transmettre le mouvement de rotation uniforme entre deux axes situés ou non situés dans un même plan (1842); in-4 de 125 pages, avec 4 pl. dont une in-folio.

PARIS. — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, n° 28, près de l'Odéon.

ADDITIONS

AU

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

DÉMONSTRATION NOUVELLE

DES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES SECTIONS CONIQUES.

Par M. THÉODORE OLIVIER,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET ANCIEN OFFICIER D'ARTILLERIE; DOCTEUR ÈS SCIENCES DE LA FACULTÉ DE PARIS;
ANCIEN PROFESSEUR ADJOINT DE L'ÉCOLE D'APPLICATION DE L'ARTILLERIE ET DU GÉNIE MILITAIRE A METZ;
ANCIEN RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE;
PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE AU CONSERVATOIRE ROYAL DES ARTS ET MÉTIERS;
PROFESSEUR-FONDATEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES;
MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ PHILOMATHIQUE DE PARIS ET CENSEUR DE LA SOCIÉTÉ D'ENCOURAGEMENT POUR L'INDUSTRIE NATIONALE;
MEMBRE ÉTRANGER DES DEUX ACADÉMIES ROYALES DES SCIENCES ET DES SCIENCES MILITAIRES DE STOCKHOLM;
MEMBRE CORRESPONDANT DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE ET DE LA SOCIÉTÉ ROYALE D'AGRICULTURE ET ARTS UTILES DE LYON;
DES ACADÉMIES DE METZ, DIJON ET LYON;
OFFICIER DE LA LÉGION D'HONNEUR ET CHEVALIER DE L'ORDRE ROYAL DE L'ÉTOILE POLAIRE DE SUÈDE.

PARIS.

CARILIAN-GŒURY ET Vve DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n°s 39 et 41.

1847

PRÉFACE.

Dans ce nouvel ouvrage sur la géométrie descriptive, que je livre à l'examen de ceux qui aiment et cultivent avec intérêt la science de l'espace figuré, je me suis proposé deux buts que j'exposerai un peu plus loin.

Ainsi qu'on le sait, j'ai appuyé, dans le *Cours de géométrie descriptive* publié en 1844, toutes les propriétés des sections coniques sur les théorèmes que l'on doit à MM. Quetelet et Dandelin (*); ces théorèmes sont relatifs aux *foyers*, à la *tangente* et aux *focales*.

Les démonstrations données par les deux savants géomètres de Belgique sont d'autant plus remarquables, qu'outre leur simplicité et la facilité avec laquelle les trois sections coniques se trouvent soumises à un même mode de *recherche géométrique*, elles sont comme un *reflet* de la géométrie *antique*. Et en effet, il est impossible de ne pas se dire, après avoir lu leurs mémoires imprimés dans les Actes de l'académie de Bruxelles, que les géomètres anciens auraient pu dire tout ce qu'ils ont dit, attendu que les anciens géomètres savaient et connaissaient parfaitement bien tous les théorèmes qui conduisent MM. Quetelet et Dandelin à démontrer, ainsi qu'ils l'ont fait :

1° Que la sphère inscrite à un cône droit (ou de révolution) et à un plan sécant touche ce plan en le foyer de la conique, section faite dans le cône par ce plan ; ou, en d'autres termes et par déduction, que pour une section conique à deux foyers la somme ou la différence des rayons vecteurs est constante;

2° La propriété des directrices, propriété qui appartient aux trois courbes, en remarquant que la parabole n'a qu'une seule directrice;

(*) Nous sommes dans l'habitude de désigner ces théorèmes sous le nom de théorèmes de MM. Quetelet et Dandelin; mais il ne faut pas oublier que c'est à M. Dandelin que l'on doit le théorème des *foyers* et des *tangentes* ; un peu plus tard M. Quetelet démontra la propriété des *focales*, en se servant de la sphère inscrite au cône droit et au plan sécant, mode de démonstration que l'on doit à M. Dandelin.

Je viens d'apprendre la mort de M. Dandelin; c'est une perte bien regrettable pour la géométrie qu'il cultivait avec un grand talent. M. Dandelin, colonel du génie belge et membre de l'académie royale des science de Bruxelles, est décédé en mars 1847.

3° La propriété dont jouit la tangente à une section conique, savoir qu'elle divise en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs;

4° L'existence des courbes *focales* et les propriétés géométriques dont elles jouissent.

Car toutes ces propriétés fondamentales des sections coniques sont démontrées par MM. Quetelet et Dandelin, en s'appuyant sur ce que :

1° Un cône droit est tangent à une sphère suivant un cercle;

2° Un plan tangent en un point d'une sphère contient les tangentes à tous les cercles, grands ou petits, tracés sur la sphère et se croisant en ce point;

3° Les tangentes menées par un point extérieur à une sphère sont égales; et les tangentes menées à un cercle et par un point pris sur le plan de ce cercle sont égales;

4° Le plan tangent à un cône de révolution, suivant une génératrice droite, contient les tangentes aux courbes *planes* tracées sur le cône et se coupant en un point de la génératrice de contact.

Cette dernière propriété n° 4 était connue des géomètres grecs, mais ils ne s'en sont point servis dans leurs recherches géométriques, tandis que les géomètres modernes ont fait un emploi fréquent du plan tangent; et nous devons aussitôt ajouter à ce qui précède : la propriété du plan tangent en un point d'un cône était connue des géomètres avant l'invention admirable due à Descartes, et ainsi avant l'application de l'algèbre, ou de l'*analyse*, à la géométrie; quelques géomètres s'en sont servis dans leurs recherches; mais ce n'est qu'après Descartes, et en se servant de l'analyse *infinitésimale* appliquée à la géométrie, que l'on a démontré que le plan tangent en un point d'une surface quelconque, contenait les tangentes à toutes les courbes qui, tracées sur cette surface, se croisent au point considéré (*), et c'est depuis cette époque que l'emploi du plan tangent est devenu familier dans les recherches géométriques.

(*) 1° Les anciens géomètres devaient savoir que le plan tangent contenait les tangentes à tous les cercles qui, tracés sur la surface d'une sphère, se croisaient en un point.

Et en effet, les anciens géomètres disaient :

La tangente en un point du cercle est perpendiculaire au rayon passant par ce point;

Le plan tangent en un point d'une sphère est perpendiculaire au rayon passant par ce point.

Et ils démontraient que la tangente au cercle et le plan tangent à la sphère, définis ainsi qu'on vient de le dire, étaient tels que la tangente et le cercle, que le plan tangent et la sphère, n'avaient qu'un seul point en commun, qu'ils appelaient point de contact; et ils démontraient que telle était la relation de position entre le cercle et sa tangente, entre la sphère et son plan tangent en un point m, en démontrant que si l'on menait par le centre o du cercle ou de la sphère, une oblique au rayon $\overline{om}$, et coupant le cercle en un point x et sa tangente en un point y, ou coupant la sphère en un point x et son plan tangent en un point y, on avait toujours : $\overline{ox} < \overline{oy}$.

De cette proposition, les anciens géomètres pouvaient très-facilement arriver à la conséquence suivante,

Ainsi, nous pouvons dire que les géomètres anciens, et surtout ceux qui vivaient du temps de DESCARTES, auraient pu donner les démonstrations géométriques que nous devons à MM. Quetelet et Dandelin, et dès lors nous avons pu dire en toute vérité que ces démonstrations étaient comme un *reflet* de la géométrie antique, *reflet* vraiment remarquable.

Toutefois, les solutions géométriques de MM. Quetelet et Dandelin ne me satisfaisaient pas, parce qu'elles n'étaient pas dans l'esprit de la géométrie descriptive, qui seule mérite le nom de *géométrie moderne*.

Lorsque je me proposai d'écrire sur la géométrie descriptive, avec des *vues* que je puis dire nouvelles, quoiqu'elles ne fussent réellement que la continuation de

---

savoir : que si par un point m d'une sphère S on faisait passer un plan tangent T et une suite de plans sécants P, P', P'',... coupant la sphère S suivant des cercles C, C', C'',... et le plan T suivant des droites θ, θ', θ'',... les droites θ, θ', θ'',... étaient respectivement tangentes en le point m aux cercles C, C', C'',... car ils savaient que si du centre o de la sphère S on abaissait des perpendiculaires R, R', R'',... sur les plans P, P', P'',... ces normales perçaient ces plans en des points r, r', r'',... qui étaient les centres respectifs des cercles C, C', C'',... et que les droites θ, θ', θ'',... étaient respectivement perpendiculaires aux plans (m, R), (m, R'), (m, R''),... en sorte que les droites θ, θ', θ'',... étaient respectivement perpendiculaires aux rayons $\overline{mr}$, $\overline{mr'}$, $\overline{mr''}$,... des cercles C, C', C'',... et que dès lors ces droites θ, θ', θ'',... étaient les tangentes respectives des cercles C, C', C'',... pour le point m.

2° D'après le mode de démonstration alors adopté, les anciens géomètres pouvaient démontrer très-facilement que le plan tangent T en un point m d'un cône droit Δ ou d'un cône oblique Δ' à base circulaire, contenait les tangentes à toutes les courbes planes qui, tracées sur ce cône Δ ou Δ', se croisaient au point m.

Et en effet :

Désignant par C le cercle base du cône droit Δ ou du cône oblique Δ', par s le sommet de ce cône, on savait que tout plan X parallèle à la base coupait le cône suivant un cercle δ; par conséquent faisant passer le plan X par le point m, on avait pour section dans l'un ou l'autre cône un cercle δ, et l'on savait que la droite qui unissait le sommet s du cône et le centre o du cercle base C, coupait le plan X en un point d, centre du cercle δ.

Dès lors, menant par le sommet s et le point m une droite, on avait une génératrice droite du cône Δ ou Δ', laquelle coupait le cercle base C en un point n, et les rayons $\overline{on}$ et $\overline{dm}$ des cercles C et δ étaient évidemment parallèles; dès lors les tangentes t en n au cercle C et θ en m au cercle δ étaient parallèles; dès lors les trois droites t, θ et $\overline{sm}$ étaient dans un même plan T, qui était dit plan tangent en m au cône Δ ou Δ'.

Cela dit :

Si le plan T coupait par hasard le cône Δ ou Δ' en d'autres points que ceux situés sur la génératrice droite $\overline{sm}$, dite génératrice de contact, en désignant ce point par x, on pouvait mener par ce point x un plan Y parallèle au plan X et coupant le cône Δ ou Δ' suivant un cercle δ', et la génératrice $\overline{sm}$ en un point m' et le plan T suivant une droite θ', et la droite $\overline{so}$ en un point d', centre du cercle δ'; par conséquent, la droise θ' étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon $\overline{d'm'}$ du cercle δ', ne pouvait couper ce cercle en un point x autre que le point m'.

Cela posé :

Menant par le point m un plan oblique quelconque Σ, il coupait le cône Δ ou Δ' suivant une conique c, et le plan T suivant une droite λ qui, d'après ce qui précède, ne pouvait avoir en commun avec

celles de Monge, fondateur de cette science (*), je dis en 1831 à M. Quetelet, que je *baserais* toutes les recherches touchant les propriétés géométriques des sections coniques et des surfaces du second ordre sur les *théorèmes belges*, c'est-à-dire sur le mode de démonstration employé par lui et M. Dandelin (mon ancien camarade à l'École polytechnique), pour la *manifestation* des propriétés principales des sections coniques.

C'est ainsi que j'ai procédé dans la rédaction de l'ouvrage que j'ai publié sous le titre : *Cours de géométrie descriptive*.

Mais tout homme impartial reconnaîtra sans peine, qu'à part les théorèmes relatifs aux *foyers*, à la *tangente* (divisant l'angle des deux rayons vecteurs en deux

---

la courbe C d'autres points que le point m, et d'après la définition adoptée la droite λ était bien la *tangente* au point m à la conique C.

Mais, en partant de la définition de la tangente, savoir : que c'était une droite qui n'avait en commun avec une courbe qu'un seul point, les anciens géomètres pouvaient bien démontrer le théorème relatif au plan tangent en un point d'une sphère et en un point d'un cône droit ou d'un cône oblique à base circulaire, tant qu'ils ne considéraient que des courbes planes tracées sur ces surfaces; mais ils ne pouvaient pas démontrer que le plan tangent contenait les tangentes à toutes les courbes à double courbure tracées sur les surfaces coniques et sphériques et se croisant au point de contact; et à plus forte raison ils ignoraient que cette propriété du plan tangent existait pour toutes les surfaces, quel que fût leur mode de génération.

Pour arriver à la démonstration du théorème général énoncé ci-dessus, il fallait que la géométrie entrât dans une voie nouvelle et fût amenée à considérer une courbe comme étant la limite d'un polygone, dont les côtés pouvaient devenir *indéfiniment* petits; en sorte que l'on pouvait, dans les recherches géométriques, remplacer et rigoureusement une courbe par un polygone d'un nombre infini de côtés, chaque côté étant infiniment petit, ce polygone prenant le nom de polygone infinitésimal.

Si les géomètres anciens ont quelquefois employé les considérations de *l'espace* pour résoudre certains *problèmes-plans*, et ainsi, si pour résoudre un problème relatif à des lignes tracées sur un plan, ils ont considéré un système de lignes qui, situées dans l'espace, donnaient pour projection le système plan proposé, ils n'ont jamais employé la considération du plan tangent, parce qu'à ce sujet leurs connaissances géométriques étaient très-bornées; c'est ainsi qu'Archimède vit bien que sa spirale était la projection sur un plan de la spirale à double courbure, qui était l'intersection d'un cône droit et d'un filet de vis carrée, mais il ne put pas, et ne pouvait pas, trouver la construction de la tangente en un point de sa courbe plane, en la déduisant de la construction de la tangente en un point de la courbe à double courbure, parce que s'il connaissait le plan tangent en un point du cône droit, il ignorait la construction du plan tangent en un point de la surface gauche.

(*) Je puis dire que mes *vues* en géométrie descriptive étaient nouvelles, car tous les savants qui ont écrit après Monge sur cette science, ont toujours considéré la géométrie descriptive comme n'étant propre qu'à construire les *résultats géométriques* donnés par l'*analyse*; donnés par la géométrie des anciens, ou donnés par la méthode de l'involution de six points (propriétés géométriques très-restreintes, très-limitées, puisqu'elles ne peuvent s'appliquer qu'aux sections coniques), cette méthode est due à Desargues (citoyen lyonnais); après lui Carnot en fit de très-remarquables applications; ou donnés par la méthode plus générale, dite : *des proportions harmoniques*, employée par Lahire et dont plusieurs géomètres se sont servis avec succès dans ces derniers temps.

parties égales), aux *directrices* et aux *focales*, toutes les autres propriétés des courbes du second ordre, et en général toutes les recherches géométriques touchant les autres courbes et les surfaces diverses dont on a étudié les propriétés dans l'ouvrage dont il s'agit, sont établies d'après les vrais principes de la géométrie descriptive, tels que Monge nous les a enseignés, principes qui sont *tout autres* que ceux enseignés par les géomètres anciens.

Car si l'on veut réfléchir un instant sur les méthodes des anciens géomètres, on verra bientôt qu'elles s'appliquaient essentiellement aux problèmes de *relations métriques;* les anciens n'avaient pas compris et n'avaient pas connu la science des *relations de position;* or cette science est précisément celle que Monge a nommée *géométrie descriptive*. La géométrie des relations de position est due aux géomètres modernes, et c'est celle que j'ai désignée ci-dessus par le nom de *géométrie moderne* (*).

Et lorsque je dis que les anciens géomètres n'avaient pas connu la géométrie descriptive, je ne veux pas dire qu'ils n'ont jamais employé des méthodes analogues à celles de la géométrie descriptive pour la solution de certains problèmes traités par eux. Mais autre chose est d'employer une méthode particulière pour la solution de quelques problèmes du même genre, et autre chose est de faire de cette méthode un moyen de recherche pour un grand nombre de questions géométriques, et surtout de déterminer les genres de questions géométriques qui sont du domaine de cette méthode.

Or c'est ce que Monge a fait, et personne ne peut le nier; personne ne peut mettre en doute que Monge ne comprît parfaitement la puissance de sa méthode géométrique, la *méthode des projections*, quoiqu'il n'ait pas publié tout ce qu'il lui devait pour les recherches qu'il nous a données sous une autre forme dans son grand ouvrage sur l'analyse appliquée à la géométrie; car Monge dit positivement, dans l'ouvrage qui a pour titre : *Développements sur l'enseignement adopté pour l'école centrale des travaux publics*, et qui a été imprimé par ordre du comité de salut public:

« *De la géométrie descriptive.*

» La géométrie descriptive est une langue nécessaire et commune à l'homme de
» génie qui conçoit un projet, aux artistes qui doivent en diriger l'exécution, et
» aux ouvriers qui doivent l'exécuter. Cette langue, susceptible de précision, a
» encore l'avantage d'être un moyen de rechercher la vérité et d'arriver à des ré-
» sultats inconnus; comme toutes les autres langues, elle ne peut devenir familière

(*) Les Allemands donnent à la géométrie descriptive le nom de *géométrie française*. Pour eux, la connaissance complète de cette science date de 1815.

» que par l'usage habituel ; ainsi, pendant les trois années que durera le cours » d'instruction dans l'école centrale des travaux publics, les élèves la pratiqueront » continuellement. »

Ainsi, on ne peut nier que MONGE ne regardât la *méthode des projections*, en un mot la *géométrie descriptive* (*), comme pouvant conduire à la découverte et à la démonstration de vérités géométriques nouvelles.

Mais écoutons ce que dit CARNOT dans son rapport (**) lu le 23 mars 1812, à la classe des sciences physiques et mathématiques de l'Institut, sur l'ouvrage de HACHETTE, ayant pour titre : *Supplément à la géométrie descriptive de* MONGE.

« Le but de la géométrie descriptive est de représenter sur des surfaces planes » qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois, et réciproquement » de retrouver la forme de ces objets à trois dimensions, d'après les dessins qui les » représentent sur ces surfaces planes.

» Le moyen qu'on emploie pour y parvenir consiste à faire sur ces plans les » projections des corps proposés.

» La science des projections, en général, se divise en deux branches, dont l'une » est l'exécution raisonnée mais purement graphique de ces projections, et l'autre » est leur théorie purement analytique.

» Quoique ces deux branches de la même science ne soient, à proprement » parler, que deux méthodes différentes de traiter les mêmes questions, leurs pro» cédés respectifs ont entre eux si peu d'analogie apparente, que l'identité constante » de leurs résultats forme des rapprochements continuels dont on ne peut s'em» pêcher d'être frappé. On admire la correspondance intime de deux sciences qui » vont toujours d'un pas égal, dont l'une, n'employant jamais le calcul, semble » être entièrement du domaine de l'imagination, et dont l'autre, ne tirant du fond » de la question que les données strictement nécessaires pour l'expression algé» brique des conditions proposées, laisse ensuite à l'analyse la plus abstraite, la » plus dégagée de toute autre considération, le soin de dénouer successivement » toutes les difficultés, et de ramener enfin aux résultats les plus élémentaires que » puisse comporter la nature de la question.

» Cet accord imperturbable de ce que l'analyse a de plus transcendant avec ce » que la synthèse offre de plus simple et cependant de plus subtil, donne la satis-

---

(*) Dans les *Développements sur l'enseignement*, adopté pour l'École centrale des travaux publics, MONGE a dit encore : *L'art de décrire les formes et les positions des objets, consiste à exprimer d'une manière complète, sur des dessins qui n'ont que deux dimensions, les objet qui en ont trois. Parmi ces objets, les uns ont des formes susceptibles d'une définition rigoureuse; les procédés pour les décrire sont soumis à des règles certaines, et composent ce qu'on peut appeler la* GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

(**) Imprimé dans la Correspondance de l'École polytechnique, tome III, page 234.

» faction de voir deux théories, si disparates au premier aspect, se confirmer cependant l'une par l'autre, s'expliquer, se généraliser réciproquement ; l'une, en un mot, former des tableaux qui parlent aux yeux, tandis que l'autre s'occupe à les décrire aussi fidèlement qu'exactement dans la langue qui lui est propre. »

Peut-il rester, après avoir lu ces pages écrites par Monge et par Carnot, le moindre doute dans l'esprit de tout homme de bonne foi ?

Oui, Monge et Carnot ont tous deux regardé la géométrie descriptive comme une science, et comme une science d'une utilité incontestable; oui, Monge et Carnot, ont tous deux pensé que la méthode des projections pouvait conduire à rechercher et à démontrer des vérités géométriques encore inconnues.

Depuis 1815, Monge et Carnot étant tous les deux proscrits, tous les deux exilés de l'*Institut de France*, de cette France, leur patrie, qu'ils avaient tous deux si bien servie, la puissance de la méthode des projections et l'utilité comme science de la géométrie descriptive ont été méconnues et niées ; mais il faut le dire, ce fut par des hommes très-savants, sans nul doute, mais, qui n'avaient point passé par les services publics, qui n'avaient point été ingénieurs, ou qui n'avaient fait que traverser l'École des ponts et chaussées et celle des mines, pour s'adonner tout entiers à l'étude purement philosophique, purement spéculatrice des sciences, et qui dès lors ont dédaigné la science qui offre des contacts si multipliés avec la *pratique*, avec l'art de l'ingénieur.

Aussi, ne doit-on pas être surpris que M. Chasles, nommé en 1846 professeur de *géométrie supérieure* à la faculté des sciences de Paris, s'exprime dans son discours d'ouverture, ainsi qu'il l'a fait ; il dit (*) :

« Mais il ne faut pas perdre de vue que, dans toutes ces questions, la géométrie » descriptive n'est toujours qu'un instrument dont l'ingénieur se sert pour traduire » sa pensée et exécuter sur le papier les opérations que la science, je veux dire la » géométrie générale, lui indique. La géométrie descriptive exécute, mais elle ne » crée pas. Si elle montre aux yeux la courbe d'intersection de deux surfaces, elle » n'en fait point connaître les propriétés ; elle ne saurait indiquer, mathématiquement parlant, si cette courbe est plane ou à double courbure. Elle n'a point de » méthodes pour ces recherches, qui sont exclusivement du domaine de la géométrie rationnelle (**). »

Ainsi, nous en sommes revenus, en 1846, à l'*art des projections*, qui écrit *graphiquement* des résultats géométriques obtenus par la géométrie rationnelle.

(*) Voyez le *Journal des mathématiques pures et appliquées*, publié par M. Liouville, tome XII, pages 1 et suiv. (n° de janvier 1847).

(**) Voyez à la fin de cet ouvrage l'addition, n° 4.

Ainsi, nous revenons au point d'où est parti MONGE; et, en 1846, tous les travaux de MONGE sont oubliés, ils sont comme non avenus; bien plus, gardons-nous de considérer la géométrie descriptive, comme une méthode de recherches, c'est une grave erreur que, depuis 1815 jusqu'en 1846, les savants en géométrie rationnelle n'ont jamais pardonnée!

Mais pour certains savants, ainsi qu'il y a une *géométrie rationnelle*, il y a une *mécanique rationnelle;* et si l'on veut bien y réfléchir un moment, on reconnaîtra sans peine que ce que l'on appelle aujourd'hui géométrie et mécanique rationnelles, n'est autre chose que l'emploi de l'*analyse* à la recherche des propriétés géométriques des surfaces, et à la démonstration des principes de la mécanique.

Mais, quoi qu'on en dise, on reviendra par la force de la vérité à reconnaître que l'*analyse* n'est qu'un *outil* de recherche; mais bien plus, c'est une *langue* au moyen de laquelle l'*idée* que l'on conçoit devient saisissable par l'intelligence de ceux qui nous entourent, de telle manière qu'ils conçoivent l'*idée* d'autrui, comme s'ils l'avaient eux-mêmes conçue les premiers.

L'*analyse* peut aussi être considérée comme une *méthode*, mais elle n'est pas la seule méthode que l'homme puisse employer à la recherche des vérités géométriques ou mécaniques.

Comme tout ce qui vient de l'homme, l'*analyse* a ses bornes, ses limites, ses avantages, ses inconvénients; si elle a une grande puissance, elle a aussi sa part de faiblesse; parfaite en certains points, elle est imparfaite en d'autres.

Toutes les autres méthodes en sont là.

Pour certaines recherches, certaines méthodes sont préférables à d'autres; choisir entre les méthodes, suivant le problème à résoudre, voilà le point important; c'est ce choix judicieux qui montre l'intelligence du philosophe (en donnant à ce nom de *philosophe* son acception antique, *homme qui cherche la vérité dans l'intérêt de l'humanité, sans orgueil et sans vanité, n'ayant d'autre ambition que celle d'être utile*).

L'homme ne crée aucunes vérités géométriques, elles préexistent toutes.

Lorsque l'on engendre une surface par le mouvement d'une courbe, cette surface jouit immédiatement de certaines propriétés géométriques qui dérivent de la nature géométrique de la courbe génératrice et de la loi mécanique du mouvement imprimé à cette courbe génératrice (que cette courbe reste constante de forme, ou varie de forme à chaque instant de son mouvement, la loi des variations de la forme géométrique de cette courbe génératrice étant liée à la loi mécanique de son mouvement dans l'espace).

Toutes les propriétés géométriques de la surface ainsi engendrée sont *implicites*. Le géomètre parvient à rendre ces propriétés *explicites*, en se servant de ce qu'on

appelle *méthode de recherche*. Les *méthodes* sont des *outils* dont se sert le *raisonnement* géométrique pour l'aider dans la découverte des vérités cachées.

Les méthodes ne créent *rien*, elles mettent dans la *lumière ;* elles nous aident à *voir* les choses telles qu'elles sont réellement, et à *démontrer* que ce que nous disons *être* est bien réellement ce qui *est*.

Mais pour qu'une *vérité* trouvée, découverte par un homme, puisse être utile à tous, il faut qu'elle puisse être comprise par tous ; il faut donc un moyen de transmission des idées, de l'intelligence d'un homme à celle d'un autre homme ; cette *transmission* s'opère au moyen des *langues*.

C'est ainsi que pour la transmission d'homme à homme des *idées* géométriques, nous avons deux langues distinctes, la *géométrie algébrique* et la *géométrie descriptive*. La première emploie des *symboles*, qu'elle combine entre eux suivant des règles certaines ; la seconde emploie des *lignes*, qu'elle trace aussi suivant des règles certaines ; ces *règles* sont exactes, parce qu'elles sont établies par le *raisonnement*, en vertu de déductions successives et logiques fondées sur la *nature* des choses.

Ces deux *langues* sont *basées* sur des principes différents ; la langue *algébrique* a pour principe fondamental, l'*arithmétique*, c'est-à-dire le *nombre ;* et aussi s'applique-t-elle en géométrie à la solution des problèmes de *relations métriques*. La langue *graphique* a pour principe fondamental la *forme*, et aussi s'applique-t-elle, en géométrie, à la solution des problèmes de *relations de position*.

Comme toutes les *langues* dont la *formation* dérive de principes différents, ces deux langues *algébrique* et *graphique* ont des puissances et une fécondité différentes ; elles demandent aussi à être employées, maniées par le géomètre d'une manière différente, car leur *esprit* ou *génie* est différent, puisque les principes qui leur ont donné naissance sont différents (*).

Mais pour bien savoir, pour bien parler une langue, pour qu'elle vous soit *familière*, comme le dit Monge, il faut plusieurs années d'études et de pratique.

Et dès lors comment des géomètres peuvent-ils se prononcer sur la géométrie descriptive, et sans craindre d'errer, lorsqu'ils en connaissent seulement les premiers éléments !

Une pratique constante peut seule nous faire découvrir toutes les ressources scientifiques que possède la géométrie descriptive. Si un homme qui aurait appris dans sa jeunesse quelques phrases de la langue allemande, et qui ne l'aurait point pratiquée depuis, voulait plus tard discuter sur le *génie* de cette langue et examiner si elle est plus ou moins *poétique* que telle ou telle autre langue, ne lui

---

(*) N'est-on pas dans l'habitude de dire : le *génie* d'une langue, — le *génie* de ces deux langues est différent, — ne pas confondre le *génie* d'une langue avec celui d'une autre langue.

dirait-on pas : apprenez et étudiez la *langue allemande* avant d'en parler si au long ?

La géométrie descriptive, comme *méthode*, nous permet de trouver des propriétés géométriques nouvelles (ou inconnues jusqu'alors) ; comme *langue*, elle nous permet d'*écrire* et de transmettre ainsi aux *ingénieurs* des *vérités* géométriques, et de les mettre à même de les vérifier et de s'en servir ; en un mot de les utiliser dans leurs *travaux* sur le terrain.

La *géométrie descriptive* procède ainsi qu'il suit :

Étant donné un *système* dans l'espace, on le projette sur deux plans ; ces projections sont construites rigoureusement, exactement, en sorte que les *lignes* qui composent une projection sont entre elles en des positions rigoureuses, exactes. En regardant avec attention l'une et l'autre projection, on peut parvenir à déterminer les relations de position, rigoureuses, exactes, des diverses lignes qui composent le système de l'espace.

On peut donc affirmer que les lignes du système de l'espace ont entre elles telles ou telles relations de position.

En énonçant, en langage ordinaire, ces relations de position, on dicte des *théorèmes*.

Ainsi, c'est en *lisant* les projections d'un système situé dans l'espace, comme on lit *des équations*, qu'on découvre les propriétés géométriques écrites *graphiquement* sur l'*épure*, et que par suite on arrive à découvrir, d'une manière certaine, les propriétés géométriques qui subsistent, qui existent dans ce système de l'espace ; et il me semble que cette marche conduit bien à une démonstration réelle, positive, d'une *vérité* inconnue et que recélait le système donné dans l'espace.

Ainsi, l'on ne peut mettre en doute que cette manière de procéder, que cette *méthode*, qui constitue ce que l'on appelle la *géométrie descriptive*, ou la *science des projections*, ne conduise à la découverte d'une vérité géométrique inconnue ; car faire voir qu'une chose *est* telle qu'on le dit et non pas autrement qu'on le dit, n'est-ce pas démontrer que cette chose *est* ; en d'autres termes, n'est-ce pas démontrer des *théorèmes* de géométrie ?

J'ai dit ci-dessus qu'on lisait une *épure* comme on lisait des pages d'*analyse*, des pages remplies de formules algébriques ; entrons à ce sujet dans quelques détails.

Lorsqu'on emploie l'*analyse* à la recherche des propriétés géométriques, on ne fait pas autre chose pour mettre le problème en *équation* que d'écrire les *équations* des lignes qui sont les projections sur trois plans des lignes situées dans l'espace.

On combine entre elles ces *équations* d'après les règles *algébriques*, et l'on obtient en définitive des *formules algébriques* qui expriment la *solution* du problème ; et en traduisant en langage ordinaire la solution écrite dans ces formules, on énonce la *solution* du problème proposé, ou la *vérité* du théorème qui était à démontrer.

On *lit* donc des *équations* comme on lit une phrase écrite en telle ou telle langue, cette phrase exprimant une *idée*.

Lorsqu'on emploie la *géométrie descriptive* à la recherche des propriétés géométriques, on ne fait pas autre chose pour établir les *données* du problème que de tracer sur l'*épure* les lignes qui sont, sur les deux plans de projection, les projections horizontales et verticales des lignes situées dans l'espace.

On combine entre elles ces *lignes-projections* d'après les règles *graphiques* (les règles de la géométrie descriptive), et l'on obtient en définitive des *figures graphiques* qui expriment la solution du problème; et en traduisant en langage ordinaire les *relations* qui existent entre les diverses parties de ces figures, auxquelles on est arrivé en définitive, on énonce un *résultat* géométrique, on énonce un théorème; on lit donc une *figure*, une construction géométrique, comme on lit des équations, comme on lit des formules algébriques.

On voit donc bien que l'*esprit* du géomètre procède dans les deux cas de la même manière, et qu'il n'y a d'autres différences (et il ne peut évidemment y en avoir d'autres) que celles qui doivent provenir de l'*emploi* de deux langues différentes, savoir : la langue *algébrique* et la langue *graphique*.

Aussi LAGRANGE, écoutant une leçon de MONGE, a-t-il dit : *Je ne savais pas que je savais la géométrie descriptive.*

Les *analystes* de nos jours ont interprété cet aveu si *naïf* et si *profond* de LAGRANGE de la manière suivante :

*Tous ceux qui savent l'*ANALYSE *peuvent enseigner la géométrie descriptive.*

Et par suite ils ont ajouté :

La géométrie descriptive ne peut servir qu'à tracer graphiquement les résultats géométriques obtenus par l'analyse.

Je crois que ce n'est pas là ce que LAGRANGE pensait; je crois qu'il fut frappé de l'*unité* qui existait dans la manière de manifester les vérités de la géométrie à trois dimensions, d'intelligence à intelligence, d'homme à homme.

Je crois qu'il se replia en lui-même, et qu'il se dit intérieurement : *En toute vérité, le procédé des projections est le procédé fondamental dont le géomètre se sert, soit qu'il s'exprime dans la langue* ALGÉBRIQUE, *soit qu'il s'exprime dans la langue* GRAPHIQUE.

Ne pourrait-on pas dire, avec quelque raison, que si les *algébristes* qui ne sont pas *mécaniciens*, et qui écrivent sur la mécanique, dédaignaient moins la géométrie descriptive, ils auraient appris à lire dans l'espace le système dont ils veulent s'occuper, et qu'ils choisiraient plus *judicieusement*, qu'ils ne l'ont fait assez souvent, les plans sur lesquels ils doivent projeter ce *système*, de manière à avoir des équations très-simples à traiter, très-faciles à manier?

M. Poncelet a donné très-souvent, à ce sujet, de bonnes et utiles leçons, dans son cours, à la Faculté des sciences.

Et lorsque je dis : *les algébristes et les géomètres qui ne sont pas mécaniciens*, j'entends parler des savants qui s'occupent de mécanique générale et de mécanique céleste ou d'astronomie, désignant par *mécaniciens* ceux qui s'occupent de la théorie des machines. Ces derniers ne peuvent ignorer la construction et les formes géométriques des diverses parties des machines dont ils s'occupent ; ils ne peuvent ignorer la nature et la résistance des matériaux employés ; ils ne peuvent être étrangers aux ateliers et aux outils ; en un mot, ils doivent être *ingénieurs*.

Les *mécaniciens* doivent, de toute nécessité, savoir la géométrie descriptive ; au reste c'est la pensée de M. Poncelet, qui a dit très-souvent qu'il préférait employer la *géométrie*, au lieu de l'*analyse*, dans les démonstrations des principes de la mécanique, parce qu'on était conduit tout naturellement à des *tracés graphiques* que l'on pouvait immédiatement utiliser dans la construction des machines ; car il est de toute évidence qu'on ne peut pas construire une machine sans en avoir fait l'*épure*.

Je m'étais proposé deux *buts* en écrivant ce mémoire ; le premier, de donner une *preuve* évidente que la géométrie descriptive pouvait construire et démontrer, ainsi que l'avait dit Monge, et non pas seulement construire, comme l'affirme M. Chasles ; et le second, de remplacer les *théorèmes* de MM. Quetelet et Dandelin, par d'autres qui fussent plus dans l'esprit de la géométrie descriptive.

Je soumets ce travail au jugement des géomètres impartiaux et de bonne foi, qui aiment la science pour elle-même ; qui, n'étant point des ambitieux politiques, sont dès lors ennemis des intrigues, et ignorent toutes ces mauvaises passions humaines qui gâtent le cœur de l'homme et avilissent le caractère du savant.

Ai-je besoin d'ajouter que, si j'ai mis quelque *chaleur* dans cette discussion, l'on veuille bien songer à ceci : ce ne sont point mes *idées*, ce n'est point mon *œuvre* que je défends ; je défends l'œuvre de Monge et les idées de Carnot, qui furent deux grands savants et deux grands citoyens, ayant l'un et l'autre au fond du cœur l'amour de la patrie et des sciences, amour qui fut pur et désintéressé.

Efforçons-nous de les imiter !

T. O.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

ADDITIONS.

DÉMONSTRATION NOUVELLE DES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DES SECTIONS CONIQUES.

Je me propose, dans ce mémoire, de démontrer d'une manière nouvelle, et qui me paraît tout à fait dans l'esprit de la géométrie descriptive, les propriétés relatives aux *foyers*, aux *directrices* et aux *focales* des sections coniques.

J'ai divisé en deux parties ce mémoire, qui forme comme un petit traité des sections coniques.

Dans la première partie, j'arrive à démontrer qu'un *cercle* et une *section conique*,

situés dans deux plans différents, mais ayant un point de contact, peuvent toujours être enveloppés par un cône et par un seul cône.

Cette proposition fondamentale étant démontrée, elle me sert de point de départ pour rechercher, construire et démontrer, dans la seconde partie, les propriétés des sections coniques, relativement à leurs *foyers*, à leurs *directrices* et à leurs *focales*.

PREMIÈRE PARTIE.

Un cercle et une section conique qui ont un point de contact sont toujours enveloppés par un cône et un seul cône.

Pour arriver à démontrer ce *théorème*, il faut établir, au préalable, plusieurs *propositions*, ainsi qu'il suit.

§ Iᵉʳ.

Étant donnés un cercle C et une droite D, cette droite peut avoir trois positions par rapport au cercle : 1° elle peut être extérieure au cercle; 2° elle peut couper le cercle; 3° elle peut être tangente au cercle.

Quelle que soit la position de la droite D par rapport au cercle C, je dis que si l'on prend un point *m* sur cette droite et si de ce point on mène deux tangentes au cercle, en unissant les points de contact du cercle et des deux tangentes, on aura une corde qui passera par un point fixe situé : 1° dans l'intérieur du cercle dans le premier cas, et 2° par le point de contact de la droite D et du cercle C dans le troisième cas, ce qui est évident et n'a pas besoin de démonstration, et 3° par un point qui sera situé hors du cercle dans le deuxième cas, et dès lors ce sera le prolongement de la corde qu'il faudra considérer.

Nous allons démontrer le théorème pour le premier et le deuxième cas.

Premier cas. *La droite* D *étant extérieure au cercle* C.

Nous pourrons considérer le plan du cercle C et de la droite D comme étant un plan diamétral P d'une sphère S, coupée par ce plan P suivant un grand cercle C, cette sphère S ayant pour centre le centre *o* du cercle C (*fig.* I). Nous pourrons mener par le centre *o* un plan R perpendiculaire à la droite D et la coupant en un point *d*, et coupant de plus la sphère S suivant un grand cercle C′ (prenons ce plan R pour plan vertical de projection); menant du point *d*, qui sera évidemment

extérieur au cercle C′, deux tangentes θ et θ' à ce cercle C′, ces droites toucheront le cercle C′ en les points x et x'.

Les plans (x, D) et (x', D) seront tangents à la sphère S en les points x et x'; car l'on pourra mener, dans le plan (x, D) et par le point x, une droite B parallèle à D, et dans le plan (x', D) et par le point x' une droite B′, parallèle à D; et il est facile de démontrer que le rayon $\overline{ox}$ est perpendiculaire aux droites θ et B, et que le rayon $\overline{ox'}$ est perpendiculaire aux droites θ' et B′; par conséquent les plans (x, D) et (x', D) sont respectivement perpendiculaires aux extrémités du rayon qui leur correspond; donc, etc.

La droite xx' fera un angle droit avec la droite D, et elle sera coupée par le plan P, auquel elle est perpendiculaire, en un point p qui évidemment sera situé dans l'intérieur du cercle C.

Cela posé :

Nous savons que si nous prenons un point m sur la droite D, et qu'on le considère comme le sommet d'un cône Σ tangent à la sphère S, ce cône touchera la sphère suivant un petit cercle Δ qui contiendra les points x et x', et dont le plan Q passera dès lors par la droite $\overline{xx'}$.

Or le plan Q sera coupé par le plan P, auquel il est perpendiculaire, suivant une droite passant par le point p et qui sera sur le plan P la projection orthogonale du cercle Δ; et le cône Σ sera coupé par le plan P suivant deux génératrices droites qui seront tangentes au cercle C; en faisant varier la position du point m sur la droite D, on aurait les mêmes résultats.

Le théorème est donc démontré (*).

Deuxième cas. *La droite* D *coupe le cercle* C.

Prenons un point n sur la droite $\overline{xx'}$ précédente (*fig.* I), et considérons-le comme le sommet d'un cône Σ' tangent à la sphère S, on aura un petit cercle de contact Δ', et il suffit de démontrer que le plan Q′ de ce cercle Δ' passe par la droite D (même *fig.* I) pour que le théorème se trouve démontré.

Car en considérant le plan R (qui n'est autre que le plan vertical de projection), ce plan contiendra la droite $\overline{xx'}$ et le cercle C′, lequel sera coupé par la droite $\overline{xx'}$ en les points x et x'; ce plan R coupera le cône Σ' suivant deux tangentes δ et δ' au cercle C′, lequel sera touché en les points i et i' par ces tangentes δ et δ', et la corde $\overline{ii'}$ prolongée passera par le point d, en lequel la droite D est coupée par le plan R, puisque cette corde $\overline{ii'}$ sera l'intersection du plan R et du plan Q′ du cercle Δ'.

(*) Cette démonstration est de Monge, ainsi que la suivante.

Ainsi, en désignant la droite xx' par D', on aura bien démontré qu'étant donnée une droite D' coupant un cercle C', si d'un point n de D' on mène deux tangentes au cercle C', le prolongement de la corde $\overline{ii'}$ de contact passe par un point fixe d situé hors du cercle C'.

Démontrons donc que le plan Q' passe par la droite D; et d'abord énonçons le corollaire suivant, qui est évident en vertu de ce qui a été dit ci-dessus.

Si par la droite $\overline{xx'}$ ou D' on fait passer un plan quelconque coupant la sphère S suivant un petit cercle Δ, le cône Σ, qui sera tangent à la sphère S suivant ce petit cercle Δ, aura son sommet m situé sur la droite D.

Cela posé :

Si nous prenons un point y sur le cercle Δ', qui est le cercle de contact de la sphère S et du cône Σ' (ayant le point n situé sur la droite xx' ou D' pour sommet), le plan tangent T en y à la sphère S contiendra la génératrice droite $\overline{ny}$ du cône Σ', et contiendra la tangente λ en y au cercle Δ', et cette tangente λ sera située dans le plan Q' (plan du cercle Δ') et sera perpendiculaire à la génératrice $\overline{ny}$.

Si par le point y et la droite $\overline{xx'}$ ou D' on fait passer un plan Q', il coupera la sphère S suivant un petit cercle Δ, qui sera le cercle de contact d'un cône Σ et de la sphère S, et ce cône Σ aura son sommet situé en un point m de la droite D (ainsi que nous l'apprend le corollaire ci-dessus). De plus, il est évident que la génératrice $\overline{ny}$ sera tangente en y au cercle Δ; et comme le cône Σ est de révolution, il s'ensuit que la génératrice $\overline{ny}$ du cône Σ' sera perpendiculaire à la génératrice $\overline{my}$ du cône Σ.

Or le plan T, tangent en y à la sphère S, se trouve à la fois être tangent et au cône Σ' suivant $\overline{ny}$ et au cône Σ suivant $\overline{my}$; de plus, ce plan T contient la tangente λ en y au cercle Δ'.

Les trois droites $\overline{my}$, $\overline{ny}$, λ sont donc dans le plan T. La tangente λ au cercle A' est perpendiculaire à la génératrice $\overline{ny}$, la génératrice $\overline{ny}$ est tangente en y au cercle Δ et dès lors perpendiculaire à la droite $\overline{my}$; donc les droites $\overline{my}$ et λ se confondent.

Donc les cercles Δ et Δ' se coupent à angle droit au point y, puisque les droites $\overline{my}$ et λ se confondent; il s'ensuit que λ passe par le point m; il s'ensuit que λ étant dans le plan Q', ce plan plan passe par le point m, c'est-à-dire passe par un point de la droite D.

Et comme ce qui vient d'être dit pour un point y du cercle Δ' peut être dit de tout autre point, on voit que le plan Q' (ou le plan du cercle Δ') passe par la droite D.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Les théorèmes précédents sont les théorèmes fondamentaux de la théorie des polaires ; nous les devons à MONGE.

§ II.

Concevons une sphère S ayant le point o pour centre; prenons un point y sur la sphère S, on aura le rayon oy; menons au point y un plan perpendiculaire au rayon oy, nous aurons un plan T tangent en y à la sphère S; menons par le centre o un plan P parallèle au plan T, ce plan P coupera la sphère S suivant un grand cercle C.

Cela posé :

Menons dans le plan P et par le centre o deux droites A et B perpendiculaires entre elles, et imaginons par la droite A, ainsi que par la droite B, deux plans perpendiculaires au plan P et se coupant dès lors suivant le rayon oy, ces deux plans couperont la sphère S suivant deux grands cercles, l'un A_1 et l'autre B_1.

Un cylindre α tangent à la sphère S suivant le grand cercle A_1, aura la droite B pour axe.

Un cylindre β tangent à la sphère S suivant le grand cercle B_1, aura la droite A pour axe.

En sorte que si dans le plan tangent T on mène par le point y deux droites A_2 et B_2 respectivement parallèles aux axes A et B, la droite A_2 sera une génératrice droite du cylindre β et la droite B_2 sera la génératrice droite du cylindre α.

Les deux génératrices A_2 et B_2 se coupent à angle droit au point y.

Cela posé :

Si sur la génératrice A_2 on prend un point arbitraire a et qu'on le regarde comme le sommet d'un cône Σ tangent à la sphère S, la courbe de contact sera un petit cercle Δ, ayant au point y la génératrice B_2 pour tangente.

De même, si sur la génénératrice B_2 on prend un point arbitraire b et qu'on le regarde comme le sommet d'un cône Σ' tangent à la sphère S, la courbe de contact sera un petit cercle Δ', ayant au point y la génératrice A_2 pour tangente.

En sorte que les cercles Δ et Δ' se couperont à angle droit au point y (*).

(*) Au lieu de considérer une sphère S, on pourrait considérer une surface du second ordre E. Alors le plan mené parallèlement au plan T tangent en y à la surface E, par le centre o de cette surface E, la couperait suivant une section conique C qui serait ou une ellipse, ou une hyperbole, ou une parabole; alors les droites A et B seraient un système de diamètres conjugués de la conique C; alors les droites A_1 et B_1 parallèles aux droites A et B feraient entre elles un angle qui en général ne serait pas droit; alors les petits cercles Δ et Δ' seraient des coniques, etc., etc. C'est là le principe fondamental de la théorie des tangentes conjuguées, et nous le devons à MONGE.

§ III.

Étant données une sphère S *et une droite* R *coupant cette sphère en les points* x *et* x′, *je dis que si par la droite* R *on mène deux plans coupant la sphère* S *suivant deux petits cercles* C et C′, *ces cercles seront enveloppés par deux cônes.*

Nous savons que si on fait rouler un plan T sur deux courbes C et C′ et tangentiellement à ces courbes, l'enveloppe de l'espace parcouru par ce plan est une surface développable Σ.

Nous savons que si on unit par une droite G les points de contact des courbes C et C′ avec une position du plan T, on aura une génératrice droite de la surface Σ.

Nous savons que si les génératrices droites d'une surface développable Σ s'appuient toutes sur une droite D, cette surface Σ ne peut être autre qu'un plan ou qu'une surface conique ayant son sommet sur la droite D (*).

Cela posé :

Il est évident que si l'on fait mouvoir un plan T tangentiellement aux cercles C et C′ de la sphère S, la surface développable Σ obtenue sera convexe et non plane. Si donc nous démontrons que toutes les génératrices droites de cette surface Σ s'appuient sur une même droite, nous aurons démontré que cette surface développable Σ n'est autre qu'une surface conique.

Démonstration. Prenons sur la droite R un point r, et considérons ce point r comme le sommet d'un cône (qui sera droit, qui sera de révolution) tangent à la sphère S suivant un cercle Δ_1 ; ce cercle Δ_1 coupera les cercles C et C′ en quatre points, savoir : m et n sur C et m' et n' sur C′.

Nous aurons donc quatre droites $\overline{rm}$, $\overline{rm'}$ et $\overline{rn}$, $\overline{rn'}$, tangentes aux deux cercles donnés C et C′.

Ces quatre droites seront deux à deux dans six plans ; et il est évident que deux de ces six plans ne sont autres que les plans des cercles C et C′.

Les quatre autres plans seront des positions du plan qui, roulant tangentiellement sur les cercles C et C′, doit engendrer la surface développable Σ.

Cela posé :

Nous savons que si l'on construit les plans tragents Θ et Θ′ en les points x et x', points en lesquels la sphère S est percée par la droite R, ces plans se coupent suivant une droite D, et que le plan du cercle Δ_1 passe par cette droite D.

Par conséquent, les quatre droites $\overline{mm'}$, $\overline{nn'}$, $\overline{m'n}$, $\overline{mn'}$, qui unissent deux à deux les quatre points m, n du cercle C et m', n' du cercle C′, s'appuient sur la droite D.

(*) Voyez le *Cours de géométrie descriptive*, 2e partie, page 43.

Or ces quatre droites sont des génératrices de la surface dévelopable Σ, et même chose arrivera en considérant sur la droite R un autre point $r_{,}$. Par conséquent, toutes les génératrices droites de la surface développable Σ s'appuient sur la droite D. Et comme la surface Σ est évidemment convexe et non plane, il s'ensuit qu'elle n'est autre qu'une surface conique.

Mais comme, en considérant la figure de l'espace, on voit de suite que les quatre points *m*, *n*, *m'*, *n'*, forment un quadrilatère dont les côtés ne sont autres que les génératrices droites de la surface Σ, et qu'il est évident que les deux couples de côtés opposés se coupent en des points distincts, il s'ensuit, que l'on peut affirmer que la surface développable Σ est composée de deux surfaces coniques ayant chacune leur sommet sur la droite D, ce qu'il fallait démontrer.

De ce qui précède, on déduit le théorème suivant :

Théorème. *Étant donné un cercle* D, *si l'on prend dans l'intérieur de cercle un point* a, *si l'on mène par ce point* a *deux cordes coupant le cercle* D *en les points* b, b', *et* $b_{,}$, $b'_{,}$, *on forme un quadrilatère dont les côtés opposés vont se couper deux à deux en des points* i *et* i' *qui déterminent une droite* A. (La droite A est dite *polaire* et le point *a* est dit *pôle* du cercle D).

Si par le point a *on mène une troisième corde arbitraire coupant le cercle* D *en les points* b_{2} *et* b_{2}', *on pourra combiner ces deux points avec les points* b *et* b', *ou* b_{1} *et* b_{1}' *et l'on formera deux nouveaux quadrilatères dont les côtés opposés iront concourir en des points situés sur la droite* A (fig. II) (*).

§ IV.

Considérons un cylindre de révolution Σ ayant pour section droite un cercle D, et un cône de révolution Σ' ayant pour section droite un cercle D'.

Coupons la surface cylindrique Σ par un plan P, nous obtiendrons une courbe E qui sera toujours fermée (de forme dite *elliptique*).

Coupons la surface conique Σ' par un plan P', nous savons que l'on peut obtenir pour sections trois courbes de formes très-différentes, et que parmi ces formes la forme fermée existe ; la section de *forme elliptique* est donnée lorsque P' coupe toutes les génératrices droites du cône. Désignons cette section (de forme *elliptique*) par E'.

Les deux courbes E et E' ont la même forme; voyons si l'on peut, géométrique-

(*) Je n'ai pas besoin d'exposer en détail la *théorie des polaires*, je me borne aux théorèmes nécessaires à la démonstration de la question qui fait le sujet de cette première partie.

ment parlant, les considérer comme des courbes identiques et jouissant dès lors des mêmes propriétés géométriques.

Rappelons-nous la distinction que nous avons faite entre les deux genres de propriétés géométriques qui peuvent exister pour une courbe, savoir : propriétés de *relation de position* et propriétés de *relation métrique*.

Si les deux courbes E et E′ jouissent des mêmes propriétés de relation de position, nous pourrons les dire *identiques*, lorsqu'il s'agira des propriétés de ce genre; mais nous ne pourrons rien affirmer touchant leur identité au sujet des propriétés *de relation métrique* (*).

Par conséquent, nous devrons avoir grand soin de ne pas confondre et mélanger dans nos démonstrations, ces deux genres (bien distincts) de propriétés géométriques.

Démontrons maintenant que les deux *sections elliptiques*, cylindrique E et conique E′ sont identiques par rapport aux relations géométriques, dites *de position*.

Il est évident que par une projection cylindrique, c'est-à-dire au moyen de droites parallèles entre elles et à l'axe du cylindre de révolution Σ, nous ferons passer sur le plan P et par suite sur la section E, toutes les propriétés de relation de position qui existent pour le cercle D, ces relations de position étant du genre de celles dites *des transversales*, ou *des points de concours*.

Il est évident que, par une projection conique, c'est-à-dire au moyen de droites passant par le sommet du cône Σ′ nous ferons passer sur le plan P′ et par suite sur la section E′, toutes les propriétés dites *des transversales*, ou *des points de concours* qui existent pour le cercle D′.

Cela posé :

Si dans le cercle D ou D′ on mène deux cordes M et N se coupant en un point o intérieur au cercle, et dont nous désignerons les extrémités par m, m' et n, n'; si l'on détermine, ainsi qu'il a été dit ci-dessus, la *polaire* O, le point o étant le *pôle*; prenant sur le cercle D ou D′ un cinquième point x arbitraire, on déterminera le sixième point x' *conjugué* du point x, par la construction suivante :

On unira les points x et m par une droite coupant la polaire O en un point d et unissant les points d et m' par une droite; elle coupera la corde $\overline{xo}$ (prolongée) en un point x' qui sera le sixième point demandé.

On voit donc qu'en faisant cheminer le cinquième point x sur le cercle D ou D′, on construira une série de sixièmes points x', qui appartiendront tous au cercle D ou D′.

Même chose aura lieu pour la section E ou E′, en vertu de ce qui a été dit ci-

(*) Ainsi le *cercle*, l'*ellipse*, la *parabole* et l'*hyperbole* sont *identiques* pour les relations de position, mais ces courbes ne sont pas *identiques* pour les relations métriques.

dessus, touchant l'emploi des *projections* cylindrique ou conique, pour faire passer le *système* qui est lié au cercle D ou D′, sur les courbes E ou E′.

Par conséquent, tous les points conjugués $x_{\prime}$ et $x_{\prime}'$ de la courbe E ou E′ sont liés entre eux et aux quatre points $m_{\prime}$, $m_{\prime}'$, $n_{\prime}$, $n_{\prime}'$, arbitrairement choisis sur les courbes E et E′, par une même construction graphique.

Ces deux courbes E et E′ sont donc, *géométriquement parlant*, des courbes identiques. *Dès lors si une certaine propriété de relation de position existe pour la courbe* E, *elle existera pour la courbe* E′. (Ceci est dit comme *induction* ou *déduction philosophique*.) Par conséquent, sachant que si l'on inscrit à la section cylindrique E un hexagone tel que deux couples de côtés opposés soient parallèles entre eux, le troisième couple de côtés opposés est formé par des droites qui sont aussi parallèles entre elles (*); propriété que l'on démontre directement par la projection cylindrique. Cette propriété dont jouit la section *cylindrique* E existera, sans aucun doute, pour la section *conique* E′, quoique nous ne démontrions pas directement l'existence de cette propriété pour la courbe E′; et en vertu de cette propriété dont jouit (par induction) la section conique E′, nous pourrons démontrer l'*hexagramme de* Pascal ainsi qu'il suit.

Traçons un cercle C dans un plan P; inscrivons dans ce cercle un hexagone quelconque; élevons par le centre o du cercle C une perpendiculaire au plan de ce cercle et prenons sur cette droite un point arbitraire s; le cône (s, C) sera de révolution; on aura ainsi le cône droit des anciens géomètres.

Cela posé :

Prolongeons les côtés opposés de l'hexagone inscrit (*fig.* III).

Les côtés ab et $a'b'$ se couperont en un point p;

Les côtés ad, $a'd'$ se couperont en un point r;

Les côtés db', $d'b$ se couperont en un point q.

Il faut démontrer que les trois points p, q, r, sont en ligne droite.

Pour cela faire :

Unissons par une droite D deux des trois points p, q, r et ainsi les points p et q.

Menons par le sommet s et la droite D un plan R et coupons le cône (s, C) par un plan Q parallèle au plan R.

Ce plan Q coupera le cône suivant une section elliptique. E′, car la droite D étant extérieure au cercle C, ce plan Q coupera toutes les génératrices droites du cône.

Or il est évident que les génératrices sa, sa', sb, sb', sd, sd' du cône (s, C) seront coupés par le plan Q en des points $a_{\prime}$, $a_{\prime}'$, $b_{\prime}$, $b_{\prime}'$, $d_{\prime}$, $d_{\prime}'$ qui seront les sommets d'un hexagone inscrit à la courbe E′.

(*) Voyez le *Cours de géométrie descriptive*, 2e partie, page 76, art. 320.

Et comme la pyramide hexagonale inscrite au cône (s, C) a deux couples de faces opposées se coupant suivant les droites sp et sq, qui sont parallèles au plan Q, il s'ensuit que l'hexagone inscrit dans la courbe E′ a *nécessairement* deux couples de côtés opposés qui sont parallèles.

Or, en vertu de ce qui a été dit ci-dessus, le troisième couple de côtés opposés doit être formé de droites parallèles, donc la droite $\overline{sr}$ doit être dans le plan R. Donc les trois plans p, q, r sont en ligne droite. Ce qu'il fallait démontrer.

§ V.

Mais supposons que les géomètres éprouvent des *scrupules* (assez légitimes) et ne puissent admettre l'*exactitude géométrique* de la démonstration de l'*hexagramme* pour le cercle, ainsi que nous l'avons donnée ci-dessus, attendu que cette démonstration s'appuie sur ce que la section *elliptique* du cône droit jouit d'une propriété qui appartient à la section *elliptique* du cylindre droit, savoir :

Que si l'on inscrit dans l'une ou l'autre section un hexagone, tel que deux couples de côtés opposés forment un faisceau composé de deux droites parallèles, le troisième couple de côtés opposés est nécessairement composé de deux droites parallèles entre elles.

Et qu'ainsi les géomètres ne puissent admettre ce mode de démonstration, attendu que si la propriété énoncée et qui sert de point de départ se trouvant, en effet, démontrée d'une manière rigoureuse pour la section elliptique du cylindre droit, et cela au moyen des *projections cylindriques*, elle n'est démontrée que par *induction* et d'une manière purement *philosophique* pour la section elliptique du cône droit.

Supposant donc que les géomètres soient conduits à désirer une démonstration directe de la propriété de l'hexagramme dans le cercle, nous donnerons la démonstration suivante qui a l'avantage d'être dans un même *esprit géométrique* avec celles données par Monge sur les propriétés des *polaires* et des *tangentes conjuguées* exposées ci-dessus (§§ I et II), et cette uniformité de méthode doit être remarquée par les géomètres, car c'est précisément cette uniformité dans les méthodes qui donne un si grand charme à la géométrie des anciens et qui la rend surtout d'une étude facile.

Démonstration directe de l'hexagramme dans le cercle.

Concevons une sphère S; menons par son centre o un plan P, ce plan coupera la sphère suivant un grand cercle C; inscrivons dans le cercle C, un hexagone quelconque; unissons deux à deux par des cordes δ, δ', δ'' les sommets *opposés* de cet

hexagone; ces trois cordes se couperont deux à deux en trois points, qui seront toujours situés dans l'intérieur du cercle, c'est évident.

Menons par les cordes δ, δ', δ'', des plans X, X', X'', perpendiculaires au plan P; ces plans couperont la sphère S suivant des petits cercles Δ, Δ', Δ'' qui se couperont deux à deux et en deux points symétriquements placés par rapport au plan P; l'un de ces points étant en dessus, l'autre en dessous du plan P, et étant l'un et l'autre également distants de ce plan P.

Cela posé :

Désignons (*fig.* III) par a et a' les points en lesquels le cercle C est coupé par la corde δ.

— par b et b' les extrémités de la corde δ'.

— par d et d' les extrémités de la corde δ''.

Chacune de ces cordes δ, δ', δ'', sera sur le plan P la projection orthogonale des cercles Δ, Δ', Δ''.

En vertu de ce qui a été démontré § II, ces cercles pourront être enveloppés deux à deux par deux cônes; on aura donc en tout six cônes enveloppant deux à deux ces trois cercles (*).

En vertu de ce que le plan P est symétrique par rapport à la sphère S et aux trois cercles Δ, Δ', Δ'', il est évident que les sommets de ces six cônes seront situés sur ce plan P; par conséquent l'hexagone inscrit (abd, $a'b'd'$) sera tel que :

1° Ses côtés opposés ab et $a'b'$ étant prolongés, seront les génératrices droites d'un cône Σ enveloppant les cercles Δ et Δ';

2° Ses côtés opposés ad et $a'd'$ seront les génératrices droites d'un cône Σ' enveloppant les cercles Δ et Δ'';

3° Ses côtés opposés db' et bd' seront les génératrices droites d'un cône Σ'' enveloppant les cercles Δ' et Δ''.

(Et cela a lieu en vertu de ce qui a été dit ci-dessus § II).

Les sommets des cônes Σ, Σ', Σ'' seront donc situés sur le plan P (plan du cercle C) en les points p, q, r, en lesquels concourent chaque couple de côtés opposés de l'hexagone.

Cela posé :

Je dis que les trois points p, q, r sont en ligne droite. Et en effet :

Considérons les deux cônes Σ et Σ'; puisque le premier Σ ayant son sommet au point p enveloppe les cercles Δ et Δ', puisque le second Σ' ayant son sommet au point r, enveloppe les cercles Δ et Δ'', il s'ensuit que ces deux cônes ont une base com-

(*) Voyez les *Compléments de géométrie descriptive*, page 12.

mune qui est le cercle Δ; si donc on unit leurs sommets p et r par une droite, elle viendra couper le plan X du cercle Δ (et, par conséquent, elle viendra couper la corde δ) en un certain point m, et si de ce point m on mène deux tangentes au cercle Δ, on aura deux points de contact x et x_1.

Or il est évident que les plans (x, p, r) et (x_1, p, r) seront tangents à la fois aux deux cônes Σ et Σ', et chacun d'eux sera tangent suivant la génératrice $\overline{px}$ ou $\overline{px_1}$ pour le cône Σ et suivant la génératrice $\overline{rx}$ ou $\overline{rx_1}$ pour le cône Σ'.

Or, le cercle Δ'' étant situé sur le cône Σ', il s'ensuit que la génératrice $\overline{px}$ coupera le cercle Δ'' en un point x'' et que la génératrice $\overline{rx_1}$ coupera ce même cercle Δ'' en un point x''_1; or le cercle Δ' étant situé sur le cône Σ, il s'ensuit que la génératrice $\overline{px}$ coupera le cercle Δ' en un point x', et que la génératrice $\overline{px_1}$ coupera ce même cercle en un point x_1'.

Et il est évident que les tangentes θ en x au cercle Δ, θ' en x' au cercle Δ', θ'' en x'' au cercle Δ'', seront situées dans le plan (x, p, r), et que de même les tangentes θ_1 en x_1 au cercle Δ, θ_1' en x_1' au cercle Δ', θ_1'' en x_1'' au cercle Δ'', seront situées dans le plan (x_1, p, r); par conséquent le plan (x, p, r) coupera la sphère S suivant un cercle C tangent respectivement aux cercles Δ, Δ', Δ'' en les points x, x', x''; et le plan (x_1, p, r) coupera la sphère S suivant un cercle C_1, tangent respectivement aux cercles Δ, Δ', Δ'', en les points x_1, x_1' x_1''.

Cela posé :

On arrivera au même résultat, soit que l'on considère les cônes Σ, Σ' ou Σ, Σ'' ou Σ', Σ''. Par conséquent le plan du cercle C, ainsi que le plan du cercle C_1 est tangent à la fois aux trois cones Σ, Σ', Σ'', chacun des plans des cercles C et C_1 contient donc les sommets des trois cônes Σ, Σ', Σ''; or ces sommets p, q, r sont sur le plan P, donc ils sont en ligne droite.

Ainsi se trouve démontré d'une manière rigoureuse, et, pour le cercle, le *théorème* connu sous le nom d'hexagramme de Pascal.

§ VI.

L'hexagramme de Pascal étant démontré pour le cercle, il est facile de le démontrer pour les sections planes d'un cylindre droit ou d'un cône droit.

Et en effet :

Désignant par C la section droite d'un cylindre droit Σ, et par C' la section droite d'un cône droit Σ', (les deux courbes C et C' seront des cercles) en inscrivant dans chacun des cercles C et C' un hexagone, les trois points de concours des côtés opposés de cet hexagone seront, en vertu de ce qui a été démontré ci-dessus, distribués sur une droite D pour le cercle C et sur une droite D' pour le cercle C'.

Cela posé :

Coupant 1° le cylindre Σ par un plan quelconque P, nous obtiendrons une courbe fermée (elliptique) E, sur laquelle nous ferons passer toutes les droites de la figure située dans le plan du cercle C au moyen de droites parallèles à l'axe du cylindre Σ; et ainsi *par une projection cylindrique*.

L'hexagramme de Pascal se trouvera donc démontré pour la courbe E.

Coupant 2° le cône Σ' par un plan quelconque P', nous obtiendrons l'une des trois sections coniques E' et nous ferons passer sur le plan P' la figure située dans le plan du cercle C', au moyen de droites concourant au sommet du cône Σ'; et ainsi par *une projection centrale ou conique*.

L'hexagramme de Pascal se trouvera donc démontré pour la courbe E'.

Et comme au moyen de l'hexagramme, on peut, étant donné cinq points de la courbe E ou E', construire autant de sixièmes points qu'on voudra, on voit que cette construction de la courbe équivaut en *géométrique graphique*, à l'équation de la courbe en *géométrie analytique*.

Par conséquent les trois sections coniques E' sont de même nature géométriques soit entre elles, soit avec la section cylindrique E.

Cela posé :

Si l'on imagine un cône quelconque Σ_1 ayant pour base une section conique E' (qui ne sera autre que l'une des trois sections planes d'un cône droit), et si l'on coupe ce cône Σ_1 par un plan quelconque P_1, suivant une courbe E_1, je dis que la courbe E_1 sera toujours une section conique.

Et en effet :

L'hexagramme de Pascal existant pour la courbe E', on pourra le faire passer sur la courbe E_1 au moyen d'une projection centrale ou conique, le sommet du cône Σ_1 étant le centre de cette projection, donc, etc. Ce qui précède nous permet donc d'énoncer les *théorèmes* suivants :

Théorème 1er. *Tout cône qui a pour base une section conique est coupé par un plan suivant une autre section conique.*

Théorème 2. *Une section conique est toujours projetée orthogonalement ou obliquement sur un plan, suivant une section conique de même forme qu'elle.*

§ VII.

Imaginons un cône Σ ayant pour base une section conique A située dans un plan P; coupons ce cône par un second plan P'; les deux plans P et P' se couperont suivant une droite I et le plan P' coupera le cône Σ suivant une seconde section conique A'.

Cela posé :

Menons par le sommet du cône Σ une droite arbitraire R, mais telle, qu'elle soit extérieure au cône Σ ; prenons sur cette droite R deux points arbitraires a et a', et regardons chacun de ces points comme le sommet d'un cône ayant la courbe A ou A' pour base ; nous aurons deux cônes (A, a) et (A', a') qui auront deux plans tangents communs.

Si nous cherchons la courbe, intersection de ces deux cônes (a, A), (a', A'), nous verrons que cette courbe est divisée en deux branches, dont l'une est plane, parce que ses tangentes s'appuient toutes sur la droite I.

Cette branche, que nous désignerons par α, étant plane ne sera autre qu'une section conique.

Dès lors les deux cônes (a, A), (a', A') peuvent être considérés comme ayant même base α (*).

§ VIII.

Démontrons maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME. *Deux cônes* S *et* S' *qui ont pour base commune une section conique* B, *s'entrecoupent suivant une seconde section conique* B'.

Démonstration. Unissons les sommets s et s' des cônes S et S' par une droite K qui viendra couper le plan de la base B en un point k ; menons par le point k une série de sécantes X,..... à la section conique B ; ces droites X,..... seront sur le plan de la courbe B, les traces d'une série de plans auxiliaires passant tous par la droite K, et coupant dès lors les deux cônes S et S' suivant des génératrices droites, lesquelles s'entrecouperont en des points qui appartiendront à la courbe B' cherchée. Or, si l'on veut construire la tangente en un point de la courbe B', il faudra faire la construction suivante :

Mener aux points x et x_1 en lesquels la courbe B est coupée par la divergente X des tangentes θ et θ_1 à cette courbe B, ces deux tangentes se couperont en un point t qui sera la trace sur le plan de la courbe B des deux tangentes à la courbe B' et pour les points en lesquels se coupent les génératrices droite $\overline{sx}$, $\overline{s'x'}$ situées dans le plan auxiliaire ayant la droite X pour trace.

Or tous les points t... sont sur une droite L qui coupe la courbe B (cette droite L est la *polaire* de la courbe B, le *pôle* étant le point k).

(*) Je n'entre pas dans plus de détails, parce qu'on peut lire la démonstration complète dans les *Compléments de géométrie descriptive,* pages 3 et suivantes.

Donc toutes les tangentes à la courbe B' s'appuient sur une droite L; donc la courbe B' est plane; donc elle est une section conique. Ce qu'il fallait démontrer (*).

§ IX.

Tout ce qui précède étant bien compris, arrivons maintenant à la démonstration du théorème qui sert de base à la nouvelle manière de démontrer les propriétés principales des sections coniques.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Théorème. *Lorsqu'un cercle et une section conique, situés dans des plans différents, ont un point de contact, ces courbes sont toujours enveloppées par un cône et par un seul cône.*

Démonstration. Imaginons sur le plan horizontal un cercle C; menons en un point m de ce cercle une tangente θ; faisons passer par la droite θ un plan P, et traçons dans ce plan une conique E tangente en m au cercle C.

Cela posé :

Cinq conditions déterminent une section conique; par conséquent, si je prends sur la conique E trois points arbitraires a, b, d, la conique E sera complétement déterminée, en ajoutant les deux conditions de passer par le point m et d'être tangente en ce point m à la droite θ.

Je puis donc, dans tout ce qui va suivre, oublier la conique E et n'employer que les points m, a, b, d et la tangente θ.

Considérons trois cônes A, B, D, ayant respectivement pour sommet les points a, b, d et pour base commune le cercle C.

Les deux cônes A et B se couperont suivant une conique β.

Les deux cônes A et D se couperont suivant une conique γ.

Les deux coniques β et γ seront donc situées toutes deux sur le cône A.

Or deux coniques tracées sur un cône ne peuvent avoir entre elles que quatre positions distinctes :

1° Elles peuvent n'avoir aucun point commun ;

2° Elles peuvent être tangentes l'une à l'autre en un point;

3° Elles peuvent se couper en deux points;

4° Elles peuvent se couper en un seul point, alors elles sont composées de branches infinies.

Or, il est évident, en faisant l'*épure* de l'intersection des deux cônes A et B, que

(*) Je n'entre pas dans plus de détails, parce qu'on peut lire la démonstration complète dans le *Cours de géométrie descriptive*, pages 144 et suivantes.

la courbe β passe par le point m; de même l'intersection γ des deux cônes A et D passe par le point m.

Ainsi les deux coniques β et γ ont en m un point commun.

Voyons maintenant si ce point m peut être un point de contact entre les courbes β et γ.

La tangente en m à la courbe β sera située sur le plan (a, θ) tangent au cône A suivant sa génératrice droite $\overline{am}$.

La tangente en m à la courbe γ sera aussi située sur le même plan tangent (a, θ).

Si donc les deux courbes β et γ sont tangentes en m, ces deux tangentes se confondront en une seule et même droite.

Si au contraire les deux courbes β et γ qui se coupent déjà au point m, se coupent en un second point m_1, alors ces deux tangentes seront distinctes.

Cela posé :

Admettons que les deux courbes β et γ sont tangentes l'une à l'autre au point m, et voyons ce qui doit en advenir.

Lorsque l'on a sur un cône A deux coniques β et γ tangentes l'une à l'autre en un point m, il est impossible de faire mouvoir un plan tangent à ces deux coniques, de telle manière qu'il leur soit intérieur. Par conséquent, ces deux coniques ne peuvent être enveloppées que par le seul cône A.

Mais par hypothèse, les coniques β et γ sont les intersections, savoir : β des cônes A et B, et γ des cônes A et D; ces deux coniques β et γ ne peuvent donc être tangentes en m, dès lors elles doivent *impérieusement* se croiser au point m et se couper en un second point m_1, lequel sera le sommet du cône Σ qui enveloppe les deux courbes données, savoir : le *cercle* C et la *conique* E.

Le point m est bien le sommet d'un second cône enveloppant les courbes C et E, mais il est évident que ce second cône est formé des plans de ces courbes C et E.

Ainsi, il se trouve démontré que le cercle C et la conique E qui ont un point de contact m sont toujours enveloppés par un cône et par un seul cône.

Dans le paragraphe suivant, nous allons démontrer que dans le cas où l'on considère un cercle C et une section conique E, les deux courbes β et γ ne peuvent pas se couper en le seul point m.

§ X.

J'ai dit ci-dessus que les coniques β et γ se coupaient *impérieusement* en deux points m et m_1; il faut justifier cette assertion.

Deux coniques X et Y tracées sur un cône Σ, peuvent ne se couper qu'en un seul point.

En effet :

Par un point m pris sur l'une des nappes de la surface conique Σ, on peut toujours mener une droite Z parallèle à une génératrice droite G de cette surface Σ.

Dès lors, la droite Z ne percera cette surface Σ qu'en le seul point m.

Si par la droite Z nous menons une suite de plans P, P′, P″, ... chacun de ces plans sera parallèle à la génératrice G, et il n'y aura entre eux qu'un seul plan P_1, qui sera parallèle au plan Θ tangent à la surface Σ suivant la génératrice G.

Dès lors tous les plans P, P′, P″,... couperont le cône Σ suivant des *hyperboles*, et le plan P_1 sera le seul qui coupera ce cône Σ suivant une *parabole*.

Ainsi, pour que deux coniques X et Y ne se coupent qu'en un seul point m, il faut qu'elles soient ou 1° deux hyperboles, ou 2° une hyperbole et une parabole ; et il est facile de voir que dans le *premier cas* les deux hyperboles ont chacune une de leurs deux asymptotes parallèles aux droites G et Z, et que dans le *second cas* l'hyperbole et la parabole sont des courbes telles, que l'axe infini de la parabole est parallèle à l'une des deux asymptotes de l'hyperbole, et ainsi à l'asymptote qui est elle-même parallèle aux droites G et Z.

Cela posé :

Il serait à craindre que les deux coniques γ et 6 se coupassent en un seul point m, lorsque toutes deux seront *hyperboliques*, ou lorsque l'une d'elles serait une *hyperbole*, l'autre étant une *parabole*.

Mais comme la base commune aux trois cônes A, B, D est un cercle C, si par hasard le point b pris sur la conique E se trouve placé de manière à ce que la courbe 6 intersection des cônes A et B se trouve être une *hyperbole* ou une *parabole*, on pourra toujours choisir un point d sur la courbe E, tel que le cône D coupe le cône A suivant une *ellipse* γ. Et en effet : en unissant les points a et d par une droite et faisant glisser le cône D parallèlement à lui-même jusqu'en la position D′, position en laquelle le sommet d sera venu se superposer sur le sommet a, ce cône D′ sera coupé par le plan du cercle C, suivant un cercle C′ ; et il est évident que l'on pourra toujours choisir sur la conique E, le point d de telle manière que les deux cercles C et C′ ne se coupent pas ou ne se touchent pas, en un mot n'aient entre eux aucun point commun ; et l'on sait que dans ce cas les deux cônes A et D se coupent toujours suivant une *ellipse*.

Par conséquent, les deux coniques 6 et γ se couperont toujours en deux points m et m_1.

§ XI.

Il suit de ce qui précède que si l'on se donne deux coniques quelconques C et E tangentes l'une à l'autre en un point *m* et situées dans des plans différents, ces deux coniques ne pourront être enveloppées par un cône, qu'autant qu'elles auront entre elles une position convenable.

Ainsi, ces courbes C et E étant deux hyperboles, ou deux paraboles, ou une hyperbole et une parabole, ne pourront pas être placées sur un cône, si les sommets des branches en contact par le point *m* ont leurs sommets situés l'un à droite et l'autre à gauche du plan normal mené à la tangente θ par le point *m*, comme l'indiquent les *figures* IV, V et VI.

Car l'on sait *à priori* qu'il est impossible de couper un cône par deux plans de manière à avoir des coniques ainsi disposées l'une par rapport à l'autre ; il faut que les sommets des deux branches en contact au point *m* soient placés tous les deux, ou à droite, ou à gauche du plan normal mené à la tangente θ par le point *m*, en un mot soient placés tous les deux d'un même côté par rapport à ce plan normal, comme l'indiquent les *figures* VII, VIII et IX.

Dans le cas où les coniques C et E auraient entre elles la position indiquée par les *figures* IV, V et VI, la construction des courbes β et γ devrait nous indiquer l'*impossibilité* d'unir les deux courbes C et E par un cône ; et cette impossibilité sera manifestée, par la manière d'être entre elles des courbes β et γ ; aussi la construction graphique nous montrera-t-elle que ces courbes β et γ ne se coupent qu'en le seul point *m* ; et elles seront dès lors disposées sur le cône A, comme nous l'avons dit § X.

DEUXIÈME PARTIE (*).

DES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES RELATIVES A LEURS FOYERS, A LEURS DIRECTRICES ET A LEURS FOCALES.

Ce sont les diverses propriétés dont jouissent les sections coniques par rapport à leurs *foyers*, à leurs *directrices* et à leurs *focales*, que nous désignons par le nom de *propriétés principales* des sections coniques.

Pour les démontrer, nous nous appuierons sur le théorème suivant, et qui est démontré dans la première partie de ce mémoire, savoir : *qu'un cercle et une section conique ayant un point de contact, ces deux courbes étant situées dans des plans différents, sont toujours enveloppées par un cône et un seul cône.*

Nous allons chercher et démontrer ces propriétés principales successivement pour l'*ellipse*, l'*hyperbole* et la *parabole*, ainsi qu'il suit.

§ Ier.

Propriétés principales de l'ellipse.

Soit donnée sur le plan horizontal de projection une ellipse A (en d'autres termes prenons pour plan horizontal le plan coupant un cône droit ou de révolution suivant une courbe fermée A).

Supposons que l'on connaisse les deux axes de cette courbe, et ainsi son grand axe $\overline{aa'}$ et son petit axe $\overline{bb'}$ et son centre o.

Menons aux extrémités a et a', b et b' des axes, des tangentes à la courbe A, nous savons que nous aurons construit un rectangle circonscrit à cette courbe A.

Désignons par θ, θ', δ, δ', les tangentes menées respectivement à cette courbe A et en les sommets a, a', b, b' (*fig.* 1).

(*) Les principaux résultats contenus dans cette deuxième partie ont été communiqués à la *Société philomatique de Paris*, dans sa séance du 13 mars 1847.

Cela posé :

Prenons une ligne de terre LT parallèle au grand axe $\overline{aa'}$ de la courbe A ; concevons un cylindre Σ vertical ayant cette courbe A pour section droite ; coupons ce cylindre Σ par un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection et ayant la tangente θ pour trace horizontale H^p (*fig.* 1) ; ce plan coupera le cylindre Σ suivant une ellipse E dont la projection E^h ne sera autre que la courbe donnée A.

Cela posé :

Prenons sur le grand axe $\overline{aa'}$ (ou sur son prolongement) de la courbe donnée A un point arbitraire *d* ; et de ce point comme centre et avec un rayon égal à $\overline{ad}$, décrivons un cercle D.

Ce cercle D sera tangent à la courbe donnée A en son sommet *a*.

Cela posé :

Les deux courbes, *ellipse* E et *cercle* D, auront au point *a* une tangente commune θ ; ces deux courbes E et D pourront donc être placées ou enveloppées par un cône S, et ne pourront être placées ou enveloppées que par un seul cône S.

Déterminons le sommet *s* de ce cône S.

Il est évident que les courbes E et D sont symétriques par rapport au plan vertical M passant par le grand axe $\overline{aa'}$ (ce plan M sera parallèle au plan vertical de projection) ; dès lors le sommet *s* du cône S sera située sur le plan M ; dès lors le point s^h sera situé sur le grand axe $\overline{aa'}$ ou sur son prolongement.

Pour déterminer le point s^h, il est évident qu'il suffira de prendre sur la tangente θ un point *m* arbitraire et de mener par ce point *m* deux tangentes, l'une à l'ellipse A ou E^h et la touchant au point x^h et l'autre au cercle D et la touchant au point *y*. En unissant les deux points x^h et *y* par une droite G^h, on aura la projection horizontale d'une génératrice droite G du cône S, et cette droite G^h coupera le grand axe $\overline{aa'}$ ou son prolongement en un point s^h qui sera la projection horizontale du sommet *s* du cône S.

En vertu de ce que nous savons en *géométrie descriptive*, il sera facile de construire le point s^v (les constructions sont exécutées sur l'*épure*, *fig.* 1).

Cela posé :

En faisant varier la position du point *d* sur le grand axe $\overline{aa'}$, on fera varier la grandeur du rayon du cercle D ; on aura donc une série de cercles D, D′, D″, … ayant respectivement pour centres les points *d*, *d′*, *d″*… ; tous ces cercles seront tangents entre eux et à la courbe A en le point *a*.

La courbe E sera successivement enveloppée et respectivement avec les cercles D, D′, D″, … par des cônes S, S′, S″, … dont les sommets *s*, *s′*, *s″*,… seront situés sur le plan M, et détermineront une certaine courbe γ dont nous reconnaîtrons plus tard la nature géométrique.

Mais remarquons que pour déterminer les points s^h, s'^h, s''^h,... nous devrons mener du point m des tangentes aux divers cercles D, D', D'', ... dont les points de contact seront respectivement y, y', y'',... Or il est évident que l'on aura :

$$\overline{ma} = \overline{my} = \overline{my'} = \overline{my''} = ...$$

Dès lors tous les points y, y', y'',... seront situés sur un cercle $\mathcal{E}$ ayant le point m pour centre et ayant $\overline{ma}$ pour rayon.

Cela posé :

Démontrons que les points d et s^h, d' et s'^h,... seront en général des points distincts, séparés l'un de l'autre et que dès lors les cônes S, S',... seront des cônes obliques à base circulaire ; et démontrons en même temps que parmi tous ces cônes obliques, il en existera deux et qu'il n'en existera que deux, qui seront de *révolution* ; et démontrons dès lors qu'il existera deux cercles dans la série D, D',... tels que pour chacun d'eux le centre se confondra avec la projection horizontale du sommet d'un cône de la série S, S',.... Et qu'ainsi, on pourra faire passer par l'ellipse E deux cônes de révolution distincts et ayant chacun son axe de rotation perpendiculaire au plan horizontal sur lequel est tracée la courbe donnée A.

Il est évident que le point s^h étant l'intersection de la droite G^h ou $\overline{yx^h}$ avec le grand axe $\overline{aa'}$ de l'ellipse A ou E^h et que le point d, centre du cercle D, étant l'intersection du même grand axe $\overline{aa'}$ et d'une droite menée par le point y perpendiculairement au rayon $\overline{my}$ du cercle $\mathcal{E}$, il est évident, dis-je, que ces deux points s^h et d ne se confondront en un seul et même point, qu'autant que les droites yx^h et yd se superposeront ; et il est évident que, pour que cette superposition ait lieu, il faut que la droite yx^h soit tangente au cercle $\mathcal{E}$.

Dès lors, supposant que le point x^h est extérieur au cercle $\mathcal{E}$ (plus loin nous démontrerons que cela a toujours lieu), il est évident que l'on pourra mener par ce point x^h deux tangentes au cercle $\mathcal{E}$.

Ainsi (*fig.* 2), menant par le point x^h deux tangentes au cercle $\mathcal{E}$, l'une de ces tangentes touchera le cercle $\mathcal{E}$ au point p_1 et coupera le grand axe $\overline{aa'}$ en un point s_1^h, et l'autre tangente touchera le même cercle $\mathcal{E}$ au point p_2 et coupera le même grand axe $\overline{aa'}$ en un point s_2^h.

Les points s_1^h et s_2^h seront donc les projections horizontales des sommets s_1 et s_2 de deux cônes S_1 et S_2 de révolution passant l'un et l'autre par l'ellipse E et ayant l'un et l'autre leur axe de rotation perpendiculaire au plan horizontal de projection, ou, en d'autres termes, perpendiculaire au plan de l'ellipse donnée A.

Il est évident que l'on doit retrouver les mêmes points $\underline{s_1^h}$ et $\underline{s_2^h}$ en effectuant des constructions analogues aux constructions précédentes, quel que soit le point x^h choisi sur l'ellipse A ou E^h; si donc il est évident que pour un certain point de l'ellipse A la construction des tangentes au cercle 6 correspondant à ce point, se trouve toujours possible, il sera démontré que la construction de ces deux tangentes sera toujours possible quel que soit le point x^h choisi sur l'ellipse A.

Or si l'on prend pour le point x^h, le point b extrémité du petit axe de l'ellipse A, en menant par ce point b une tangente à l'ellipse A, on aura une droite parallèle au grand axe aa' (*fig.* 3) et coupant la tangente θ en un point t, de telle sorte que l'on aura $\overline{ta}$ égale au demi petit axe de l'ellipse A; et si du point t comme centre et avec $\overline{ta}$ pour rayon on décrit un cercle 6', ce cercle sera toujours tel que le point b lui sera extérieur puisque l'on aura toujours $\overline{ta} < \overline{tb}$, car $\overline{ta}$ est égale au demi petit axe et $\overline{tb}$ est égal au demi grand axe de l'ellipse A; ainsi il se trouve démontré qu'il existe toujours sur le grand axe d'une ellipse A, deux points tels qu'ils sont les projections orthogonales des sommets de deux cônes de révolution passant par une ellipse E de l'espace, dont la courbe A est la projection orthogonale.

Les points s_1^h et s_2^h seront les centres de deux cercles D_1 et D_2 tangents à l'ellipse A en son sommet a, et les deux cônes qui envelopperont respectivement les courbes E et D_1, E et D_2, seront de révolution et auront chacun leur axe de rotation perpendiculaire au plan horizontal.

On pourra construire (*fig.* 4) les points $\underline{s_1^v}$ et $\underline{s_2^v}$ par les méthodes de la géométrie descriptive, et la construction nous démontre elle-même que l'un de ces points sera situé au-dessus de la ligne de terre LT et que l'autre sera situé en dessous de la même ligne.

Après avoir démontré qu'il existe toujours sur le grand axe $\overline{aa'}$ de l'ellipse A deux points tels que $\underline{s_1^h}$ et $\underline{s_2^h}$, démontrons qu'il ne peut pas en exister de semblables sur le petit axe $\overline{bb'}$ de la même ellipse A, et ensuite sur aucun diamètre de cette courbe.

Si (*fig.* 5) l'on mène au point b, extrémité du petit axe, une tangente à la courbe A coupant la tangente θ, menée au sommet a de cette courbe, en un point t, on voit de suite que le cercle 6'' décrit du point t comme centre, et avec $\overline{tb}$ pour rayon, enveloppera le sommet a; en sorte que le point a étant intérieur (et il sera toujours intérieur) au cercle 6'', on ne pourra pas mener par ce point a des tangentes à ce cercle 6''. Ainsi il est démontré que l'on ne pourra pas trouver sur le petit axe d'une ellipse, des points analogues aux points $\underline{s_1^h}$ et $\underline{s_2^h}$ dont nous avons démontré l'existence sur le grand axe de cette courbe.

Lorsque l'on coupe un cône de révolution Σ par un plan de manière à obtenir une section elliptique E, on ne peut couper ce cône Σ par un plan perpendiculaire à son axe de rotation suivant un cercle tangent à l'ellipse E que de deux manières différentes; les deux plans sécants (évidemment parallèles entre eux) passeront par les extrémités du grand axe de l'ellipse E; il est donc impossible de trouver sur un diamètre de l'ellipse A, des points tels que ceux s_1^h et s_2^h.

D'ailleurs un diamètre de l'ellipse A, faisant avec sa tangente conjuguée un angle qui n'est jamais droit (excepté lorsque le diamètre n'est autre que le petit ou le grand axe de l'ellipse), le centre du cercle qui serait tangent à l'ellipse ne pourrait jamais être situé sur le diamètre considéré (*fig.* 6).

Ce qui précède nous permet de démontrer que l'on aura toujours pour l'ellipse $\overline{as_1^h} = \overline{s_2^h a'}$, ou, en d'autres termes, que les points s_1^h et s_2^h sont équidistants du centre de l'ellipse.

En effet :

Ayant décrit (*fig.* 7) du point s_1^h comme centre et avec $\overline{as_1^h}$ pour rayon un cercle D_1, nous savons que si nous prenons un point x^h arbitraire sur l'ellipse A ou E^h, en menant au point x^h une tangente à cette ellipse A, elle coupera la tangente θ (menée au point a) en un point m tel que, si par ce point on mène une tangente au cercle D_1, laquelle le touchera en un point y_1, la droite $\overline{y_1 x^h}$ passera par le point s_1^h.

En prenant un autre point x'^h (*fig.* 7) sur l'ellipse A on obtiendra un second cercle ϵ'_1 lequel coupera le cercle D_1 en un point y'_1 et la droite $\overline{x'^h y'_1}$ passera encore par le point s_1^h.

Il est évident sur la figure que les droites $\overline{x^h y_1}$, $\overline{x'^h y'_1}$, sont tangentes respectivement aux cercles ϵ_1, ϵ'_1, en les points y_1, y'_1.

Mais de chacun des points x^h, x'^h,... de l'ellipse A on peut mener deux tangentes aux cercles ϵ_1, ϵ'_1,... lesquelles droites passeront respectivement par les points s_1^h, s_2^h.

Quelle que soit donc la position du point x^h sur l'ellipse A, l'on obtiendra toujours, par la même construction, les deux mêmes points s_1^h et s_2^h.

Si donc on prend pour point x^h, le point b extrémité du petit axe de l'ellipse A, on obtiendra aussi les points s_1^h et s_2^h.

Or pour ce point b, on devra mener en b une tangente à l'ellipse A, laquelle coupera la tangente θ en un point n, et décrire de ce point n comme centre, et avec $\overline{na}$ pour rayon, un cercle γ. (Il est évident que le rayon du cercle γ est égal au demi petit axe de l'ellipse A); ensuite on mènera du point b deux tangentes au cercle γ, lesquelles couperont le grand axe $\overline{aa'}$ de l'ellipse donnée A en les deux points s_1^h

et s_2^h; et il est évident (en lisant sur la figure) que l'on aura $\overline{s_1^h a} = \overline{s_2^h a'}$, ce qu'il fallait démontrer (*).

Nous donnerons le nom de *foyers* aux deux points $\overline{s_1^h}$ et $\overline{s_2^h}$; et nous nommerons ***rayon vecteur*** la droite menée de l'un de ces foyers à un point de l'ellipse, et ***rayons vecteurs conjugués***, les rayons vecteurs menés de chacun des foyers à un même point de l'ellipse.

Ce qui précède étant bien compris, nous allons démontrer les diverses propriétés principales dont jouit *l'ellipse*.

§ II.

Puisqu'en vertu de ce qui précède, étant donnée une ellipse A (*fig.* 8), 1° si l'on mène en un de ses points x^h la tangente, laquelle coupe la droite θ tangente au sommet a de l'ellipse, en un point m; 2° si du point m comme centre et avec $\overline{ma}$ pour rayon on décrit un cercle $\mathcal{C}$; 3° si du point x^h on mène deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$ et touchant ce cercle en deux points y' et y'', puisque ces tangentes viennent couper le grand axe $\overline{aa'}$ de l'ellipse en deux points s_1^h et s_2^h qui sont les foyers de cette ellipse, il est évident que la tangente mx^h *à l'ellipse* divise en deux parties égales l'angle $\widehat{s_1^h x^h y''}$ de ces deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$, et que dès lors la normale menée au point x^h divise en deux parties égales l'angle $\widehat{s_1^h x^h s_2^h}$ des deux rayons vecteurs menés au point x^h de l'ellipse. On peut donc énoncer le théorème suivant :

(*) D'après ce qui précède, pour construire les foyers d'une ellipse A (*fig.* 7 *bis*) dont on connait le grand axe $\overline{aa'}$ et le petit axe $\overline{bb'}$, on devra d'abord mener au sommet a une tangente θ à l'ellipse et au sommet b, une tangente δ qui coupera la droite θ en un point m; ensuite on décrira, du point m comme centre, et avec $\overline{ma}$ pour rayon, un cercle $\mathcal{C}$; enfin menant du sommet b (extrémité du petit axe) deux tangentes au cercle $\mathcal{C}$, ces tangentes couperont le grand axe $\overline{aa'}$ en deux points f et f' qui seront des *foyers* demandés.

Dans cette construction, on a deux triangles semblables, savoir : myb et obf, ces deux triangles sont rectangles, l'un en y et l'autre en o; de plus les angles $\widehat{of'b}$ et $\widehat{mby}$ sont égaux comme ***angles correspondants***, puisque les droites bm et of' sont parallèles.

On aura donc la proportion :

$$\overline{ob} : \overline{my} :: \overline{of'} : \overline{by}$$

Désignant le demi grand axe de l'ellipse par a et le demi petit axe par b, on aura, en remarquant que :

$$1° \quad \overline{my} = \overline{ma} = \overline{ob}$$

$$2° \quad by = \sqrt{\overline{bm}^2 - \overline{my}^2}$$

$$b : b :: \overline{of'} : \sqrt{a^2 - b^2}$$

d'où

$$of' = \sqrt{a^2 - b^2}$$

résultat connu et qui permet de construire directement les *foyers* d'une ellipse, connaissant ses axes.

Théorème. *La normale menée en un point d'une ellipse divise en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs qui se croisent en ce point.*

Construction par points de l'ellipse.

Ce qui précède nous permet de construire par points une ellipse dont on connaît le grand axe et les deux foyers.

En effet :

Étant donnés (*fig.* 7 *ter*) le grand axe $\overline{aa'}$ et les foyers f et f' de l'ellipse, on mènera par l'un des sommets a de la courbe une perpendiculaire θ à l'axe $\overline{aa'}$; on prendra sur cette droite θ une suite de points m, m', m'',... et de chacun d'eux comme centre et avec $\overline{ma}$, $\overline{m'a}$, $\overline{m''a}$,..... comme rayon, on décrira les divers cercles δ, δ', δ'',..... tous tangents entre eux et au grand axe $\overline{aa'}$, en le point a; des points f et f', on mènera respectivement deux tangentes aux cercles δ, δ',..... lesquelles se croiseront respectivement en les points x, x',..... qui appartiendront à l'ellipse, et de plus les tangentes en ces points x, x',..... de l'ellipse, ne seront autres que les droites $\overline{mx}$, $\overline{m'x'}$.....

On obtiendra ainsi les points qui appartiennent à la demi-ellipse située au dessous du grand axe $\overline{aa'}$; pour obtenir les points de la demi-ellipse située en dessus de cet axe $\overline{aa'}$, il faudra tracer des cercles tangents en a à cet axe $\overline{aa'}$, mais ayant leurs centres situés sur la partie de la droite θ qui est au-dessus de cet axe $\overline{aa'}$ (*).

§ III.

Étant donnés une ellipse A (*fig.* 9) et son grand axe $\overline{aa'}$ et ses deux foyers f et f', nous pouvons décrire quatre cercles, dont, 1° deux auront pour centre commun le point f et pour rayon l'un $\overline{af}$ et l'autre $\overline{a'f}$ (je désignerai le premier cercle par D et le second par C); dont, 2° deux auront pour centre commun le foyer f' et pour rayon l'un $\overline{a'f'}$ et l'autre $\overline{af'}$ (je désignerai le premier par D' et le second par C').

Ainsi on a deux cercles D et D' enveloppés par l'ellipse A, et deux cercles C et C' qui enveloppent cette courbe A.

Cela posé :

Regardant l'ellipse A (*fig.* 10) comme la section droite d'un cylindre vertical Σ, nous pourrons couper ce cylindre par deux plans P et P', dont les traces horizontales seront H^p et $H^{p'}$ respectivement tangentes aux sommets a et a' de l'ellipse A.

(*) Plus loin nous montrerons comment l'on doit employer cette construction pour tracer sur le terrain et par *points*, une ellipse dont on connaît la position des sommets et des foyers au moyen de *piquets* ou *jalons*.

Nous aurons donc pour sections dans le cylindre Σ deux ellipses E et E′, qui se projetteront orthogonalement sur le plan horizontal en la même ellipse A.

Nous pouvons toujours supposer que les plans P et P′ font des angles égaux avec le plan horizontal; alors les deux courbes E et E′ seront deux ellipses de même grandeur.

Cela posé :

Nous pouvons envelopper l'ellipse E et le cercle D par un cône de révolution S, dont l'axe sera vertical et dont le sommet s sera projeté en f ou s^h et en s^v.

Nous pourrons envelopper l'ellipse E et le cercle C par un cône de révolution S′ dont l'axe sera vertical, et dont le sommet s' sera projeté en f' ou s'^h et en s'^v.

Nous pourrons envelopper l'ellipse E′ et chacun des cercles D′ et C par deux cônes de révolution, ayant chacun leur axe vertical et leurs sommets; s_1 et s_1' seront horizontalement projetés pour le premier, s_1 appartenant au cône (E′, D′) en f', et pour le second, s' appartenant au cône (E′, C) en f.

Deux des quatre sommets de ces cônes seront au-dessous et deux seront au-dessus du plan horizontal; les deux premiers, ainsi que les deux seconds, seront équidistants du plan horizontal, mais la distance au plan horizontal des sommets situés en dessous ne sera pas égale à celle des sommets situés en dessus. Voy. l'*Épure* (*fig.* 10).

Cela posé :

Faisons passer un plan vertical M par le grand axe $\overline{aa'}$ de l'ellipse donnée A. Ce plan M contiendra les sommets s, s', s_1, s_1' des quatre cônes dont nous avons parlé ci-dessus. De plus, ce plan M coupera chacun des quatre cercles D, C, D′, C′ tracés sur le plan de l'ellipse A, et dès lors situés sur le plan horizontal de projection en deux points; ainsi ce plan M coupera les cercles D en les points a et d, C en les points a et c, D′ en les points a' et d', C′ en les points a' et c'.

Et il est évident que l'on aura, f et f' étant les foyers de l'ellipse A et les centres de ces cercles,

$$\overline{fa} = \overline{fd},\ \overline{f'a'} = \overline{f'd'},\ \overline{f'a} = \overline{f'c},\ \overline{fa'} = \overline{fc}$$

De plus, le plan M coupera : 1° chacun des quatre cônes suivant deux génératrices droites, et 2° les plans P et P′ des ellipses E et E′ suivant les grands axes de ces courbes, savoir suivant le grand axe $\overline{aa_1}$ de l'ellipse E et $\overline{a'a'_1}$ de l'ellipse E′.

Toutes les lignes droites composant cette section faite par le plan M sont tracées sur la *fig.* 10; et d'après ce qui précède, on voit de suite que les génératrices droites $\overline{sa}$ et $\overline{sd}$ du cône S, enveloppant les courbes E et D, sont respectivement parallèles aux génératrices droites $\overline{s'c'}$ et $\overline{s'a}$ du cône S′ enveloppant les courbes E et C′.

On voit aussi que même chose aura lieu pour les cônes qui enveloppent : 1° les courbes E et D′, E et C ; 2° les courbes E′ et D, E′ et C′ ; 3° les courbes E′ et D′, E′ et C.

Nous pourrons donc conclure de ce qui précède : 1° que les quatre cônes ont le même angle au sommet (nous désignerons ce demi-angle au sommet par α) ; 2 que chaque génératrice droite de ces cônes fait avec le plan horizontal de projection un angle constant que nous désignerons par λ.

Cela posé :

Si l'on prend (*fig.* 11) sur l'ellipse E un point x arbitraire, ce point se projettera en x^h sur l'ellipse A, et les portions sx de la génératrice droite du cône S et $s'x$ de la génératrice droite du cône S′ se projetteront respectivement sur le plan horizontal en les rayons vecteurs $\overline{fx^h}$ et $\overline{f'x^h}$ de l'ellipse A.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, on aura :

$$\overline{fx^h}=\overline{sx}\,.\cos\lambda \qquad \text{et} \qquad \overline{f'x^h}=\overline{s'x}\,.\cos\lambda$$

Si par le point x et le sommet s on mène deux plans parallèles entre eux et horizontaux, ils couperont l'axe vertical du cône S′ en deux points x_1 et q, qui seront respectivement les projections des points x et s sur cet axe, et $\overline{s'a_1}$ sera la projection de la génératrice $s'x$, et qx_1 sera la projection de la génératrice $\overline{sx}$ sur cet axe.

On aura donc :

$$\overline{s'x_1}=\overline{s'x}\,.\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \overline{qx_1}=\overline{sx}\,.\cos\alpha$$

Or, quelle que soit la position du point x sur l'ellipse E, on aura toujours $\overline{s'x_1}+\overline{qx_1}$ $=$ constante $=$ K.

K sera égal à la distance existant entre les deux plans horizontaux menés par les sommets s et s' des cônes S et S′.

On aura donc :

$$\overline{sx}+\overline{s'x}=\frac{K}{\cos\alpha}$$

Et par suite :

$$\frac{K\,.\cos\lambda}{\cos\alpha}=\overline{fx^h}+\overline{f'x^h}$$

Ainsi l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Dans toute ellipse, la somme des rayons vecteurs menés des foyers à un point quelconque de la courbe est constante.*

Et comme si le point x^h n'était autre que l'un des sommets a de l'ellipse A, on aurait $\overline{af}+\overline{af'}=\overline{aa'}$, puisque l'on sait que $\overline{af}=\overline{a'f'}$; on voit que l'on peut dire que,

dans toute ellipse, la somme des rayons vecteurs est constante et égale au grand axe de la courbe.

Les angles α et λ sont des angles complémentaires; par conséquent on a :

$$\cos\alpha = \sin\delta$$

Dès lors on aura :

$$\overline{aa'} = \frac{K}{\operatorname{tang}\lambda}$$

On peut démontrer le théorème précédent en se servant de deux cônes ayant leurs sommets situés d'un même côté par rapport au plan horizontal, et ainsi (*fig.* 12) en employant les cônes S_1' et S' qui enveloppent, le premier l'ellipse E' et le cercle C, et le second l'ellipse E et le cercle C'.

On sait que les sommets s_1' et s' de ces deux cônes sont équidistants du plan horizontal.

Si du point x^h on élève une verticale, elle coupera l'ellipse E' au point x' et l'ellipse E au point x.

En sorte que la génératrice $\overline{s_1'x}$ se projettera suivant le rayon vecteur $\overline{fx^h}$, et la génératrice $\overline{s'x}$ se projettera suivant le rayon vecteur $\overline{f'x^h}$.

Or les angles au sommet des deux cônes S_1' et S' sont égaux et les axes de ces cônes sont verticaux; on aura donc :

$$\overline{fx^h} = \overline{s_1'x'}.\cos\lambda \qquad \text{et} \qquad \overline{f'x^h} = \overline{s'x}.\cos\lambda$$

Menons par les points x et x' deux plans horizontaux coupant l'axe du cône S' en les points x_1 et x_1'; on voit de suite que $\overline{s'x_1}$ sera la projection sur l'axe de la génératrice $\overline{s'x}$ du cône S', et que $\overline{s'x_1'}$ sera la projection sur le même axe de la génératrice $\overline{s_1'x'}$ du cône S'_1. On aura donc :

$$(\overline{s'x} + \overline{s_1'x'})\cos\lambda = (\overline{s'x_1} + \overline{s'x_1'})$$

Or si l'on mène par les sommets a_1 et a_1' des ellipses E et E' un plan perpendiculaire au plan M, nous savons que ce plan sera horizontal, puisque les ellipses E et E' ont même grandeur, leurs plans P et P' étant également incliné (mais en sens contraire) sur le plan horizontal; ce plan coupera l'axe du cône S' en un point q, et le plan horizontal de projection qui passe par les sommets a et a' des mêmes ellipses E et E' coupera le même axe en un point p, qui ne sera autre que le foyer f' de l'ellipse A.

Or l'on voit de suite sur la *fig.* 12 que l'on a : $\overline{qx_1} = \overline{px_1'}$, et que cela a lieu quelle que soit la position du point x^h sur l'ellipse A.

On aura donc :

$$\overline{s'x_1} = \overline{s'q} + \overline{qx_1} \qquad \text{et} \qquad \overline{s_1'x_1'} = \overline{s'q} + \overline{qx_1'}$$

d'où :

$$(\overline{s'x_1} + \overline{s'x'_1}) = 2.\overline{s'q} + \overline{qx_1} + \overline{qx'_1} = 2.\overline{s'q} + \overline{qp}$$

ou bien :

$$(\overline{s'x_1} + \overline{s'x'_1}) = \overline{s'q} + \overline{s'p} = \text{constante} = \text{H}.$$

par conséquent, on a :

$$\overline{fx^h} + \overline{f'x^h} = \frac{\text{H}.\cos\lambda}{\cos\alpha}. = \overline{aa'}$$

Ce qui vérifie le théorème énoncé ci-dessus.

Et l'on voit aussi que l'on a K = H ; et on lit en effet ce résultat sur la figure située dans le plan M (*fig.* 10, 11 et 12).

§ IV.

D'après ce qui précède, nous savons que si l'on a une ellipse A ayant son centre en o et $\overline{oa}$ pour demi grand axe et $\overline{ob}$ pour demi petit axe (*fig.* 13), menant au sommet a la tangente θ à cette courbe, et traçant une série de cercles D, D',... tangents entre eux et à cette ellipse A en ce même sommet a (ces divers cercles ayant chacun, dès lors, son centre situé sur le grand axe aa' de la courbe donnée A) : 1° si l'on prend un point arbitraire x^h sur l'ellipse A, et si l'on mène en ce point x^h une tangente à cette courbe A, laquelle tangente coupera la droite θ au point m; 2° si du point m comme centre et avec $\overline{ma}$ pour rayon on décrit un cercle $\mathcal{C}$ coupant la droite θ en un point z et les divers cercles D, D',... en les points y, y_1,..., on sait, dis-je, que les droites my, my_1,... seront des tangentes aux cercles D, D',... et que les droites x^hy, x^hy_1,... iront couper le grand axe $\overline{aa'}$ et respectivement en les points s^h, s'^h,... qui seront les projection horizontales des divers sommet s, s',... des cônes qui enveloppent l'ellipse E de l'espace (dont l'ellipse donnée A est la projection horizontale et orthogonale) avec chacun des cercles D, D',...

Le point x^h étant arbitraire, on peut prendre l'extrémité b du petit axe de l'ellipse A, et menant en ce point b une tangente à la courbe A, elle coupera la droite θ en un point m'; si donc du point m' comme centre et avec $\overline{m'a}$ pour rayon on décrit un cercle $\mathcal{C}'$, il coupera la droite θ en un point z' et les divers cercles D, D',... en les points y', y_1',... et les droites x^hy', x^hy_1',... iront couper le grand axe $\overline{aa'}$ en les mêmes points s^h, s'^h,... trouvés ci-dessus.

En sorte qu'étant donné un cercle D, on peut déterminer le point s^h en employant le point b au lieu d'employer un point x^h arbitraire.

Cela posé :

Le rayon de chacun des cercles D, D',... peut avoir toute grandeur; ce rayon peut donc être infini, et alors la droite θ représentera l'un des cercles de la série D, D',... elle représentera, dans cette série, le cercle ayant un rayon infini.

Dès lors on devra, pour un point x^h arbitraire prendre le point z en lequel le cercle ϐ coupe le cercle θ, et l'on devra prendre pour le point b le point z' en lequel le cercle θ est coupé par le cercle ϐ'.

De sorte que les droites zx^h et $z'b$ devront se couper en un même point situé sur le grand axe $\overline{aa'}$, et ce point sera la projection horizontale et orthogonale du sommet du cône Δ qui enveloppe l'ellipse E et le cercle θ de rayon infini.

Or il est évident que ce cône Δ n'est autre que le plan de l'ellipse E, et il est évident que la droite $z'b$ ira couper l'axe aa' au point a', second sommet de l'ellipse A.

Ainsi, le plan P de l'ellipse E représente un cône Δ, et son sommet doit être au sommet a_1 de l'ellipse E (sommet a_1 projeté horizontalement en le sommet a^l de l'ellipse A) pour que ce plan P ou cône Δ appartienne à la série des cônes enveloppant l'ellipse E avec chacun des cercles (à rayon fini) D, D',...

Ainsi, il est démontré que les droites za^h, $z'b$,... passent par le second sommet a' de l'ellipse donnée A.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Étant donnés une ellipse* A *et son grand axe* $\overline{\mathrm{aa'}}$, *si l'on mène au sommet* a *une tangente* θ *à cette courbe; si l'on unit par une droite le second sommet* a' *avec un point quelconque* $\mathrm{x^h}$ *de cette courbe* A, *cette droite coupera la tangente* θ *en un point* z, *et le point* m, *milieu de la droite* $\overline{\mathrm{za}}$, *sera le point en lequel la tangente menée à l'ellipse* A *au même point* $\mathrm{x^h}$ *coupera la droite* θ (*).

(*) En se servant de l'*analyse* de Descartes, on démontre de suite ce théorème; en effet (*fig.* 13 *bis*), soit :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

l'équation de l'ellipse A, l'équation de la tangente s en un point n de cette courbe sera :

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1 \qquad (2)$$

(représentant par x' et y' les coordonnées du point n).

Si l'on cherche le point en lequel la tangente s (ayant pour équation l'équation (2)) coupe la perpendiculaire θ menée à l'extrémité p du grand axe de l'ellipse, il suffira de faire :

$$x=a \qquad (3)$$

dans l'équation (2), et l'on aura :

$$\frac{x'}{a}+\frac{yy'}{b^2}=1$$

d'où l'on tire :

§ V.

Diverses manières de construire la tangente en un point d'une ellipse.

D'après ce qui précède, nous pouvons construire la tangente en un point d'une ellipse de trois manières différentes.

Première construction. Étant donnés une ellipse A (*fig.* 14), ses axes $\overline{aa'}$ et $\overline{bb'}$ et ses foyers f et f', pour construire la tangente en un point quelconque x, on mènera les rayons vecteurs $\overline{xf}$ et $\overline{xf'}$ et l'on divisera l'angle $\widehat{fxf'}$ en deux parties égales par la droite xp, cette droite xp étant normale en x à l'ellipse, la droite xq perpendiculaire à xp sera la tangente demandée.

Deuxième construction. Étant donnés une ellipse A, ses axes $\overline{aa'}$ et $\overline{bb'}$ et ses foyers f et f', construire en un de ses points x la tangente; du foyer f comme centre (*fig.* 15), et avec le rayon $\overline{fa}$ on décrira un cercle D; on mènera au sommet a une droite θ perpendiculaire au grand axe $\overline{aa'}$ (cette droite θ sera tangente à l'ellipse A en le sommet a); on unira le point x donné avec le foyer f par une droite qui coupera le cercle D au point y; on mènera au point y une tangente au cercle D, laquelle coupera la droite θ en un point m et en unissant les deux points m et x, on aura la tangente demandée.

Troisième construction. Étant donnés une ellipse A et son grand axe $\overline{aa'}$, on mè-

---

$$y = \frac{(a - x')\,b^2}{ay'} \qquad (4)$$

Ainsi l'on aura en (3) et (4) les coordonnées du point m en lequel la tangente δ coupe la droite θ.

Unissant le point n avec le point p' second sommet de l'ellipse, on aura une droite qui coupera la droite θ en un point q, et si le théorème subsiste on devra avoir :

$$\overline{pp'} : \overline{pq} :: \overline{nr} : \overline{rp'}$$

ou en remplaçant $\overline{pp'}$ et $\overline{pq}$, $\overline{nr}$ et $\overline{rp'}$ par leurs valeurs :

$$2a : \frac{2(a) - x')b^2}{ay'} :: a + x' : y' \qquad (5)$$

d'où :

$$2a \,.\, y' = \frac{2\,.(a - x')\,(a + x')\,b^2}{ay'}$$

d'où, après réduction :

$$a^2y'^2 = a^2b^2 - b^2x'^2 \qquad (6)$$

La proportion (5) est donc exacte, puisqu'elle conduit à l'équation (6) qui est exacte, puisqu'elle n'est autre que l'équation de l'ellipse.

nera au point *a* sommet de l'ellipse, une tangente θ, laquelle droite θ sera perpendiculaire au grand axe aa'; on unira le second sommet a' (*fig.* 16) avec le point x (donné sur l'ellipse) par une droite qui coupera la tangente θ en un point z; on divisera la droite $\overline{az}$ en deux parties égales par un point m; en unissant les points m et x par une droite, on aura la tangente demandée.

§ VI.

Étant donnés une ellipse A et son grand axe $\overline{aa'}$ et ses foyers f et f' (*fig.* 17); ayant mené en les sommets a et a' des droites θ et θ' perpendiculaires à l'axe aa'; ayant tracé du foyer f comme centre et 1° avec le rayon $\overline{fa}$ un cercle D, et 2° avec le rayon $\overline{fa'}$ un cercle C; si par le foyer f on mène dans le plan de l'ellipse A une perpendiculaire au grand axe $\overline{aa'}$, cette perpendiculaire coupera le cercle D en un point y, l'ellipse A en un point x et le cercle C en un point z.

Si l'on mène des tangentes aux cercles D et C et respectivement aux points y et z, on aura des droites parallèles entre elles et au grand axe $\overline{aa'}$.

La tangente en y au cercle D coupera la droite θ au point m, et la tangente en z au cercle C coupera la droite θ' au point m'; et, d'après ce qui a été dit ci-dessus, on sait que la droite $\overline{mm'}$ sera tangente en x à l'ellipse A.

Or il est évident que l'on a :

$$\overline{ma} = \overline{af} \quad \text{et} \quad \overline{m'a'} = \overline{a'f}.$$

donc l'on a :

$$\overline{ma} + \overline{m'a'} = \overline{aa'} = \text{le grand axe de l'ellipse A.}$$

Si l'on avait mené une tangente au sommet b, extrémité du petit axe de l'ellipse A, cette tangente aurait coupé la droite θ en un point n et la droite θ' en un point m', et l'on aurait évidemment :

$$\overline{na} + \overline{n'a'} = \overline{bb'} = \text{le petit axe de l'ellipse A.}$$

Si au contraire on considère le point a, extrémité du grand axe $\overline{aa'}$, la tangente en ce point se confondra avec la droite θ et coupera la droite θ' à l'infini.

On peut donc énoncer, d'après ce qui précède, le théorème suivant :

Théorème. *Étant donnés une ellipse et son grand axe, ayant mené des tangentes* θ *et* θ' *aux extrémités de ce grand axe, si l'on construit la tangente en un point* x *de l'ellipse, cette tangente coupera les droites* θ *et* θ' *en les points* m et m'; *et l'on aura :*

1° $\overline{ma} + \overline{m'a'} < \overline{aa'}$, si le point x *se projette sur le grand axe entre le centre de l'ellipse et l'un de ses foyers; 2° $\overline{ma} + \overline{m'a'} = \overline{aa'}$ si le point* x *se projette sur l'un des foyers; 3° $\overline{ma} + \overline{m'a'} > \overline{aa'}$ si le point* x *se projette sur le grand axe entre l'un des foyers et le sommet adjacent à ce foyer.*

§ VII.

Propriétés principales de l'hyperbole.

Nous n'aurons pas besoin, en nous occupant de l'hyperbole, d'entrer dans tous les détails de construction, ainsi que nous l'avons fait lorsque nous nous sommes occupé de l'ellipse; car il est évident que nous devons retomber sur les mêmes raisonnements géométriques, et dès lors il est permis d'abréger, tout ce qui a été dit au sujet de l'ellipse étant bien compris.

Étant donnés une hyperbole A, ses deux asymptotes I et I′ (*fig.* 18) et son axe transverse $\overline{aa'}$ supposé prolongé indéfiniment à droite et à gauche des deux sommets a et a'; ayant mené en chacun des sommets a et a' des tangentes à l'hyperbole, on aura deux droites θ et θ' perpendiculaire à l'axe $\overline{aa'}$.

Cela posé :

Si l'on considère l'hyperbole A comme la base ou section droite d'un cylindre vertical Σ, nous pourrons couper ce cylindre Σ par un plan P ayant la tangente θ pour trace horizontale H^{r}, et l'on obtiendra pour section une hyperbole E ayant la courbe A pour projection horizontale E^{h}.

Nous pouvons prendre sur la droite $\overline{aa'}$ un point d_1 et le considérer comme le centre d'un cercle D_1 tangent à la courbe A en son sommet a, et les deux courbes D_1 et E seront enveloppées par un cône S_1 qui sera en général oblique et dont le sommet s_1 se projettera horizontalement en un point s_1^{h} distinct du centre d_1.

Il sera toujours possible de placer la courbe E sur deux cônes de révolution, ayant chacun pour axe de rotation une droite verticale; et en effet, prenant un point x^{h} sur l'hyperbole A ou E^{h}, et menant une tangente en ce point, elle coupera la droite θ ou H^{r} en un point m; décrivant de ce point m comme centre et avec $\overline{ma}$ pour rayon, un cercle δ, il suffira de mener du point x^{h} deux tangentes au cercle δ, et ces tangentes couperont l'axe $\overline{aa'}$ en deux points f et f' qui seront équidistants des sommets a et a', en sorte que l'on aura : $\overline{fa} = \overline{f'a'}$.

En effet (*fig.* 19) :

Quel que soit le point x^{h} pris sur l'hyperbole A, une construction analogue nous conduira toujours à déterminer les mêmes points f et f'. Si donc nous considérons le point situé à l'infini sur l'une des branches de la courbe, la tangente en ce point ne

sera autre que l'asymptote I ou I', laquelle coupera la droite θ en un point p, et décrivant du point p comme centre et avec $\overline{pa}$ pour rayon un cercle δ, les deux tangentes menées à ce cercle δ et du point situé à l'infini, et par conséquent menées à ce cercle δ parallèlement à l'asymptote I', couperont l'axe transverse aa' en les foyers f et f'; et il est évident par la *fig.* 19 que l'on a : $\overline{fa}=\overline{f'a'}$ (*).

Cela posé :

Ces deux points ou *foyers* f et f' seront tels que si l'on décrit (*fig.* 18) :

1° Du point f comme centre et avec $\overline{fa}$ pour rayon un cercle D ;

2° Du point f' comme centre et avec $\overline{f'a}$ pour rayon un cercle C', les courbes D et E seront enveloppées par un cône S dont le sommet s se projettera orthogonalement en f et les courbes C' et E seront enveloppées par un cône S' dont le sommet s' se projettera orthogonalement en f' (voy. la *fig.* 18).

On lit de suite sur l'*épure* (18) : 1° que les deux cônes S et S' ont leurs sommets situés au-dessus du plan horizontal ; 2° que ces deux cônes ont même angle au sommet ; par conséquent toutes les génératrices droites de ces deux cônes feront le même angle α avec le plan horizontal et le même angle λ avec une droite verticale.

Par conséquent, si l'on prend un point x sur l'hyperbole E, et si l'on projette sur l'axe vertical du cône S', 1° le sommet s du cône S en p, et 2° le point x de l'hyperbole E en x_1, on voit de suite que l'on aura :

(*) Ayant construit les *foyers* f et f' de l'hyperbole, cherchons la valeur de la distance de l'un de ces foyers au centre de la courbe.

Je dis que l'on aura : $\overline{of}=\overline{op}$ (*fig.* 19 *bis*).

Désignons $\overline{oa}$ par a et $\overline{ap}$ par b.

Menons par le foyer f une parallèle à qp et coupant la droite mo en un point m.

Si l'on joint les points a et m par une droite, je dis que cette droite est parallèle à qp.

En effet, on a : $\overline{fq}=\overline{fa}$ comme tangentes menées d'un même point extérieur f au cercle δ.

Et comme les droites fm et pq sont parallèles par construction, ainsi que les droites fq et po, il s'ensuit que l'on a :

$$\overline{mp}=\overline{qf}=\overline{fa}$$

de plus, on a :

$$\widehat{pfo}=\widehat{pfq} \quad \text{et} \quad \widehat{pfq}=\widehat{fpo}$$

Donc les angles $\widehat{pfo}$ et $\widehat{fpo}$ sont égaux, par conséquent le triangle fop est isocèle ; et l'on a :

$$\overline{of}=\overline{op}$$

Et puisque :

$$\overline{af}=\overline{mp}, \quad \text{on a :} \quad \overline{ao}=\overline{om}$$

donc les droites am et fp sont parallèles, ce qu'il fallait démontrer.

Or $$\overline{op}^2=\overline{oa}^2+\overline{ap}^2=a^2+b^2 \quad \text{donc} \quad \overline{of}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\overline{s'x_1} - \overline{px_1} = \text{constante} = \text{K}.$$

et comme l'on a :

$$\overline{s'x} \cos\lambda = \overline{s'x_1} \qquad \text{et} \qquad \overline{sx} \,.\, \cos\lambda = \overline{px_1}$$

il s'ensuit que :

$$(\overline{s'x} - \overline{sx}) = \frac{\text{K}}{\cos\lambda}$$

et comme l'on a :

$$\overline{s'x} \,.\, \cos\alpha = \overline{f'x^h} \qquad \text{et} \qquad \overline{sx} \,.\, \cos\alpha = \overline{fx^h}$$

on aura :

$$\overline{f'x^h} - \overline{fx^h} = \frac{\text{K} \,.\, \cos\alpha}{\cos\lambda} = \text{constante}.$$

Et comme cela a lieu, quel que soit le point x^h, on voit que pour le sommet a on aura :

$$\overline{aa'} = \frac{\text{K} \,.\, \cos\alpha}{\cos\lambda}$$

Ainsi, l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Dans l'hyperbole, la différence des rayons vecteurs est constante et elle est égale à l'axe transverse.*

Et comme pour un autre point x'^h de l'hyperbole E^h ou A, on aurait un autre cercle δ' qui conduirait aux mêmes foyers f et f', on voit de suite sur la *fig.* 18 que l'on a : $\widehat{fx^hm} = \widehat{f'x^hm}$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Pour une hyperbole, la tangente en un de ses points divise en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs se croisant en ce point.*

Ce qui précède nous permet de construire par *points* une hyperbole.

Construction par points de l'hyperbole.

Étant donnés l'axe transverse $\overline{aa'}$ et les foyers f et f' d'une hyperbole (*fig.* 19 *ter*), on mènera par l'un des sommets a une droite θ perpendiculaire à l'axe transverse $\overline{aa'}$; de divers points m, m',... pris sur la droite θ, et avec les rayons $\overline{ma}$, $\overline{m'a}$,... on décrira une suite de cercles δ, δ',... tous tangents entre eux et au point a; des foyers f et f' on mènera des tangentes à ces cercles δ,... lesquelles se couperont respectivement en les points x, x',... qui appartiendront à l'une des branches de l'hyperbole, et les droites mx, $m'x'$,... seront des tangentes à cette branche en les points x,x',...

Les points x, x',... que nous obtiendrons appartiendront à la demi-branche de gauche de l'hyperbole, ainsi qu'à la partie de cette branche qui est située au-dessous de l'axe transverse $\overline{aa'}$; cependant on doit remarquer qu'en faisant croître les rayons des cercles δ,... depuis zéro, il arrivera que pour un certain rayon $r_{,}$, le cercle $\delta_{,}$ sera tel, que les tangentes qui lui seront menées des foyers f et f', seront parallèles et donneront la direction de l'asymptote à l'axe inférieur de la branche de gauche de l'hyperbole; en prenant un cercle $\delta_{,}'$ d'un rayon $r_{,}' > r_{,}$, les tangentes à ce cercle iront se couper à droite de la tangente θ et détermineront par leur intersection un point de l'arc supérieur de la branche de droite de l'hyperbole; pour obtenir les arcs supérieurs de la branche de gauche et inférieur de la branche de droite de l'hyperbole, il faudrait tracer des cercles δ,... ayant leurs centres situés sur la partie de la droite θ qui est au-dessus de l'axe transverse $\overline{aa'}$.

Déterminons maintenant la longueur $r_{,}$ du rayon du cercle $\delta_{,}$ pour lequel les tangentes qui lui sont menées des foyers f et f' se trouvent parallèles entre elles.

Supposons le problème résolu (*fig.* 19 quater), les tangentes fy et $f'y'$ au cercle $\delta_{,}$ seront parallèles; dès lors la corde yy' sera un diamètre de ce cercle et ce diamètre yy' coupera la droite θ en $m_{,}$, centre du cercle $\delta_{,}$.

Joignant les points f et $m_{,}$, f' et $m_{,}$, on aura deux triangles $fam_{,}$ et $f'am_{,}$, tous deux rectangles en a.

Les triangles $fam_{,}$ et $fym_{,}$ seront égaux et superposables, on aura donc :

$$\widehat{ym_{,}f} = \widehat{fm_{,}a}$$

De même les triangles $af'm_{,}$ et $f'y'm_{,}$ seront égaux et superposables, on aura donc :

$$\widehat{am_{,}f'} = \widehat{f'm_{,}y'}$$

Or pour que les tangentes fy et $f'y'$ soient parallèles, il faut que les quatre angles

$$\widehat{yfm_{,}},\ \widehat{fm_{,}a},\ \widehat{am_{,}f'},\ \widehat{f'm_{,}y'},$$

valent en somme deux angles droits, il faut donc que les deux angles $\widehat{fm_{,}a}$ et $\widehat{am_{,}f'}$ valent en somme un angle droit; en d'autres termes, il faut que l'angle $\widehat{fm_{,}f'}$ soit droit.

Pour déterminer le centre $m_{,}$ du cercle $\delta_{,}$, on devra donc décrire sur $\overline{ff'}$, comme diamètre, un cercle λ qui coupera la droite θ au point $m_{,}$, centre demandé, et $\overline{m_{,}a}$ sera la longueur du rayon $r_{,}$. La tangente au point $x_{,}$, intersection des rayons vecteurs parallèles $fx_{,}$ et $f'x_{,}$ (ce point $x_{,}$ étant dès lors à l'infini), passe par le centre $m_{,}$ du cercle $\delta_{,}$; et il est évident que cette tangente ou asymptote passe par le point o, milieu de l'axe transverse $\overline{aa'}$.

Ainsi l'on vérifie les résultats déjà connus, savoir :

1° Que l'hyperbole a deux asymptotes passant par le centre *o* de cette courbe;

2° Que ces asymptotes font des angles égaux avec l'axe transverse $\overline{aa'}$ de la courbe;

3° Que désignant par *a* le demi-axe transverse $\overline{aa'}$ et par *b* la longueur du rayon r_1, on a :

$$\overline{of} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

§ VIII.

L'on peut tracer une série de cercles D, D', D'',... tangents entre eux et à l'hyperbole A et en son sommet *a*.

On pourra envelopper l'hyperbole E et chacun de ces cercles par un seul cône, et l'on aura ainsi une série de cônes S, S', S'',... qui seront tous obliques, excepté deux qui seront de révolution; ce seront ceux dont les sommets se projettent orthogonalement en les foyers *f* et *f'* de l'hyperbole A.

Les rayons des cercles D, D', D'',... iront en grandissant, enfin on aura un cercle de rayon infini, et ce cercle ne sera autre que la droite θ; dès lors le cône enveloppant l'hyperbole E et le cercle θ de rayon infini ne sera autre que le plan P de l'hyperbole E. Mais sur ce plan, qui va *jouer* ici non-seulement le *rôle* de surface conique, mais celui encore d'une surface conique appartenant à la série des cônes S, S', S'',... il devra exister un point tout particulier qui sera appelé à *jouer* le rôle de *sommet* de cône.

Cherchons ce point.

Si nous déterminons la projection horizontale de ce point *sommet*, en employant un certain point de l'hyperbole A, elle sera toujours la même pour tout autre point pris sur cette hyperbole.

Or si l'on considère le point situé à l'infini sur l'une des branches de l'hyperbole A, la tangente en ce point sera l'asymptote I', laquelle coupera la droite θ, considérée comme tangente au sommet *a* de l'hyperbole, en un point *p* (*fig.* 20).

Et si nous décrivons du point *p* comme centre et avec $\overline{pa}$ pour rayon, un cercle δ, il coupera la droite θ, considérée comme un cercle de rayon infini et appartenant à la série des cercles D, D', D'',... en le point *r*.

Or si l'on unit le point *r* avec le point situé à l'infini sur l'hyperbole, il faudra mener par ce point *r* une parallèle à l'asymptote I', et cette parallèle coupera évidemment l'axe transverse $\overline{aa'}$ en le point *a'*, second sommet de l'hyperbole A; ce point *a'* sera donc la projection horizontale et orthogonale du sommet a_1 de l'hyperbole E située dans l'espace sur le plan P; ce sommet a_1 sera donc le point

qui, sur le plan P, doit jouer le rôle de *sommet* de la *surface conique* que ce plan P est appelé à jouer dans la série des cônes S, S′, S″...

Cela posé :

Il est évident que si l'on prend un point x^h quelconque sur l'hyperbole A, si l'on mène en ce point x^h une tangente à la courbe, elle coupera la droite θ en un point m (*fig.* 20); et si du point m comme centre et avec $\overline{ma}$ pour rayon on décrit un cercle 6, lequel coupera la droite θ en un point y, la droite qui unira les points x^h et y ira passer par le point a', second sommet de l'hyperbole donnée A.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Étant donnés une hyperbole et ses deux sommets* a *et* a′; *ayant mené au premier sommet* a *une droite* θ *perpendiculaire à l'axe transverse* $\overline{aa'}$; *si l'on unit par une droite le second sommet* a′ *avec un point* x^h *quelconque de l'hyperbole, cette droite coupera la droite* θ *en un point* y *et la tangente à l'hyperbole en* x^h *divisera en deux parties égales la droite* $\overline{ay}$.

§ IX.

Diverses manières de construire la tangente en un point d'une hyperbole.

Première construction. Étant donnés une hyperbole et ses asymptotes, son axe transverse et son centre, ainsi que ses *foyers* f et f', pour construire la tangente en un point x de cette courbe, il suffira (*fig.* 21) de mener les deux rayons vecteurs $\overline{fx}$ et $\overline{f'x}$ et de diviser en deux parties égales l'angle $\widehat{fxf'}$; la bissectrice sera la tangente demandée.

Deuxième construction. Étant donnés une hyperbole, son axe transverse et ainsi ses deux sommets a et a', et aussi ses deux foyers f et f', pour construire la tangente en un point x de cette courbe, on décrira d'un des foyers f comme centre et avec $\overline{fa}$ pour rayon un cercle D (*fig.* 22); on unira les points x et f par une droite qui coupera le cercle D en un point y, et l'on mènera en ce point y une tangente au cercle D, laquelle coupera la tangente θ (menée au sommet a de l'hyperbole) en un point m; la droite $\overline{mx}$ sera la tangente demandée.

Troisième construction. Étant donnés une hyperbole et son axe transverse, et ainsi ses deux sommets a et a', pour construire la tangente en un point x de la courbe (*fig.* 23), on mènera d'abord la tangente θ au premier sommet a (la droite θ est perpendiculaire à l'axe transverse), ensuite on unira le point x et le second sommet a' par une droite qui coupera la droite θ en un point y; divisant la droite $\overline{ay}$ en deux parties égales par un point m, la droite mx sera la tangente demandée.

§ X.

Étant donnés sur le plan horizontal de projection une hyperbole A, ses sommets a et a', ses foyers f et f' et ses asymptotes I et I' (*fig.* 24), décrivant d'un des foyers f comme centre, avec $\overline{fa}$ pour rayon, un cercle D, et décrivant avec $\overline{fa'}$ pour rayon un cercle C, si l'on mène par le foyer f une perpendiculaire à l'axe transverse $\overline{aa'}$, cette perpendiculaire coupera le cercle D au point y et le cercle C au point y'.

Et si l'on mène en les points y et y' des tangentes aux cercles D et C, on aura deux droites parallèles entre elles et à l'axe transverse $\overline{aa'}$, lesquelles couperont respectivement les tangentes θ et θ' menées à l'hyperbole donnée A en ses sommets a et a', en les points m et m'; d'après tout ce qui précède il est évident que la droite mm' sera tangente à l'hyperbole A en le point x projetée orthogonalement en le foyer f.

Désignant $\overline{ma}$ par r et $\overline{m'a'}$ par r', on voit de suite que comme $\overline{ma} = \overline{af}$ et que $\overline{m'a'} = \overline{a'f}$, on aura : $r + r' = \overline{aa'}$.

Désignons $\overline{aa'}$ par $2a$ et désignons par $2b$ le double de la portion de la tangente θ comprise entre le sommet a et l'asymptote I.

On aura dès lors : $\overline{aa'} = 2a$ et $\overline{ad} = b$.

Or b peut avoir trois valeurs différentes comparativement à a; on peut avoir : 1° $b > a$, 2° $b = a$, 3° $b < a$.

Quel que soit le rapport entre b et a, lorsque l'on considérera sur l'hyperbole A le point x qui se projette orthogonalement en son foyer f, on aura toujours :

$$r' - r = 2a$$

Lorsque l'on considérera le point de l'hyperbole situé à l'infini, alors la tangente en ce point ne sera autre que l'asymptote I, et l'on aura :

$$r = \overline{ad} = b \quad \text{et} \quad r' = \overline{a'd'} = b \quad \text{et} \quad r' - r = 0$$

Lorsque l'on considérera le point a sommet de l'hyperbole, alors la tangente en ce point ne sera autre que la droite θ, et l'on aura évidemment :

$$r = 0 \quad \text{et} \quad r' = \frac{1}{0} \quad \text{donc} \quad r' - r = \frac{1}{0}\ (*)$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

(*) On voit que pour l'ellipse la *somme* $(r + r')$ va en augmentant depuis une quantité linéaire égale au petit axe jusqu'à l'infini, et que pour l'hyperbole c'est la *différence* $(r' - r)$ qui va en augmentant depuis zéro jusqu'à l'infini.

THÉORÈME. *Si en un point quelconque d'une hyperbole on mène une tangente coupant les tangentes* θ *et* θ' *menées aux sommets* a *et* a' *de la courbe en deux points* m *et* m', *on aura toujours : 1°* $(\overline{ma} - \overline{m'a'})$ *plus petit que l'axe transverse pour tous les points situés entre le point qui est à l'infini et celui qui se projette orthogonalement en le foyer ; 2°* $(\overline{ma} - \overline{m'a'})$ *égale à l'axe transverse pour le point qui se projette orthogonalement en le foyer* ; 3° $(\overline{ma} - \overline{m'a'})$ *plus grand que l'axe transverse pour tout point situé entre le sommet et celui qui se projette orthogonalement en le foyer.*

§ XI.

Propriétés principales de la parabole.

Étant donnés une parabole A (*fig.* 25), son sommet *a* et son axe infini X, nous mènerons au sommet *a* une perpendiculaire à l'axe X, et nous aurons la tangente θ en le sommet de la parabole.

Cela posé :

Si l'on prend un point *d* arbitraire sur l'axe X, et que de ce point *d* comme centre et avec $\overline{da}$ pour rayon, on décrive un cercle D ; prenant sur la droite θ un point *m* arbitraire, et menant de ce point deux tangentes, l'une au cercle D et le touchant en *y*, et l'autre à la parabole A et la touchant en x^h, la droite yx^h ira couper l'axe X en un point s^h ; et en vertu de tout ce qui a été dit précédemment, il est évident que le point s^h sera la projection horizontale du sommet *s* du cône oblique qui enveloppe le cercle D et la parabole E dont A est la projection.

Or si du point *m* comme centre et avec $\overline{ma}$ pour rayon on décrit un cercle Ϭ, il passera évidemment par le point *y*, et en ce point *y* les deux cercles D et Ϭ se couperont rectangulairement. Pour que les points *d* et s^h se confondent, il faudra que la droite yx^h soit une tangente au cercle Ϭ.

Si donc (*fig.* 26) on mène d'un point x^h, pris arbitrairement sur la parabole donnée A, deux tangentes au cercle Ϭ, l'une d'elles viendra couper l'axe X au point *f*, et l'autre ira couper l'axe X en un point que je dis être situé à l'infini, en sorte que la seconde tangente sera parallèle à l'axe X ; nous démontrerons plus tard l'exactitude de cette assertion.

Mais quelle que soit la direction de la seconde tangente, et par conséquent que le second foyer soit situé à l'infini ou non, il nous est démontré que la normale x^hq divise en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs se croisant au point x^h considéré sur la parabole.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Pour les trois sections coniques, ellipse, parabole et hyperbole, la normale et la tangente en un point de la courbe, divisent en deux parties égales l'angle ou le supplément de l'angle formé par les deux rayons vecteurs qui se croisent en ce point.*

§ XII.

Remarquons que lorsqu'on avait une ellipse ou une hyperbole, on pouvait immédiatement construire les foyers; car puisqu'il suffit d'employer une tangente quelconque à la courbe donnée pour obtenir le cercle θ, il suffit de connaître, *à priori*, une tangente autre que celle qui répond au sommet de la courbe, pour pouvoir résoudre le problème.

Or, pour l'ellipse, on sait que la tangente menée à l'extrémité du petit axe est parallèle au grand axe de l'ellipse; or pour l'hyperbole, on sait que l'asymptote est la tangente au point situé à l'infini sur la courbe.

Mais pour la parabole, nous ne connaissons pas, *à priori*, de point autre que le sommet pour lequel la direction de la tangente soit connue; nous ne pouvons donc, quant à présent, construire le foyer f (*fig.* 26), quoique l'existence de ce foyer se trouve démontrée.

§ XIII.

L'existence d'un foyer étant démontrée pour la parabole, nous pourrons: 1° (*fig.* 27) du foyer f comme centre et avec $\overline{fa}$ pour rayon, décrire un cercle D; 2° couper le cylindre vertical Σ ayant la parabole A pour section droite par un plan P ayant la tangente θ, menée au sommet a de la courbe, pour trace horizontale H^p; nous prendrons le plan vertical de projection parallèle à l'axe infini X de la parabole.

Cela posé:

Nous construirons le cône de révolution S ayant son sommet en s, lequel cône S enveloppe le cercle D et la parabole E, section faite dans le cylindre Σ par le plan P (cette parabole E se projettera horizontalement et orthogonalement suivant la parabole donnée A). Voy. l'*épure* (*fig.* 27).

Cela posé:

Le cône S ayant son sommet s projeté sur le plan horizontal en le foyer f de la parabole A, nous mènerons par ce sommet s un plan horizontal R qui coupera le plan suivant une droite Q. Dès lors, Q^h sera perpendiculaire à l'axe infini X de la parabole donnée A.

De plus, la *fig.* 27 nous dit que le triangle $s^v a^v q^v$ est isocèle, et qu'ainsi l'on a :

$$\overline{s^v a^v} = \overline{a^v q^v}$$

et que les angles $\widehat{q^v s^v a^v}$ et $\widehat{s^v q^v a^v}$ sont égaux, par conséquent l'on a :

$$\overline{a} = \overline{ad}$$

Cela posé :

Prenons un point x arbitraire sur l'ellipse E, menons par ce point x un plan horizontal ; il coupera la génératrice extrême G du cône S en un point i, et l'on aura la droite $\overline{sx}$ de l'espace égale à $s^v i^v$; on pourra donc poser : $\overline{sx} = \overline{s^v i^v}$.

La distance $\overline{xq}$ du point x à la droite Q sera une droite perpendiculaire à Q et parallèle au plan vertical de projection, cette distance sera dès lors égale à $x^v q^v$.

Cela posé :

Je dis que l'on aura toujours, quel que soit le point x considéré sur la parabole E :

$$\overline{sx} \quad \text{ou} \quad \overline{s^v i^v} = \overline{x^v q^v}$$

En effet :

Les deux triangles $s^v a^v q^v$ (invariable) et $x^v a^v i^v$ (variable) sont isocèles, et l'on a :

$$\overline{s^v a^v} = \overline{a^v q^v} \quad \text{et} \quad \overline{x^v a^v} = \overline{a^v i^v} \quad \text{donc} \quad \overline{s^v i^v} = \overline{sx} = \overline{x^v q^v}$$

Toutes les génératrices du cône S font avec le plan horizontal le même angle α ; on aura donc :

$$\overline{sx} \cdot \cos\alpha = \overline{fx^h}$$

Le plan P fait avec le plan horizontal le même angle α, la droite $\overline{xq}$ est une ligne de plus grande pente de ce plan P, elle fait donc avec le plan horizontal un angle α ; on a donc :

$$\overline{xq} \cdot \cos\alpha = \overline{x^h q^h}$$

Or

$$\overline{sx} = \overline{xq} \quad \text{donc} \quad \overline{fx^h} = \overline{x^h q^h}$$

Et cela aura lieu quel que soit le point x pris sur la parabole E. La droite Q^h est dite *directrice* de la parabole A.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. ***Étant donnés une parabole* A, *son axe infini* X, *son sommet* a *et son foyer* f, *ayant mené une droite* Q^h *perpendiculaire à l'axe* X *et à une distance du sommet* a *égale à* $\overline{fa}$, *si l'on prend un point quelconque* x^h *sur la courbe* A, *les distances de ce point* x^h *au* FOYER *f et à la* DIRECTRICE Q^h *seront égales.***

§ XIV.

Ce qui précède nous permet de construire le foyer f d'une parabole A (*fig.* 28) dont on connaît l'axe infini X et par suite le sommet a et la tangente θ en ce sommet.

Et en effet :

Prenons un point x sur la courbe A et menons la droite xz parallèle à l'axe X et coupant la tangente θ au point m.

Du point m comme centre et avec ma pour rayon, décrivons un cercle $\mathfrak{S}$ et menons par le point x une tangente à ce cercle $\mathfrak{S}$, elle coupera l'axe X au point f et elle touchera le cercle $\mathfrak{S}$ au point y.

Imaginons la *directrice* Q, nous aurons par hypothèse :

$$\overline{xf}=\overline{xb}, \quad \overline{zb}=\overline{ad}=\overline{af} \text{ (si le point } f \text{ est le \textit{foyer})}$$

Mais par construction, on a :

$$\overline{xz}=\overline{xy} \quad \text{et} \quad \overline{yf}=\overline{fa}$$

On retrouve donc la propriété $\overline{xf}=\overline{xb}$.

Ainsi, pour construire le foyer d'une parabole A, il suffira de décrire d'un point m arbitraire pris sur la tangente θ menée au sommet a de la courbe et avec un rayon $\overline{ma}$ un cercle $\mathfrak{S}$, lequel coupera la droite θ en un point z; on mènera en ce point z une tangente au cercle $\mathfrak{S}$, laquelle sera parallèle à l'axe infini X et coupera la parabole A en un point x; menant de ce point x une seconde tangente au cercle $\mathfrak{S}$, elle coupera l'axe X en un point f qui sera le *foyer* demandé.

De ce qui précède nous pouvons conclure que, pour la parabole, le second foyer est toujours situé à l'infini, puisqu'il devrait se trouver à l'intersection de l'axe x et de la tangente xz; de plus on voit que la tangente au point x passe par le centre m du cercle $\mathfrak{S}$, l'on peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Si par un point* x *d'une parabole* A *on trace une perpendiculaire à la tangente* θ *menée en son sommet* a, *ces deux droites se couperont en un point* z, *et la tangente au point* x *de la parabole coupera la droite* $\overline{za}$ *en deux parties égales.*

Ce qui a été dit ci-dessus nous permet de construire par *points* une parabole.

§ XV.

Construction par points de la parabole.

Étant donnés le sommet a et le foyer f d'une parabole (*fig.* 28 bis), on mènera par le sommet a une droite θ perpendiculaire à la droite indéfinie fa; on prendra

sur la droite θ une suite de points m, m',... et de chacun d'eux comme centre et avec $\overline{ma}$, $\overline{m'a}$,... pour rayons, on décrira une suite de cercles ε, ε',... tous tangents entre eux et au point a; ces cercles ε, ε',... couperont la droite θ en les points z, z',...; par le foyer f on mènera une tangente à chacun des cercles ε, ε',... et par chacun des points z, z',... on mènera des parallèles à l'axe infini fa; la tangente fx coupera la parallèle zx en un point x qui appartiendra à la parabole, et la droite mx sera tangente en x à cette parabole.

§ XVI.

On peut placer la parabole E située dans l'espace et ayant la parabole A pour projection horizontale, sur une infinité de cônes obliques ayant chacun pour trace horizontale un cercle tracé sur le plan horizontal et tangent à la parabole A en son sommet a.

On pourra donc tracer une série de cercles D, D', D'',... tangents entre eux et à la parabole A en son sommet a, et l'on aura une série de cônes S, S', S'',... enveloppant respectivement la parabole E avec les cercles D, D', D''...

Mais l'on peut concevoir que l'un de ces cercles D, D',... ait un rayon infini; dès lors ce cercle ne sera autre que la tangente θ menée au sommet a de la parabole donnée A; dans ce cas le cône qui enveloppe la parabole E et le cercle (de rayon infini) θ, ne sera autre que le plan P de la courbe E.

Ce plan P jouant le rôle d'une surface conique appartenant à la série des cônes S, S', S'',... devra avoir un point particulier qui puisse être considéré comme sommet.

Pour construire la projection horizontale de ce sommet, il faudrait d'un point x^h de la parabole A mener une tangente à cette courbe; cette tangente couperait la tangente θ en un point m, et décrivant du point m comme centre et avec $\overline{ma}$ pour rayon un cercle ε, ce cercle ε couperait la droite θ, jouant le rôle d'un cercle de rayon infini, en un point z, et unissant les points z et x^h par une droite, elle irait couper l'axe X en un point qui serait la projection horizontale du sommet demandé.

Mais toutes les droites telles que x^hz sont parallèles à l'axe X, par conséquent le sommet demandé est à l'infini, et le plan P doit être considéré comme une surface cylindrique, dans la série des cônes S, S', S''...

§ XVII.

Diverses manières de construire la tangente en un point d'une parabole.

De ce qui précède on peut déduire trois constructions de la tangente en un point donné sur une parabole.

Première construction. Étant donnés une parabole A, son axe infini X et son sommet a, et son foyer f, pour construire la tangente en un point x (*fig.* 29), on mènera le rayon vecteur fx, la droite xp parallèle à l'axe X, et l'on divisera l'angle $\widehat{fxp}$ en deux parties égales par la normale dx; la droite xt perpendiculaire à la normale xd sera la tangente demandée.

Deuxième construction. Étant donnés (*fig.* 30) une parabole A, son axe X, son sommet a, son foyer f, pour construire la tangente en un de ses points x, on décrira du foyer f comme centre et avec $\overline{fa}$ pour rayon un cercle D; on mènera au sommet a une perpendiculaire θ à l'axe X (cette droite θ sera tangente en le sommet a à la parabole A); on unira le foyer f et le point x par une droite coupant le cercle D en un point y; en ce point y on mènera une tangente au cercle D, laquelle coupera la droite θ en un point m; la droite qui unira les points m et x sera la tangente demandée.

Troisième construction. Étant donnés une parabole A, son axe infini X et son sommet a, pour construire la tangente en un de ses points x (*fig.* 31), on mènera la tangente θ au sommet a; on mènera par le point x une droite parallèle à l'axe $\underline{X}$, laquelle coupera la tangente θ en un point z; on prendra le milieu m de la droite $\overline{az}$, et en unissant les points m et x par une droite, on aura la tangente demandée.

§ XVIII.

Directrices de l'ellipse et de la parabole.

La propriété dont jouit la parabole d'avoir un foyer et une directrice, doit conduire à penser que les deux autres sections coniques possèdent des directrices.

Et en effet, en suivant la même marche que pour la parabole, on arrive de suite à démontrer l'existence de ces droites *directrices* pour l'ellipse et l'hyperbole.

Pour l'ellipse :

Étant donnée une ellipse A sur le plan horizontal de projection (*fig.* 32), ayant

construit les foyers f et f' et les deux cônes de révolution S et S′ qui enveloppent l'ellipse E de l'espace, et chacun des cercles D et C′, en menant par les sommets s et s' des cônes S et S′ des plans R et R′ horizontaux, ces plans couperont le plan P de l'ellipse E suivant les droites K et K′, dont les projections K^h et K'^h seront les *directrices* de l'ellipse A ou E^h.

Pour le démontrer, prenons un point x arbitraire sur l'ellipse E; menons par ce point x et dans le plan P une perpendiculaire à la droite K′ et coupant cette droite en un point q'; comme la droite $\overline{xq'}$ est parallèle au plan vertical de projection, elle se projettera en véritable grandeur en $\overline{x^v q'^v}$.

On aura donc:

$$\overline{xq'} = \overline{x^v q'^v}$$

De plus, en prenant un point quelconque x sur l'ellipse E, on voit que toutes les droites telles que xq' seront des lignes de plus grande pente du plan P et feront donc avec le plan horizontal un angle constant qui sera égal à celui que le plan P fait avec le plan horizontal, et qui sera dès lors égal à l'angle $\widehat{s^v q'^v x^v}$, que nous désignerons par λ.

En projetant la droite xq' sur le plan horizontal, on aura: $\overline{x^h q'^h}$, et dès lors on aura:

$$\overline{x^h q'^h} = \overline{xq'} \cdot \cos\lambda = \overline{x^v q'^v} \cdot \cos\lambda$$

Cela posé:

Menant par le point x un plan horizontal, il coupera la génératrice extrême du cône S′ en un point i', et l'on aura: $\overline{s'i'} = \overline{s'^v i'^v}$, puisque la droite $s'i'$ est parallèle au plan vertical de projection; de plus, l'on sait que les droites $\overline{s'x}$ et $\overline{s'i'}$ sont égales, on a donc:

$$\overline{s'x} = \overline{s'^v i'^v}.$$

Toutes les droites $s'x$, quel que soit le point x sur l'ellipse E, font le même angle avec le plan horizontal, angle qui est égal à l'angle $\widehat{q'^v s'^v i'^v}$, que nous désignerons par α; en sorte que projetant la droite $s'x$ sur le plan horizontal, on aura:

$$\overline{s'^h x^h} = \overline{s'x} \cdot \cos\alpha = \overline{s'^v i'^v} \cdot \cos\alpha$$

Or en vertu des triangles semblables $a'^v x^v i'^v$ et $s'^v q'^v a'^v$, on aura, quel que soit le point x sur l'ellipse E:

$$\frac{\overline{s'^v i'^v}}{\overline{q'^v x^v}} = \text{constante} = B$$

De plus, il est évident, par la figure, que l'on a: $\hat{\lambda} < \hat{\alpha}$; par conséquent l'on a:

$$\overline{x^v q'^v} > \overline{s'^v i'^v}$$

D'après ce qui précède, on voit que l'on aura :

$$\frac{\overline{s'^h x^h}}{\overline{x^h q'^h}} = \text{constante} = \text{B} \cdot \frac{\cos \lambda}{\cos \alpha}$$

Et l'on aura de plus $\overline{s'^h x^h} < \overline{x^h q'^h}$, car si l'on prolonge la verticale passant par le point a'^v jusqu'en l sur la droite $\overline{s'^v q'^v}$, on a évidemment : $\overline{s'^v l} < \overline{l q'^v}$, en vertu de ce que l'on a : $\hat{\lambda} < \hat{\alpha}$.

Ainsi, l'on aura toujours pour l'ellipse E, B < 1, et pour l'ellipse A l'on aura :

$$\text{B} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \lambda} < 1$$

Ce que l'on a fait en considérant le cône S′, on peut le répéter pour le cône S, et l'on démontre ainsi que l'ellipse A a deux *directrices* K'^h et K^h, perpendiculaires à son grand axe, situées en dehors de la courbe et équidistantes des foyers f et f' de la courbe.

Pour l'hyperbole :

Plaçons l'hyperbole E (*fig.* 33) (située dans un plan P et projetée horizontalement en l'hyperbole A ayant ses foyers en f et f'), et chacun des cercles D et C' (décrits des foyers f et f' comme centre et avec $\overline{fa}$ et $\overline{f'a}$ pour rayon) sur deux cônes de révolution S et S′ ayant pour sommets les points s et s'.

Cela fait :

Menons par les sommets s et s' des plans horizontaux R et R′ coupant le plan P en les droites K et K′.

Si nous prenons un point x sur l'hyperbole E, en menant par ce point x un plan horizontal, lequel coupera la génératrice extrême du cône S en un point i, on aura :

$$\overline{sx} = \overline{si} = \overline{s^v i^v}$$

En menant du même point x, et dans le plan P, une perpendiculaire à la droite K et la coupant en un point q, on aura :

$$\overline{xq} = \overline{x^v q^v}$$

Les deux triangles $s^v a^v q^v$ et $a^v x^v i^v$ étant semblables, on aura, quel que soit le point x :

$$\frac{\overline{s^v i^v}}{\overline{x^v q^v}} = \text{constante} = \text{L}$$

et L sera plus grand que l'unité, car il est évident que dans le triangle $s^v a^v q^v$, l'angle en s ou $\hat{\alpha}$ est plus petit que l'angle en q^v ou $\hat{\alpha}$, ainsi on a : $\text{L} > 1$.

Toutes les droites sx font avec le plan horizontal le même angle α; en projetant sx sur le plan horizontal, on aura :

$$\overline{sx}.\cos\alpha=\overline{s^h x^h}$$

Toutes les perpendiculaires xq font avec le plan horizontal le même angle λ; en projetant xq sur le plan horizontal, on aura :

$$\overline{xq}.\cos\lambda=\overline{x^h q^h}$$

On aura donc, quelle que soit la position du point x sur l'hyperbole E :

$$\frac{\overline{fx^h}}{\overline{x^h q^h}}=\mathrm{L}.\frac{\cos\lambda}{\cos\alpha}$$

et l'on voit de suite sur la figure que : $\mathrm{L}.\frac{\cos\lambda}{\cos\alpha}$, sera plus grand que l'unité.

Au lieu de considérer le foyer f et le cône S, on pourra considérer le foyer f' et le cône S' et par suite la droite K', et l'on aura des résultats identiques.

Ainsi, il se trouve démontré que l'hyperbole A a deux directrices K^h et K'^h perpendiculaires à son axe transverse, équidistantes de ses foyers f et f' et situées entre ses sommets a et a' (*).

(*) Étant donnés une section conique A (ellipse, hyperbole, parabole), son axe X (cet axe X étant le grand axe de l'*ellipse*, ou l'axe transverse de l'*hyperbole*, ou l'axe infini de la *parabole*) et l'un de ses sommets a situé sur l'axe X et le foyer f le plus proche de ce sommet, on peut très-facilement construire la directrice de cette conique A, qui correspond au foyer f.

En effet :

Nous avons vu que la conique A pouvait être regardée comme la projection orthogonale d'une conique E, et qu'en traçant un cercle C ayant le point f pour centre et ayant $\overline{fa}$ pour rayon, on pouvait envelopper les deux courbes C et E par un cône droit S dont le sommet s se projetait horizontalement en le foyer f.

Nous avons vu que si par le sommet s du cône S on menait un plan horizontal, il coupait le plan de la courbe E suivant une droite K qui, projetée orthogonolament sur le plan horizontal (qui n'est autre que le plan de la courbe A), donnait la directrice de la conique A.

Or, en vertu de ce qui a été dit dans la première partie (§ V), si l'on *inscrit* dans le cercle C un hexagone dont les trois couples de côtés opposés soient composées de lignes parallèles, le *pôle* sera le centre f de ce cercle, et sa *polaire* sera à l'infini.

Le plan de la courbe E sera donc coupé par le plan horizontal mené par le sommet s du cône S suivant une droite K qui, étant considérée comme *polaire*, aura pour *pôle*, par rapport à la courbe E, le point en lequel l'axe $\overline{sf}$ de ce cône S sera coupé par le plan de cette courbe E.

Or la projection K^h de la droite K est la directrice de la conique A ; donc le foyer f sera le *pôle* de la courbe A, K^h étant la *polaire*.

Pour construire la directrice K^h, il suffira donc de mener par le foyer f une perpendiculaire à l'axe X et coupant la conique A en un point x. Menant en x une tangente t à cette conique A, cette tangente viendra couper l'axe X en un point p, et menant par ce point p une perpendiculaire K^h à l'axe X, on aura la directrice de la conique donnée A.

§ XIX.

Tout ce qui précède nous permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Si l'on a une suite de cônes de révolution* S, S′, S″,... *ayant même axe de révolution* A; *si l'on coupe ces cônes par autant de plans* P, P′, P″,... *que l'on voudra et dirigés d'une manière arbitraire dans l'espace, toutes les sections coniques que l'on obtiendra se projetteront sur un plan* Q *perpendiculaire à l'axe* A *suivant des sections coniques ayant un foyer commun qui ne sera autre que le point* f *en lequel le plan* Q *coupe l'axe* A; *de plus, en menant par chacun des sommets des cônes* S, S′, S″,... *un plan perpendiculaire à l'axe* A, *on aura une série de plans qui couperont respectivement les plans* P, P′, P″,... *suivant des droites dont les projections orthogonales sur le plan* Q *seront respectivement les directrices des diverses sections coniques tracées sur ce plan* Q *et ayant le point* f *pour foyer commun; de sorte que pour chacune des sections coniques tracées sur le plan* Q *on connaîtra immédiatement le foyer* f *et la directrice qui y correspond.*

On peut encore énoncer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME (*fig.* 42). *Étant donnée une série d'ellipses* A, A′, A″,... *ayant même sommet* a *et même foyer* f, *leurs grands axes étant superposés sur la droite indéfinie* $\overline{fa}$, *le lieu des extrémités de leurs petits axes est une parabole ayant le point* f *pour foyer et la droite indéfinie* $\overline{af}$ *pour axe infini et dont le sommet est le milieu de la droite* $\overline{af}$.

THÉORÈME (*fig.* 42). *Étant donnée une série d'hyperboles* A, A′, A″,... *ayant même sommet* a *et même foyer* f, *leurs axes transverses étant superposés sur la droite indéfinie* $\overline{af}$, *le lieu des extrémités de leurs axes non transverses est une parabole ayant pour axe infini la droite indéfinie* $\overline{af}$, *ayant pour sommet le point milieu de* $\overline{af}$, *et ayant le sommet* a, *commun aux diverses hyperboles* A,... *pour foyer* (*).

§ XX.

Des focales des sections coniques.

Lorsque nous avons étudié les propriétés d'une section conique A (ellipse, hyperbole ou parabole), nous avons vu qu'en considérant cette courbe A comme étant la section droite d'un cylindre vertical Σ, et qu'en coupant ce cylindre par un plan P suivant une section conique E (qui était une ellipse, ou une hyperbole, ou une parabole, suivant que la courbe donnée A était une ellipse, ou une hyperbole ou une parabole), nous avons vu, dis-je, que l'on pouvait envelopper la courbe E

(*) Voyez la note A à la fin de la seconde partie de ce mémoire.

et les cercles D et C′ décrits des foyers f et f' de la courbe A comme centres, avec $\overline{fa}$ et $\overline{f'a}$ pour rayons (les points a et a' étant les sommets de la courbe A, ellipse ou hyperbole), par deux cônes de révolution et ayant chacun son axe de rotation perpendiculaire au plan horizontal, c'est-à-dire au plan sur lequel se trouvait tracée la courbe A.

Nous avons vu de plus que lorsque la courbe A était une parabole (ce qui établissait que la courbe E était une parabole), nous avons vu, dis-je, qu'en vertu de ce que la courbe A n'avait qu'un seul foyer f (l'autre étant situé à l'infini), on n'avait que le cercle D décrit du foyer f comme centre et avec $\overline{fa}$ pour rayon (le point a étant le sommet de la parabole A), et que ce cercle D et la parabole E étaient toujours enveloppés par un cône de révolution dont l'axe de révolution était vertical, c'est-à-dire perpendiculaire au plan de la parabole A.

Nous avons vu de plus que les sommets de ces cônes de révolution se projetaient orthogonalement sur le plan de la courbe A, en les foyers de cette courbe A.

Cela étant rappelé :

Si nous nous en rapportons à la construction des sommets s et s' des cônes de révolution S et S′ (*fig.* 4, 18 et 27), nous devons remarquer que nous avons démontré, en prenant un point arbitraire sur la courbe E, que l'on avait toujours : 1° $\overline{sx} + \overline{s'x} =$ constante, lorsque la courbe E était une ellipse; 2° $\overline{sx} - \overline{s'x} =$ constante, lorsque la courbe E était une hyperbole; et 3° $\overline{sx} = \overline{xq}$, lorsque la courbe E était une parabole ($\overline{sx}$ étant la distance du sommet du cône de révolution S au point x de la parabole E, et $\overline{xq}$ étant la distance de ce même point x à la droite Q perpendiculaire à l'axe infini de la courbe E).

En sorte que les sections coniques n'ont pas toujours leurs foyers situés sur leur plan, puisque tout en démontrant l'existence des foyers f et f' pour l'ellipse ou l'hyperbole A et la propriété dont jouissent les foyers, savoir : *que la somme ou la différence des rayons vecteurs est constante*, on trouve que pour la section conique E (ellipse ou hyperbole), les sommets s et s' des cônes de révolution (sommets qui sont situés hors du plan P de la courbe E) jouissent, par rapport à la courbe E, des mêmes propriétés dont jouissent les points f et f' (situés sur le plan de la courbe A) par rapport aux divers points de cette courbe A.

Nous sommes donc tout naturellement conduit à penser qu'il doit exister une suite de points hors du plan de la courrbe E qui jouissent des mêmes propriétés dont jouissent les foyers F et F′ situés sur le plan de cette courbe E.

Examinons donc si, en effet, il existe une courbe dont les points puissent être considérés comme *foyers* d'une section conique E; et si cette courbe existe en effet, nous lui donnerons le nom de *focale* de la section conique E.

§ XXI.

Reprenons l'ancienne *fig.* 10 ou 12 ; nous construirons la *fig.* 34, dans laquelle l'ellipse donnée E, située sur un plan P perpendiculaire au plan vertical de projection, sera projetée horizontalement en l'ellipse A ou E^h ; en sorte que la courbe A sera la projection orthogonale de la courbe E.

Nous pouvons déterminer les foyers f et f' de la courbe A et construire dès lors les cônes de révolution S et S' qui enveloppent la courbe E avec les cercles D et C' (nous n'avons représenté sur la *fig.* 34 que le cône S).

Cela posé :

Nous pourrons prendre le plan P pour nouveau plan horizontal de projection, la droite V^p devenant une nouvelle ligne de terre L'T' ; et il est évident que le plan Z perpendiculaire au plan P, et passant par le grand axe ad de l'ellipse E, sera parallèle au plan vertical de projection.

Il est encore évident que ce plan Z coupera l'ellipse E suivant son grand axe $\overline{ad}$, l'ellipse A suivant son grand axe $\overline{aa'}$, et que ce plan Z contiendra le sommet s du cône S et coupera ce cône S suivant ses deux génératrices extrêmes $\overline{sa}$ et $\overline{sa'}$; de plus, ce plan Z coupera le cercle D suivant un diamètre $\overline{ai}$.

Cela posé :

Nous pourrons ne considérer que les lignes situées dans cè plan Z et examiner leurs relations de position, parce que si l'on fait passer par une droite perpendiculaire au grand axe de l'ellipse E une suite de plans Q', Q'', Q''',... toutes les projections orthogonales A', A'', A''',... de l'ellipse E sur ces divers plans, seront des ellipses ayant leur axe parallèle au petit axe de l'ellipse E qui aura même longueur que ce petit axe.

En sorte que désignant par a et b le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse E, par a', a'', a''',... les demi grands axes des ellipses A', A'', A''',... les demi-axes de ces ellipses seront :

$a' = a.\cos\alpha'$ et b pour la courbe A'
$a'' = a.\cos\alpha''$ et b . . . . A''
$a''' = a.\cos\alpha'''$ et b . . . . A'''
etc. etc.

α', α'', α''',... étant les angles que les plans Q', Q'', Q''',... font respectivement avec le plan P de la courbe E.

Nous pourrons donc construire de la manière suivante la *fig.* 35, qui donne toutes les lignes situées dans le plan Z.

Sur $\overline{ad}$ (ou $2a$) qui est égal au grand axe de l'ellipse E considéré comme diamètre, nous traçons un cercle δ.

Menant du point a une corde $\overline{aa'}$ du cercle δ, cette corde (si elle est plus grande que $2b$ qui est la valeur du petit axe de l'ellipse E) séra le grand axe de l'ellipse A, projection orthogonale de l'ellipse E sur un plan Q faisant avec le plan de cette courbe E un angle égal à : $\widehat{a'ad}$ ou α.

L'ellipse A ayant un petit axe égal à celui ($2b$) de la courbe E, nous pourrons construire sur $\overline{aa'}$ les points f et f', qui seront les foyers de la courbe A.

Prenant $\overline{fr} = \overline{fa}$, nous construirons sur la droite $\overline{aa'}$ le point r, et élevant par le poinf f une perpendiculaire à la droite $\overline{aa'}$, cette perpendiculaire sera coupée par la droite $\overline{rd}$ en un point s qui sera le sommet d'un cône de révolution S passant par l'ellipse E.

On pourra donc construire de la même manière autant de points s que l'on voudra ; et l'on doit remarquer que si l'on mène par le point a une parallèle à la droite srd, elle coupera la perpendiculaire menée à la droite $\overline{aa'}$ par le second foyer f' en un point s' qui sera le sommet d'un cône de révolution S′ passant aussi par la courbe E.

En sorte que pour chaque corde $\overline{aa'}$ du cercle δ, on construira deux points s et s' appartenant à la *focale* de l'ellipse E ; et ces points s et s' seront des *foyers extérieurs* et *conjugués* de la courbe E (ils seront dits *extérieurs*, parce qu'ils sont situés hors du plan de la courbe E ; ils sont dits *conjugués*, parce qu'ils sont les sommets des deux cônes de révolution S et S′, qui sont les seuls que l'on puisse construire en considérant séparément chacune des ellipses A, A′,... projections orthogonales de l'ellipse E). Parmi toutes les cordes que l'on peut mener du point a dans le cercle δ, il y en aura une $\overline{al}$ qui sera égale au petit axe $2b$ de l'ellipse E. Cette corde sera alors le grand axe de l'ellipse A_1, projection orthogonale de l'ellipse E ; mais cette ellipse A_1 ayant son petit axe égal à $2b$, il s'ensuit que cette courbe A_1 ne sera autre qu'un cercle, ou une ellipse dont les axes sont égaux et dont les foyers se confondent en un seul et même point.

Dès lors pour cette courbe A_1, les cercles analogues aux cercles D et C′ construits pour chacune des autres ellipses A, A′, A″,... se confondront avec cette courbe A_1 en un seul cercle ; et dès lors le cône de révolution S_1, qui passera dans ce cas par l'ellipse E, ne sera autre qu'un cylindre de révolution enveloppant à la fois et le cercle A_1 et l'ellipse E ; et la construction nous dit, en effet, que dans ce cas le sommet s_1 de ce cône S_1 est situé à l'infini, car ce point s_1 n'est autre que le point d'intersection de la droite $\overline{dl}$ et de la perpendiculaire menée à la corde $\overline{al}$ en son milieu y ; or cette perpendiculaire n'est autre que la droite $\overline{yo'}$ (le point o' étant le

milieu de $\overline{ad}$); par conséquent il est évident que les droites $\overline{yo'}$ et $\overline{dl}$ sont parallèles.

Si l'on menait dans la courbe δ et par le point a une corde qui fît avec $\overline{ad}$ un angle plus grand que $\widehat{lad}$, on aurait l'axe d'une ellipse A_1 dont le second axe (perpendiculaire au plan Z) serait égal à $2b$, et dans ce cas le grand axe de l'ellipse A_1 serait égal à $2b$ et serait perpendiculaire au plan Z et non situé dans ce plan Z, comme cela avait lieu pour les ellipses A, A′, A″,...; dès lors les foyers de cette ellipse ne seraient plus situés sur le plan Z, et les constructions précédentes ne pourraient plus être exécutées.

Si l'on trace le cercle δ en entier, on pourra mener par le point a une corde qui fasse avec ad, mais en dessous, le même angle α que la corde aa' fait avec ad, mais en dessus, et il est évident que l'on trouvera deux points s_0 et s_0' qui seront situés par rapport à la droite ad ou xy en ordre inverse, mais symétriquement par rapport à cette droite xy avec les points s et s'; la courbe lieu des points s et s' est donc symétrique par rapport à la droite $\overline{ad}$ ou xy; elle passe par les foyers F et F′ de l'ellipse; elle est composée de deux branches infinies ξ et ξ', l'une ξ est le lieu des points s..., l'autre ξ' est le lieu des points s'...; cherchons maintenant la nature géométrique de la courbe *focale* $\xi\xi'$.

Si nous considérons un point quelconque s de la courbe $\xi\xi'$, on aura les deux rayons vecteurs $\overline{sa}$ et $\overline{sd}$, et l'on voit de suite qu'en vertu des constructions précédentes, on a : $\overline{sa} = \overline{sr}$.

Si donc, quelle que soit la position du point s sur la courbe $\xi\xi'$, on a :

$$\overline{rd} = \text{constante},$$

on en conclura que l'on a :

$$\overline{sd} - \overline{sa} = \text{constante},$$

et que dès lors la courbe $\xi\xi'$ est une hyperbole ayant son *axe transverse* situé sur la droite indéfinie $\overline{ad}$ et ayant les points a et d pour *foyers*.

Cherchons donc si, en effet, $\overline{rd}$ est constant. Élevons par le point o, milieu de la corde $\overline{aa'}$, une perpendiculaire à cette corde, et prenons $\overline{on} = b$ (b étant le demi petit axe et de l'ellipse E et de sa projection orthogonale A).

Joignons les points f et n; joignons les points f et o' (o' étant le milieu de $\overline{ad}$).

Cela fait, on a :

$$\overline{on} = b$$
$$\overline{ao'} = a$$
$$\overline{ao} = a' = a \cdot \cos\alpha$$
$$\overline{fo} = \sqrt{a'^2 - b^2}$$
$$\overline{oo'} = \sqrt{\overline{ao'}^2 - \overline{ao}^2} = \sqrt{a^2 - a'^2}$$
$$\overline{o'f} = \sqrt{\overline{fo}^2 + \overline{oo'}^2} = \sqrt{(a'^2 - b^2) + (a^2 - a'^2)} = \sqrt{a^2 - b^2} = \overline{o'F}$$

Ainsi, $\overline{o'f}$ est constant, quelle que soit la corde $\overline{aa'}$ que l'on considère dans le cercle δ.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Si l'on projette orthogonalement une ellipse* E *sur une suite de plans* Q, Q′, Q″,... *passant tous par la tangente en l'un des sommets de cette ellipse* E (*le sommet considéré étant l'extrémité du grand axe de la courbe* E), *les foyers des diverses ellipses* A, A′, A″,... *projections orthogonales de la courbe* E, *seront tous situés sur un cercle* δ' *ayant pour centre le centre de la courbe* E *et pour rayon la demi-distance existant entre les foyers de cette même courbe* E.

Ce cercle δ' *sera situé dans un plan* Z *perpendiculaire au plan de l'ellipse* E *et passera par le grand axe de cette courbe.*

Cela posé :

Les deux triangles fao' et rad étant semblables, on a :

$$\overline{rd} : \overline{ad} :: \overline{fo'} : \overline{ao'}$$

ou :

$$\overline{rd} : 2a :: \sqrt{a^2-b^2} : a$$

d'où :

$$\overline{rd} = \frac{2a}{a} . \sqrt{a^2-b^2} = 2\sqrt{a^2-b^2} = \overline{FF'}$$

Ainsi, $\overline{rd}$ est constant et égal à la distance qui existe entre les *foyers* F et F′ de l'ellipse E.

Nous pouvons donc affirmer que l'hyperbole $\xi\xi'$ a pour *sommets* les *foyers* F et F′ de l'ellipse E, et pour *foyers* les *sommets* a et d de la même courbe E.

Remarquons que la droite fs divise, par construction, en deux parties égales l'angle $\widehat{asd}$; or cette droite fs est l'axe du cône de révolution S; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Les axes des divers cônes de révolution qui passent par une ellipse* E *sont tangents à l'hyperbole focale* $\xi\xi'$ *de cette ellipse, et le sommet de chacun de ces cônes est précisément le point en lequel la* FOCALE $\xi\xi'$ *est touchée par l'axe du cône considéré.*

Si par les points s et s' sommets des cônes de révolution S et S′, points qui sont, ainsi que nous l'avons dit plus haut, des foyers extérieurs et conjugués de l'ellipse E (*fig.* 35), nous menons des plans I et I′ perpendiculaires au plan Z et aux axes $\overline{sf}$ et $\overline{s'f'}$ des cônes S et S′, ces plans couperont le plan Z suivant les droites $\overline{si}$ et $\overline{s'i'}$, lesquelles seront parallèles, parce que les axes $\overline{sf}$ et $\overline{s'f'}$ sont parallèles.

Ces plans I et I′ couperont donc le plan de l'ellipse E suivant des droites I_1 et I_1'

perpendiculaires au grand axe $\overline{ad}$ de l'ellipse E, et ces droites I_1 et I_1' passeront respectivement par les points i et i'.

Or, comme les triangles *sia* et *s'i'd* sont égaux, puisque : 1° $\overline{sa}$ est parallèle à $\overline{s'd}$ et lui est égale, attendu que nous savons que le quadilatère *sas'd* est un parallélogramme ; et 2° que $\overline{si}$ est parallèle à $\overline{s'i'}$, puisque les axes $\overline{sf}$ et $\overline{s'f'}$ sont parallèles, on en conclut que l'on a : $\overline{ia}=\overline{i'd}$.

Ainsi, les *directrices* I_1 et I_1' de l'ellipse sont équidistantes des foyers F et F' de cette courbe E.

Et l'on pourra dire que les directrices équidistantes des foyers F et F' de l'ellipse E sont des *directrices conjuguées*, tout comme nous avons dit que les foyers s et s' étaient *conjugués*.

Or, comme nous savons que pour un point x de l'ellipse E on a toujours, quel que soit ce point x :

$$\overline{sx}+\overline{s'x}=\text{constante}, \qquad (1)$$

et que si l'on abaisse du point x une perpendiculaire sur les directrices I_1 et I_1' coupant I_1 en q et I_1' en q', on a :

$$\frac{\overline{sx}}{\overline{xq}}=K \qquad (2)$$

et

$$\frac{\overline{s'x}}{\overline{xq'}}=K' \qquad (3)$$

on voit que l'on déduira des équations (2) et (3) :

$$\overline{sx}=K.\overline{xq} \quad \text{et} \quad \overline{s'x}=K'.\overline{xq'}$$

et en vertu de l'équation (1), on aura :

$$\overline{sx}+\overline{s'x}=K.\overline{xq}+K'.\overline{xq'}=\text{constante}. \qquad (4)$$

Or il est évident que cette équation (4) ne peut exister qu'autant que l'on a :

$$K=K'$$

Ce résultat a lieu en effet, car les triangles *sai* et *s'di'* étant égaux, on a :

$$\frac{\overline{sa}}{\overline{ai}}=\frac{\overline{s'd}}{\overline{di'}} \quad \text{donc en effet :} \quad K=K'$$

Cela dit :

Si l'on prend deux points, l'un s sur la branche ξ de l'hyperbole focale, et

l'autre s' sur la seconde branche ξ' de la même courbe, nous voyons que l'on aura toujours, quelle que soit la position du point x sur l'ellipse E :

$$\overline{sx}+\overline{s'x}=\text{constante},$$

lorsque les points s et s' seront des foyers extérieurs et conjugués, lorsque dès lors ces points s et s' seront équidistants du plan de la courbe E. Mais si les points s et s' sont arbitrairement pris sur l'hyperbole $\xi\xi'$, aura-t-on toujours :

$$\overline{sx}+\overline{s'x}=\text{constante?}$$

C'est ce que nous allons chercher.

En se rappelant les théorèmes de MM. Quetelet et Dandelin, on sait que si l'on inscrit une sphère O à un cône de révolution S et à un plan sécant P, le point de contact f du plan P et de la sphère O est le foyer de la section conique E suivant laquelle le plan P coupe le cône S.

On doit aussi se rappeler que la sphère O touche le cône S suivant un cercle δ, et que si l'on mène du sommet s du cône S une droite à un point x quelconque de la courbe E, cette droite coupera le cercle δ en un point d, en sorte que la droite $\overline{sx}$ sera composée de deux parties $\overline{dx}$ et $\overline{sd}$; la partie $\overline{dx}$ variera de longueur avec la position du point x sur la courbe E, mais la partie $\overline{sd}$ sera constante quel que soit le point x de la courbe E ; de plus, joignant le point x avec le foyer f, on sait que l'on a : $\overline{fx}=\overline{dx}$.

Cela dit :

En imaginant l'hyperbole focale $\xi\xi'$ de l'ellipse E, si l'on prend deux points arbitraires, l'un s sur l'une des branches ξ et l'autre s' sur l'autre branche ξ', je dis que l'on aura toujours :

$$\overline{sx}+\overline{s'x}=\text{constante},$$

car désignant par a et d les sommets de la courbe E, nous pourrons inscrire un cercle Δ dans le triangle sad et un cercle Δ' dans le triangle $s'ad$, et l'on sait que Δ touchera ad en un point F et Δ' touchera ad en un point F'; et ces points F et F' seront les *foyers* de l'ellipse E et les *sommets* de l'hyperbole focale $\xi\xi'$.

De plus, le cercle Δ touchera les côtés sa et sd en les points m et n, et le cercle Δ' touchera les côtés $s'a$ et $s'd$ en les points m' et n'; en sorte que si l'on prend un point x sur l'ellipse E, l'on aura :

$$\overline{sx}=\overline{xF}+\overline{sm}$$

et

$$\overline{s'x}=\overline{xF'}+\overline{s'm'}$$

On a donc évidemment :

$$\overline{sx}+\overline{s'x}=(\overline{xF}+\overline{xF'})+(\overline{sm}+\overline{s'm'})=\text{constante},$$

car l'on sait que :

$$\overline{xF}+\overline{xF'}=\text{constante}=\overline{ad}$$

et que :

$$sm+s'm'=\text{constante},$$

quelle que soit la position du point x sur l'ellipse E. (Voyez le *Cours de géométrie descriptive*, 2e partie.

Ainsi, nous sommes assuré que, quelle que soit la position des points s et s' sur l'hyperbole focale, on aura toujours :

$$\overline{sx}+\overline{s'x}=\text{constante}. \qquad (a)$$

Or, pour construire (*fig.* 36) la directrice de l'ellipse E correspondant au point s, il faut mener par ce point s une normale à l'hyperbole focale et venant couper la droite $\overline{ad}$ en un point i. On fera la même chose pour le point s', et l'on aura le point i'. Dès lors les droites I et I' perpendiculaires au plan Z et passant par les points i et i' seront les *directrices* de l'ellipse E par rapport aux *foyers extérieurs* situés sur la focale $\xi\xi'$; si du point x de l'ellipse E on mène des perpendiculaires aux droites I et I', on aura :

$$\overline{xq} \quad \text{et} \quad \overline{xq'} \qquad \text{or} \qquad \overline{xq}=\overline{x^h i} \quad \text{et} \quad \overline{xq'}=\overline{x^h i'}$$

et nous aurons dès lors :

$$\frac{\overline{sx}}{\overline{x^h i}}=\text{K} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{s'x}}{\overline{x^h i'}}=\text{K}'$$

et comme :

$$\overline{x^h i}+\overline{x^h i'}=\overline{ii'}=\text{constante} \qquad (b)$$

on voit qu'en vertu des équations (a) et (b) on devra avoir : $\text{K}=\text{K}'$.

Ainsi, il est démontré que, quelle que soit la position des foyers s et s' sur l'hyperbole focale, on aura toujours :

$$\frac{\overline{sx}}{\overline{x^h i}}=\frac{\overline{s'x}}{\overline{x^h i'}}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant (*fig.* 37) :

THÉORÈME. *Étant donnés une hyperbole* $\xi\xi'$, *son axe transverse* FF' *et ses foyers* a *et* d, *si l'on prend sur la branche* ξ *un point* s *et sur la branche* ξ' *un point* s', *si l'on construit en* s *et* s' *les tangentes* θ *et* θ' *à l'hyperbole, si l'on mène les droites* sa *et* s'd

et les normales en s *et* s′ *à l'hyperbole, ces normales coupant l'axe* $\overline{FF'}$, *l'une en* m *et l'autre en* m′, *je dis que si d'un point quelconque* x *de la droite* $\overline{ad}$ *on abaisse des perpendiculaires, l'une sur la tangente* θ *et qu'on la prolonge jusqu'en* q *sur la droite* sa, *et l'autre sur la tangente* θ′, *et qu'on la prolonge jusqu'en* q′ *sur la droite* s′d, *je dis que l'on aura toujours, pour tout point* x *(situé sur* $\overline{ad}$ *entre les points* a *et* d′*)* :

$$\frac{\overline{sq}}{\overline{xm}} = \frac{\overline{s'q'}}{\overline{xm'}}$$

On peut encore énoncer le théorème suivant (*fig.* 38):

THÉORÈME. *Étant donnée une hyperbole, si par divers points* s, s′, s″,... *de cette courbe, on mène les normales* N, N′, N″,... *à cette hyperbole, ces normales coupant l'axe transverse en les points* n, n′, n″,...; *si l'on unit le foyer* F *de l'hyperbole avec les points* s, s′, s″,... *on aura toujours* :

$$\frac{\overline{sF}}{\overline{Fn}} = \frac{\overline{s'F}}{\overline{Fn'}} = \frac{\overline{s''F}}{\overline{Fn''}} = \text{etc.} = K \, (*)$$

(*) Les diverses normales *sn*, *s′n′*, *s″n″*,... (*fig.* 38) menées à l'hyperbole sont les enveloppées d'une courbe *cc′* symétrique par rapport à l'axe transverse de l'hyperbole (puisque cette hyperbole est elle-même symétrique par rapport à cet axe), et elle a un point de rebroussement en un certain point *l* situé sur l'axe transverse.

Chacun des points de la courbe *cc′* étant déterminé par l'intersection de deux normales successives et infiniment voisines, se trouve être un centre de courbure de l'hyperbole. Le point de rebroussement *l* sera donc le centre de courbure de la branche ξ′ de l'hyperbole pour son sommet *a*; et l'on aura d'après le théorème ci-dessus :

$$\frac{\overline{aF}}{\overline{Fl}} = K$$

La directrice de l'ellipse E (dont l'hyperbole ξξ′ est la focale) ayant FF′ pour grand axe et les points *a* et *a′* pour foyers, aura pour *directrice relative au foyer a′* une droite L perpendiculaire à l'axe FF′ et passant par le point *l*, et comme nous savons déjà que pour l'ellipse, K est plus petit que l'unité, on a :

$$\overline{aF} < \overline{Fl}$$

Nous pouvons donc déjà conclure que pour une hyperbole son centre de courbure *l*, pour son sommet *a*, est situé sur l'axe transverse et au delà du foyer F.

Et comme nous savons qu'en traçant un cercle *δ* inscrit au triangle F′*s*F, le point *s′* étant arbitrairement pris sur l'hyperbole focale, ce cercle touche FF′ au point *a*, foyer de l'ellipse E, et que la droite *pq*, qui unit les contacts de ce cercle *δ* avec les côtés $\overline{sF'}$ et $\overline{sF}$, passe par le point *l*, c'est-à-dire par le point en lequel la directrice L de l'ellipse E perce son grand axe prolongé, on voit de suite que cette propriété nous fournira une construction très-simple du centre de courbure *l* d'une hyperbole ξξ′ pour son sommet *a* (*fig.* 38).

Ayant construit le point *l*, centre de courbure d'une hyperbole donnée par son tracé et dont on connaît

§ XXII.

Focale de l'hyperbole.

Ayant discuté en détail la *focale* de l'ellipse, nous pourrons abréger la discussion relative à la focale de l'hyperbole et aussi celle relative à la focale de la parabole.

Dès lors étant donnée une hyperbole E sur le plan horizontal, ayant pour *centre* le point o', pour *sommets* les points a et d et pour *foyers* les points F et F′ (*fig.* 39), nous pourrons ne considérer que la figure tracée dans le plan vertical M passant par l'axe transverse de cette courbe E.

Nous désignerons le demi grand axe $\overline{ao'}$ de l'hyperbole E par a, son demi petit axe par b (appelant demi-axe une droite qui, menée par le centre o et perpendiculairement à l'axe transverse, a pour longueur la partie de la tangente θ menée au sommet a de la courbe qui se trouve interceptée entre ce sommet a et l'asymptote I).

Nous tracerons sur l'axe transverse $\overline{ad}$ comme diamètre un cercle δ, et sur $\overline{ao'}$ comme diamètre un cercle δ'.

Par le point a nous mènerons une corde arbitraire $\overline{aa'}$ qui sera coupée par le cercle δ' en un point o milieu de cette corde.

La corde aa' sera la projection verticale sur le plan M de l'hyperbole A, laquelle hyperbole A est sur le plan P (perpendiculaire au plan M et ayant pour trace sur ce plan M la corde aa'), la projection orthogonale de l'hyperbole E ; de plus cette corde $\overline{aa'}$ sera l'axe transverse de la courbe A.

---

les sommets a et a' et les foyers F et F′, on pourra construire la normale en un point quelconque s'' de cette hyperbole (*fig.* 38), car on mènera la droite $\overline{s''F}$ et l'on construira la droite $\overline{Fn''}$ au moyen de la proportion :

$$\overline{Fn''} : \overline{s''F} :: \overline{lF} : \overline{Fa}$$

Et en joignant les points n'' et s'' on aura la normale au point s'' de la branche ξ' de l'hyperbole donnée.

Construction par points de l'hyperbole.

Ce qui précède nous permet de construire par *points* une hyperbole dont on connaît (*fig.* 36 bis) l'axe transverse $\overline{FF'}$ et les foyers a et d.

En effet :

On décrira sur $\overline{FF'}$ comme diamètre un cercle C ; du foyer a on mènera une sécante arbitraire coupant le cercle C aux points f et f' ; on élèvera en f et f' deux perpendiculaires γ et γ' à la sécante af' ; on portera sur cette sécante af' les distances $\overline{fr} = \overline{fa}$ et $\overline{f'r'} = \overline{f'a}$ et l'on aura les deux points r et r' ; les droites rd et $r'd$ couperont respectivement les perpendiculaires γ et γ' en les points s et s' qui appartiendront à l'hyperbole.

Pour obtenir les asymptotes de l'hyperbole on mènera par le foyer a deux tangentes au cercle C, et le touchant l'une au point y et l'autre au point y', les droites $o'y$ et $o'y'$ seront les asymptotes demandées.

Les foyers f et f' de l'hyperbole A seront évidemment dans le plan M et situés sur la corde aa', et je dis qu'ils seront de plus sur le cercle $\mathcal{C}$ décrit du point o' comme centre et avec $\overline{o'F}$ pour rayon.

En effet :

Menons par le point a une droite perpendiculaire à la corde aa', et prenons sur cette perpendiculaire une longueur $\overline{az}=b=$ le demi petit axe de l'hyperbole E.

Nous aurons :

$$\overline{ao'}=a$$
$$\overline{az}=b$$
$$\overline{ao}=a'$$

F étant le foyer de l'hyperbole E, on aura :

$$\overline{Fo'}^2=a^2+b^2$$

Si f est le foyer de l'hyperbole A, on a :

$$\overline{fo}^2=a'^2+b^2$$

Dans le triangle rectangle aoo', on a :

$$\overline{o'o}^2=\overline{ao'}^2-\overline{ao}^2=a^2-a'^2$$

Dans le triangle rectangle foo', on a :

$$\overline{fo'}^2=\overline{fo}^2+\overline{oo'}^2=(a'^2+b^2)+(a^2-a'^2)=a^2+b^2=\overline{o'F}^2$$

Ainsi, il est démontré que les foyers f,... et f',... des diverses hyperboles A,... projections orthogonales de l'hyperbole E sur les divers plans P,... perpendiculaires au plan M et ayant pour trace horizontale la tangente θ en le sommet a de l'hyperbole E, sont tous distribués sur le cercle $\mathcal{C}$ (*).

(*) Nous avons vu que les foyers des projections orthogonales d'une ellipse E ou d'une hyperbole E_1, sur les divers plans P, P', P'',... passant par la tangente en l'un des sommets a, extrémité du grand axe de l'ellipse E ou extrémité de l'axe transverse de l'hyperbole E_1, étaient tous placés sur un cercle $\mathcal{C}$ situé dans le plan M, qui, passant par le grand axe de l'ellipse E ou l'axe transverse de l'hyperbole E_1, était perpendiculaire au plan sur lequel était tracée cette courbe E ou E_1, et que ce cercle $\mathcal{C}$ avait pour centre le centre de la courbe E et E_1, et pour rayon la distance de ce centre à l'un des foyers de cette courbe E ou E_1.

L'hyperbole donnée E_1 se projette toujours sur les plans P, P', P'',... suivant une hyperbole dont l'axe transverse est toujours située dans le plan M; mais l'ellipse donnée E se projette sur les plans P, P', P'',... suivant deux séries d'ellipses, les unes ont leurs grands axes situés dans le plan M, les autres ont leurs grands axes perpendiculaires à ce plan M.

Et le passage entre ces deux séries d'ellipses, projections orthogonales de l'ellipse E, est déterminée

Cela dit, démontrons que les sommets s des cônes de révolution qui passent par l'hyperbole E sont tous situés sur une ellipse tracée dans le plan M et ayant FF' pour grand axe et les points a et d pour *foyers*.

Il faut donc démontrer que l'on a :

$$\overline{sa} + \overline{sd} = \text{constante}.$$

Or si l'on prolonge la droite sd jusqu'à sa rencontre avec la corde aa', on aura

---

par une ellipse A_1, projection orthogonale qui est telle, que ses axes sont égaux, c'est-à-dire par une ellipse A_1 qui n'est autre qu'un cercle.

On voit donc que pour l'ellipse E les foyers de ses projections orthogonales sur les divers plans P, P', P'',... doivent être distribués sur deux courbes, l'une qui ne sera autre que le cercle $\mathfrak{C}$, et l'autre qui sera une courbe à double courbure μ, que nous allons déterminer.

Prenons (*fig.* 39 bis) pour plan vertical de projection le plan M, et ne traçons sur le plan horizontal que la demi-ellipse E, qui se trouve en avant du plan M.

Désignons par a le demi grand axe et par b le demi petit axe de la courbe donnée E.

Le demi petit axe b sera perpendiculaire à la ligne de terre LT.

Les points f et f' étant les foyers de l'ellipse donnée E, le cercle $\mathfrak{C}$ aura pour diamètre $\overline{ff'}$.

Menant par le sommet a de l'ellipse E une série de droites V^p, $V^{p'}$, $V^{p''}$,... on aura les traces verticales des plans P, P', P'',... sur lesquels on doit projeter orthogonalement l'ellipse donnée E.

Décrivant sur $\overline{aa'}$, grand axe de l'ellipse E, et comme diamètre un cercle $\mathfrak{I}$, ce cercle placé dans le plan vertical de projection (ou dans le plan M) interceptera sur les droites V^p,... des cordes, qui seront les grands axes des ellipses projections orthogonales de l'ellipse E.

Menant par le sommet a une corde qui soit égale à $2b$ (petit axe de l'ellipse E), on aura une tangente au cercle $\mathfrak{C}$.

A partir de cette corde, toutes les demi-cordes menées par le point a dans le cercle $\mathfrak{I}$, seront plus petites que b, et dès lors on aura pour projections orthogonales de l'ellipse E, des ellipses dont le grand axe sera constant et égal à $2b$, et qui sera perpendiculaire au plan vertical de projection (ou perpendiculaire au plan M), en sorte que les foyers de ces ellipses seront situés hors du plan vertical de projection M.

Il est évident que tous ces foyers sont distants du point a d'une quantité égale à b (demi petit axe de l'ellipse donnée E).

Il est encore évident que tous ces foyers se projettent verticalement sur le cercle $\mathfrak{I}'$, qui passe par les milieux des cordes qui sont menées dans le cercle $\mathfrak{C}$ par le point a, point qui est situé sur ce cercle $\mathfrak{C}$. Il est aussi évident que les cercles $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{I}'$ sont tangents au point a.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème. *La courbe μ (à double courbure), lieu des foyers des projections orthogonales d'une ellipse donnée* E, *sur les divers plans passant par la tangente* θ *en son sommet* a (*extrémité du grand axe*), *est, lorsque les ellipses projections orthogonales ont leur grand axe dirigé perpendiculairement au grand axe de l'ellipse* E, *une courbe à double courbure qui n'est autre que l'intersection d'une sphère* S *décrite du sommet* a *comme centre et avec un rayon égal au demi petit axe* b *de l'ellipse* E, *et sur un cylindre* Σ *de révolution ayant pour section droite le cercle décrit sur le demi grand axe de l'ellipse* E *comme diamètre, ce cylindre ayant ses génératrices droites parallèles au plan de l'ellipse* E.

Ainsi le cylindre Σ a une de ses génératrices droites qui passe par le centre de la sphère S, et son rayon est plus grand que celui de cette sphère.

Ce qui précède nous conduit tout naturellement à examiner quel est le lieu des foyers des ellipses

le point a_1; et il est évident que l'on aura : $\overline{sa}=\overline{sa_1}$, puisque la droite sf est une perpendiculaire sur aa'.

Pour démontrer le théorème énoncé, il suffit donc de prouver que la droite $\overline{ad_1}$ est constante de longueur.

Les deux triangles afo' et aa_1d sont semblables, puisque l'on a :

$$\overline{af}=\tfrac{1}{2}\overline{aa_1} \quad \text{et} \quad \overline{ao'}=\tfrac{1}{2}.\overline{ad}$$

Dès lors les droites fo' et a_1d sont parallèles.

La similitude de ces deux triangles donne la proportion suivante :

$$\overline{da_1}:\overline{o'f}::\overline{ad}:\overline{o'a} \quad \text{ou} \quad \overline{da_1}:\sqrt{a^2+b^2}::2a:a \quad \text{d'où :} \quad \overline{da_1}=2\sqrt{a^2+b^2}=\overline{FF'}$$

---

projections orthogonales d'une ellipse donnée E, sur les divers plans passant par la tangente θ' menée en l'extrémité n du petit axe de cette ellipse E.

Dans ce cas les foyers de toutes les ellipses projections orthogonales seront situés sur des droites parallèles au plan M, qui, passant par le grand axe de l'ellipse donnée E, est perpendiculaire au plan de cette courbe E.

Dès lors tous ces foyers seront sur un cylindre de révolution ayant la tangente θ' pour une de ses génératrices droites, et ayant pour section droite un cercle δ' dont le diamètre sera égal au demi petit axe b de l'ellipse E.

En outre tous ces foyers seront sur une sphère dont le centre sera en le point n et dont le rayon sera égal au demi grand axe a de l'ellipse E.

Ainsi lorsque les plans sur lesquels l'on projette orthogonalement une ellipse E passent tous par la tangente θ menée au sommet a, qui est l'extrémité du grand axe de cette courbe E, les foyers des ellipses projections orthogonales sont situés sur deux courbes, l'une est plane, c'est un cercle, l'autre est à double courbure.

Lorsque les plans sur lesquels l'on projette orthogonalement une ellipse E passent tous par la tangente θ' menée au sommet qui est l'extrémité du petit axe de cette courbe E, les foyers des ellipses projections orthogonales sont situés sur une seule courbe qui est à double courbure.

Cette courbe à double courbure est, dans *le premier cas*, l'intersection de la sphère S ayant son rayon égal au demi petit axe de l'ellipse E et d'un cylindre Σ de révolution dont l'une des génératrices droites passe par le centre de cette sphère, et dont le diamètre de la section droite est égal au demi grand axe de la même courbe E; et dans ce premier cas la courbe intersection de la sphère S et du cylindre Σ est une courbe d'*arrachement*.

Dans *le second cas* la sphère S a pour rayon le demi grand axe de l'ellipse E, et le cylindre Σ a pour diamètre le demi petit axe de la même courbe E; dans ce second cas la courbe intersection de la sphère S et du cylindre Σ est composée de deux branches ou courbes fermées, branche d'*entrée* et branche de *sortie*.

Enfin si au lieu de prendre une ellipse E on prenait un cercle E et qu'on le projetât orthogonalement sur une suite de plans P, P', P'',... qui passeraient tous par une droite θ tangente en un point a de ce cercle E, on obtiendrait une suite d'ellipses projections orthogonales dont les foyers seraient sur la courbe intersection ξ d'une sphère S ayant le point a pour centre et pour rayon le rayon ρ du cercle donné E, et sur un cylindre Σ de révolution dont les génératrices droites seraient parallèles à la tangente θ (laquelle tangente θ serait une de ses génératrices droites), et dont la section droite aurait pour diamètre le rayon ρ.

En sorte que cette courbe d'intersection ξ aurait un *point multiple* qui ne serait autre que le point en lequel la sphère S et le cylindre Σ sont tangents l'un à l'autre.

Ainsi, il se trouve démontré que le lieu des sommets des cônes de révolution qui passent par l'hyperbole E est une ellipse ξ ayant pour *sommets* les foyers F et F' de cette hyperbole E, et pour *foyers* les sommets a et d de cette même courbe E.

De plus, comme la droite fs divise en deux parties égales l'angle $\widehat{asa_1}$, la droite $\overline{fs}$ sera une tangente à l'ellipse ξ. Démontrons maintenant que l'ellipse ξ est la *focale* de l'hyperbole E.

Ayant l'hyperbole A, projection orthogonale sur le plan P de l'hyperbole E, les foyers f et f' de l'hyperbole A étant déterminés et situés, comme nous le savons, sur le cercle 6, nous mènerons par ces points f et f' et dans le plan M des perpendiculaires à la corde aa' ou V^v, en un mot à l'axe transverse de l'hyperbole A, et ces perpendiculaires couperont l'ellipse ξ en les points s et s'.

Nous voyons donc de suite que les points s et s' sont les sommets des deux cônes de révolution S et S' qui passent par la courbe E et nous reproduisons la *fig.* 18, en sorte que pour un point quelconque x de la courbe E, on aura :

$$\overline{s'x} - \overline{sx} = \text{constante.}$$

Les points s et s' seront dits *foyers conjugués et extérieurs* de l'hyperbole E.

En menant par les points s et s' des plans perpendiculaires aux axes sf et $s'f'$ des cônes S et S', ces plans couperont le plan de l'hyperbole E suivant deux droites I et I' qui seront les *directrices* de l'hyperbole E par rapport et respectivement aux foyers conjugués s et s'.

Il est évident que les droites I et I' sont équidistantes du centre o' de la courbe E.

En construisant une sphère tangente au cône S et au plan de l'hyperbole E, on démontrerait, d'après les théorèmes de MM. Quetelet et Dandelin, que cette sphère est tangente au plan de la courbe E en un point qui n'est autre que le foyer de cette courbe; et l'on serait ainsi conduit à la démonstration exposée dans le *Cours de géométrie descriptive*, savoir : que si l'on prend deux points arbitraires s_0 et s_0' sur l'ellipse ξ, on a toujours :

$$\overline{s_0'x} - \overline{s_0x} = \text{constante,}$$

quelle que soit la position du point x sur l'hyperbole E.

Nous pouvons aussi, en appliquant à l'hyperbole E les mêmes raisonnements que ci-dessus (voy. la note, page 56), démontrer que le centre de courbure, de l'ellipse ξ pour son sommet, est précisément le point en lequel son grand axe est coupé par la directrice de l'hyperbole E, cette directrice étant relative au foyer F de cette hyperbole E, c'est-à-dire au foyer de la courbe E, qui est situé dans le plan de cette courbe E, etc.

Construction par points de l'ellipse.

Ce qui précède nous permet de construire par *points* une ellipse dont on connaît le grand axe et les foyers.

En effet :

Soient *a* et *d* les *foyers* et F et F′ les *sommets* d'une ellipse à construire (*fig.* 39 *ter*).

Sur $\overline{FF'}$ et sur $\overline{ad}$ comme diamètres, on décrira les deux cercles concentriques ϵ et δ.

Par le point a on mènera une sécante arbitraire coupant le cercle δ en le point a' et le cercle ϵ en les points f et f', on élevera en f et f' des perpendiculaires à la sécante aa'; on déterminera le point a_1 en prenant $\overline{fa_1} = \overline{fa}$ et le point a_1' en prenant $\overline{f'a_1'} = \overline{f'a}$.

Cela fait, les droites a_1d et $a_1'd$ couperont respectivement les perpendiculaires (élevées en f et f') en les points s et s' qui appartiendront à l'ellipse demandée.

§ XXIII.

Focale de la parabole.

Nous avons vu que lorsqu'on avait une ellipse E, le lieu des foyers f,... et f',... des diverses ellipses A,... projections orthogonales de l'ellipse E sur la série des plans P,... passant tous par la tangente θ menée au sommet a de la courbe E, était un cercle ϵ décrit sur la distance FF′ (des foyers F et F′ de l'ellipse) comme diamètre.

Ce cercle ϵ augmentera donc de rayon à mesure que la distance $\overline{FF'}$ grandira, et dès lors il est évident que si l'on suppose que le foyer F reste fixe et que le foyer F′ s'éloigne indéfiniment, l'ellipse E deviendra une *parabole* lorsque le foyer F′ sera à une distance infinie du foyer F, et le cercle ϵ deviendra une *droite* perpendiculaire à l'axe infini de la parabole, cette droite ϵ passera par le foyer F de la parabole E et sera située dans le plan M qui, passant par l'axe infini de la parabole E, est perpendiculaire au plan de cette parabole.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant (*fig.* 40) :

Théorème. ***Étant donnés une parabole* E, *son sommet* a, *son foyer* F, *sa directrice* D; *ayant tracé la tangente* θ *en son sommet* a; *menant par la droite* θ *une série de plans* P, P′, P″,... *si l'on projette orthogonalement la parabole* E *sur chacun de ces plans* P, P′, P″,... *on obtiendra une série de paraboles* A, A′, A″,... *dont les foyers* f, f′, f″,... *seront situés sur une droite* ϵ, *laquelle sera perpendiculaire au plan de la parabole* E**

et passera par le foyer F *de cette parabole* E. *Les directrices* I, I′, I″,... *des paraboles* A, A′, A″,... *seront situées dans un plan* Z *perpendiculaire au plan de la parabole* E *et le coupant suivant la directrice* D *de cette parabole* E.

Cela posé, cherchons la *focale* de la parabole (*fig.* 41) :

a étant le sommet de la parabole E, F son foyer et *d* le point en lequel sa directrice D perce son axe infini *xy* (prenant le plan vertical Z, passant par l'axe infini, pour plan vertical de projection), nous mènerons par le point *a* une série de droites A^v, A'^v,... qui couperont la droite ε menée par le point F perpendiculairement à *xy*.

Nous mènerons ensuite une droite γ parallèle à la droite ε, et cela par un point *g* situé sur *xy* de telle manière que l'on ait : $\overline{gF} = \overline{Fa}$.

Les droites A,... couperont la droite γ en des points a_1,..., et il est évident que l'on aura : $\overline{fa_1} = \overline{fa}$,...

Si par le point a_1 on mène une parallèle à *xy*, elle coupera en un point *s* la perpendiculaire menée par le point *f* à A^v.

Les divers points *s*,... seront les sommets des divers cônes de révolution S,... qui enveloppent la parabole E, donnée sur le plan horizontal.

Or il est évident que l'on a :

$$\overline{sa} = \overline{sa_1} \qquad \overline{s'a} = \overline{s'a_1'},...$$

Il se trouve donc démontré que le *lieu* des points *s*, *s′*,... est une parabole ξ ayant *xy* pour axe infini, ayant pour *sommet* le foyer F de la parabole E et pour *foyer* le sommet *a* de cette même courbe E. Les deux paraboles E et ξ sont donc identiques, superposables, seulement elles sont tournées en sens inverse, et situées dans des plans différents rectangulaires entre eux.

On démontrerait, comme pour l'ellipse, que le point *d* est le centre de courbure de la parabole ξ par rapport à son sommet F. Ainsi l'on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. *Le rayon de courbure pour le sommet d'une parabole est égal à deux fois la distance du foyer au sommet de cette courbe.*

Et en vertu de ce qui a été démontré au sujet de la *focale* : 1° de l'ellipse, 2° de l'hyperbole, et 3° de la parabole, nous pouvons encore énoncer les théorèmes suivants :

THÉORÈME. *Le lieu des sommets des cônes de révolution passant par une section conique, est la* FOCALE *de cette section conique.*

THÉORÈME. *Les axes des divers cônes de révolution, qui passent par une section conique, sont tangents à la* FOCALE *de cette section conique.*

§ XXIV.

Les constructions par *points* que nous avons données pour l'*ellipse*, page 26, pour l'*hyperbole*, page 36, et pour la *parabole*, page 44, peuvent être appliquées sur le terrain pour tracer au moyen : 1° de *jalons*, 2° d'une équerre, et 3° d'une chaîne d'arpenteur, soit une ellipse, soit une hyperbole et soit une parabole dont on connaît sur le terrain la position des sommets et des foyers, ces points, *sommets* et *foyers*, étant fixés de position sur le terrain au moyen de piquets ou de jalons, et ces sommets et foyers étant les seules choses connues des sections coniques à construire par *points* sur le terrain.

Et en effet :

Si (*fig.* 43) on imagine le cercle δ tangent à l'axe de l'ellipse A et au sommet a, le centre m de ce cercle δ étant sur la tangente θ menée à l'ellipse A en son sommet A, nous savons que les tangentes à ce cercle δ, lorsqu'elles émanent des deux foyers f et f' de l'ellipse A, se croisent en un point x de cette section conique A.

Nous savons aussi que la même construction s'applique à l'hyperbole et à la parabole.

Cela posé :

Il nous serait impossible de tracer le cercle δ sur le terrain et de lui construire une tangente émanant d'un point extérieur donné ; car l'on ne peut pas opérer sur le terrain (surtout lorsque le rayon du cercle δ sera de plusieurs *dizaines* de mètres) comme on opère dans le cabinet en traçant une *épure*, au moyen de la règle, de l'équerre et du compas.

Sur le terrain, l'on doit fixer les *points* au moyen de *jalonnements* et de *longueurs métriques* portées, dans une direction rectiligne donnée, au moyen de la chaîne d'arpenteur.

Voyons donc comment nous pouvons nous dispenser de tracer sur le terrain le cercle δ, et tracer cependant la direction de sa tangente émanant du foyer f de l'ellipse à construire par points.

Si l'on joint le centre m du cercle δ avec le foyer f par une droite, la droite $\overline{xy}$ perpendiculaire sur $\overline{mf}$ passera par le point y, point de contact de la tangente au cercle δ et émanant du foyer f ; de plus on a : $\overline{ra} = \overline{ry}$.

Nous pourrons donc fixer sur le terrain la position du point y de la manière suivante :

Se plaçant en station en m sur la tangente θ, tracée, au moyen d'un jalonnement et de l'équerre d'arpenteur, perpendiculairement à l'axe $\overline{aa'}$ de l'ellipse à tracer, et dès lors tangente en le sommet a de cette courbe, nous ferons placer un piquet ou jalon q

dans la direction *mf* (*f* étant l'un des foyers, fixé de position sur le terrain par un jalon). Cela fait, il sera facile de cheminer du point *m* dans la direction *mfq*, et au moyen de l'équerre d'arpenteur il sera facile de trouver sur cette direction *mf* le point *r* par lequel passe la perpendiculaire *ar* à cette direction $\overline{mf}$.

On placera un piquet *r*; on mesurera avec la chaîne d'arpenteur la longueur $\overline{ar}$, en se conservant dans la direction *ay* au moyen du jalon *s*, et l'on portera avec la chaîne d'arpenteur la longueur $\overline{ar}$ de *r* en *y*.

Le point *y* étant fixé de position par un piquet, la direction *yf* de la première tangente sera déterminée.

On fixera de même le point de contact *y'* de la seconde tangente *y'f'* au cercle $\mathfrak{C}$, et en faisant cheminer un jalon sur la direction *fy*, on arrivera à le placer en *x* sur la direction *y'f'*. Ce point *x* sera un point de l'ellipse demandée.

On changera la position du point *m* sur la droite θ, on recommencera l'opération et l'on déterminera un nouveau point *x'* de l'ellipse donnée par les sommets *a* et *a'* et ses foyers *f* et *f'*.

La *fig.* 44 indique les constructions pour l'*hyperbole*.

La *fig.* 45 indique les constructions pour la *parabole*.

Si, au lieu d'avoir à tracer par points une *ellipse*, on avait un *cercle*, on remarquerait que le cercle est une ellipse dont le centre et les deux foyers se réunissent en un seul point.

Alors les deux tangentes $\overline{fy}$ et $\overline{f'y'}$ au cercle $\mathfrak{C}$ se réunissent en une seule tangente à ce cercle $\mathfrak{C}$ et émanant du centre du cercle à tracer par points; et les points *y*, *y'* et *x* se confondent en un seul et même point, qui n'est autre que le point de contact du cercle $\mathfrak{C}$ et de sa tangente émanant du centre du cercle à décrire; et ce point de contact est précisément un des points du cercle à décrire.

On voit donc que l'on pourra employer la même construction pour le tracé par points d'un cercle dont on connaîtra, sur le terrain, la position du centre et la longueur du rayon, ou mieux un point *a* de ce cercle (ce point *a* et le centre du cercle étant fixés de position, sur le terrain, au moyen de *piquets* ou de *jalons*).

La construction que nous employons pour tracer par *points* une ellipse, un cercle, une hyperbole et une parabole étant la même pour ces quatre courbes, nous sommes conduit à remarquer que la section conique ne peut offrir que quatre *formes différentes*.

Et en effet:

Cette construction étant fondée sur les *foyers*, nous voyons de suite que si la courbe a deux foyers, ils ne peuvent avoir que les positions suivantes :

1° Si les foyers sont situés entre les sommets, ils peuvent être éloignés du centre ou se confondre avec le centre de la courbe, de là l'*ellipse* et le *cercle* ;

2° Si les foyers sont situés au delà des sommets, on aura l'*hyperbole;*

3° Si l'un des foyers est à l'infini, alors on aura la *parabole*.

Une seule objection peut être faite, c'est que si l'on ne considère pas les courbes comme des sections faites dans un cône, auquel cas on reconnaît que les *sommets* et les *foyers* ne peuvent pas être placés entre eux autrement que nous venons de le dire, mais si seulement on examine ces courbes comme tracées sur un plan, on pourrait avoir à considérer une position nouvelle, celle où l'un des *foyers* serait situé entre les *sommets*, l'autre foyer étant situé en dehors des *sommets*.

Mais si l'on examine bien la construction que nous avons employée, on verra de suite que nous ne considérons jamais qu'un seul *sommet a* et les deux *foyers f* et *f'*; en sorte que les positions indiquées ci-dessus sont les seules possibles.

Et ainsi :

1° Les deux foyers *f* et *f'* étant situés tous deux à droite ou à gauche du sommet *a*;

Les foyers étant éloignés du centre, on a l'*ellipse;*

Les foyers et le centre étant confondus en un seul point, on a le *cercle;*

2° Les deux foyers *f* et *f'* étant situés l'un à droite et l'autre à gauche du sommet *a*, on a l'*hyperbole;*

3° L'un des foyers *f'* étant à l'infini, le foyer *f* sera ou à droite ou à gauche du sommet *a*, alors on a la *parabole*.

Ainsi, la construction employée, non-seulement sert à tracer les sections coniques, mais elle vérifie qu'elles ne peuvent avoir que quatre formes différentes.

NOTE A

Relative aux deux théorèmes énoncés page 50 (fig. 42).

Étant donnés un cône de révolution S ayant le point s pour sommet (*fig.* 42), ayant son axe Y vertical et ayant pour trace horizontale un cercle C, nous mènerons par l'axe Y un plan méridien M parallèle au plan vertical de projection; ce plan M coupera le cône S suivant deux génératrices extrêmes. Sur l'une d'elles nous prendrons un point a et un second point l qui sera le milieu de la longueur $\overline{sa}$.

Cela fait :

Par le point a, nous mènerons une suite de plans Q, Q′, Q″,... perpendiculaires au plan vertical de projection et coupant le cône S, et respectivement suivant des ellipses A, A′, A″,... les points o^v, o'^v, o''^v,... *milieu* des *cordes* a^vb^v, $a^vb'^v$, $a^vb''^v$,... interceptées par les projections verticales des deux génératrices extrêmes du cône S, seront les projections verticales des centres o, o', o'',... des ellipses A, A′, A″,... et en même temps les projections verticales des petits axes de ces ellipses.

Les centres o, o', o'',... ainsi que les extrémités des petits axes seront sur un plan sécant au cône S et parallèle à la génératrice extrême sb''; ce plan coupera donc le cône S suivant une parabole E ayant le point l pour sommet, et la projection E^h aura pour *sommet* le point l^h et pour *foyer* le point s^h ou Y^h (cela est évident par le premier théorème énoncé page 50). Et la courbe E^h passera par les extrémités des projections horizontales des petits axes des ellipses A, A′, A″,... Ces petits axes sont horizontaux. L'*épure* 42 renferme toutes les constructions graphiques; il suffit donc de lire cette épure pour y retrouver en son entier le second théorème de la page 50. Ainsi le second des théorèmes de la page 50 (*fig.* 42) se trouve démontré.

Passons au troisième théorème de la page 50 (*fig.* 42).

Si par le point a (indiqué ci-dessus), nous faisons passer une série de plans sécants, mais donnant pour sections dans le cône S, non des ellipses mais des hyperboles, nous pourrons diriger ces plans sécants perpendiculairement au plan vertical de projection et parallèlement et respectivement aux plans qui, perpendiculaires aussi au plan vertical de projection, passeront par le sommet s du cône S et par les petits axes des ellipses A, A′, A″,... nous obtiendrons ainsi les plans R, R′, R″,... et coupant le cône S suivant des hyperboles B, B′, B″,...

Cela posé:

Les *milieux* i^v, i'^v, i''^v,... des projections verticales des axes transverses ad, ad', ad'',... des hyperboles B, B′, B″,... seront tous évidemment situés sur la droite E^v.

Évidemment les points i^v, i'^v, i''^v,... seront les projections verticales des centres des hyperboles B, B', B'',... et en même temps ces points i^v, i'^v, i''^v,... seront les projections verticales des axes non transverses et horizontaux de ces mêmes hyperboles de section B, B', B'',...

Cela posé :

Je dis que l'axe non transverse de l'hyperbole B est égal en longueur au petit axe de l'ellipse A, et qu'il en est de même pour l'ellipse A' et l'hyperbole B', pour l'ellipse A'' et l'hyperbole B'', etc. ; en sorte que l'on pourra dire que les ellipses A, A', A'',... sont *conjuguées* aux hyperboles B, B', B'',...

Et en effet :

Par construction, les plans X, X', X'',... qui passent par le sommet s du cône S et respectivement par les petits axes des ellipses A, A', A'',... sont parallèles aux plans R, R', R'',... des hyperboles B, B', B'',...

Par conséquent, les génératrices du cône S suivant lesquelles ce cône est coupé par les plans X,... savoir :

G et G_1 dans le plan X
G' et G_1' dans le plan X'
G'' et G_1'' dans le plan X''
etc.

seront respectivement parallèles aux asymptotes :

I et I_1 de l'hyperbole B
I' et I_1' de l'hyperbole B'
I'' et I_1'' de l'hyperbole B''
etc.

Par conséquent, si (*fig.* 42 *bis*) nous désignons par n et n' les extrémités du petit axe de l'ellipse A, nous voyons par cette *fig.* 42 *bis* que si l'on mène par les points n^h et n'^h des parallèles à H^m (trace horizontale du méridien M), elles viendront couper la droite menée perpendiculairement à H^m par le point i^h, en les points k et k', et ces mêmes parallèles auront coupé les asymptotes I^h et I'^h de l'hyperbole B^h (projection de l'hyperbole B) en les points m^h et m'^h. Or la droite $\overline{m^h m'^h}$ passe par le point a^h, car les trois points o, centre de l'ellipse A, et l, sommet de la parabole E, et i, centre de l'hyperbole B, sont en ligne droite sur le plan méridien M et de plus sont équidistants entre eux (c'est ce que montre en toute évidence la projection verticale (*fig.* 42 *bis*), puisque le quadrilatère $s^v o^v l^v i^v$ est un parallélogramme dont l^v est le centre).

Or, a^v étant le sommet de l'une des branches de l'hyperbole B^h, $\overline{a^h m^h}$ sera la longueur du demi-axe non transverse de cette hyperbole B^h; et comme le demi petit axe $\overline{o^h n^h}$ de l'ellipse A^h est égal au demi petit axe de l'ellipse A, et que le demi petit axe non transverse $\overline{i^h k}$ de l'hyperbole B^h est égal au demi-axe non transverse de l'hyperbole B, et comme :

$$\overline{o^h n^h} = \overline{i^h k} = \overline{a^h m^h}$$

on en conclut que les courbes *conjuguées*,

ellipse A et hyperbole B
— A' — B'
— A'' — B''

ont leurs axes perpendiculaires au plan M, respectivement égaux entre eux.

Et comme les points o,... centres des ellipses A,... et les points i,... centres des hyperboles B,... sont également distants du point l, il s'ensuit que les extrémités m et n,... des axes non transverses des hyperboles B,... sont sur une parabole E′ qui n'est autre que la parabole E, en supposant que cette courbe E a tourné de deux angles droits autour de la droite qui, passant par le point a (sommet commun aux ellipses A,... et aux hyperboles B,...), serait perpendiculaire au plan méridien M.

Ainsi se trouve démontré le troisième théorème de la page 50 (*fig.* 42).

NOTE B

Relative à la courbe γ, *lieu des points des sommets des cônes obliques* S, S′, S″,... *enveloppant l'ellipse* E *et les divers cercles* D, D′, D″,... (*page* 21).

En considérant le plan horizontal comme étant un *tableau*, on voit de suite que la courbe γ est le lieu des points de l'espace, desquels la courbe E serait aperçue sous la forme circulaire.

Nous avons résolu ce problème dans les *Compléments de géométrie descriptive*, en nous servant tantôt de l'analyse de DESCARTES, tantôt de constructions graphiques (voyez, chap. V, le mémoire n° 1, qui a pour titre : *Sur les projections stéréographiques*).

ADDITIONS DIVERSES.

N° 1.

ADDITION AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRITIVE, 1re PARTIE.

NOTE *sur le changement des plans de projection.*

La feuille de papier sur laquelle s'exécutent les projections des points et lignes de l'espace, a une longueur déterminée et qu'on ne peut pas, en général, agrandir.

La ligne de terre LT étant tracée sur la feuille de papier, nous savons tout de suite que la partie de la feuille de papier située au-dessous de cette ligne LT représente la partie antérieure du plan horizontal et la partie inférieure du plan vertical, et que la partie de la feuille située au-dessus de cette ligne LT, représente la partie postérieure du plan horizontal et la partie supérieure du plan vertical.

Ces parties antérieure, postérieure, inférieure et supérieure des deux plans de projection sont donc limitées en raison de la position que la ligne de terre LT occupe sur la feuille de papier.

Or il peut arriver que l'on ait, comme dans la *fig. b*, pl. 15, les projections d'une droite B^h et B^v telles qu'un point n, situé sur la droite B, se trouve avoir sa projection verticale n^v placée tout au haut de la feuille de papier et que sa projection horizontale n^h soit située hors de la feuille de papier; et cependant, pour la solution du problème à résoudre, il serait utile de connaître (si toutefois la chose est possible graphiquement), la distance du point n au plan vertical de projection.

On peut résoudre ce problème par un changement de plan horizontal de projection, en relevant le plan horizontal ancien de la hauteur n^vq; en sorte que la nouvelle ligne de terre L'T' sera parallèle à l'ancienne LT.

On voit de suite que toute la feuille de papier située au-dessous de la ligne L'T'

représentera maintenant la partie antérieure du nouveau plan horizontal de projection et la partie inférieure du plan vertical ; et remarquons que le plan vertical de projection reste le même.

En sorte que la feuille de papier se trouve doublée, *en longueur*, et qu'on peut y construire des points de la droite B, dont la distance au plan vertical sera double de la distance de la ligne de terre LT au bas de la feuille de papier.

Si donc les projections primitives B^v et B^h sont telles que la distance du point *n* (de la droite B) au plan vertical n'est pas plus grande que la longueur totale de la feuille de papier, on pourra déterminer graphiquement cette distance au moyen du changement de plan horizontal opéré ainsi que nous venons de l'exécuter.

On peut donc dire qu'en relevant ou abaissant le plan horizontal parallèlement à lui-même, ou en avançant ou reculant le plan vertical parallèlement à lui-même, on peut doubler la partie antérieure ou postérieure du plan horizontal, ou doubler la partie supérieure ou inférieure du plan vertical.

En un mot, au moyen de ce mode de changement des plans de projection, on peut *doubler en longueur* la feuille de papier pour les constructions graphiques à exécuter par la méthode des projections, sans changer les dimensions de cette feuille de papier.

N° 2.

ADDITION AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 2[e] PARTIE, CHP. I[er], PAGE 8.

NOTE *sur la démonstration relative à la propriété dont jouit le plan tangent, savoir : que le plan tangent en un point d'une surface, quel que soit le mode de génération de cette surface, contient les tangentes à toutes les courbes qui, tracées sur la surface, se croisent au point de contact.*

Une surface Σ, quelle qu'elle soit, peut toujours être considérée comme engendrée par le mouvement d'une *ligne* C, et de plusieurs manières différentes.

Ainsi : 1° on peut prendre sur la surface Σ un point *m*, faire passer par ce point *m* un plan R coupant la surface Σ suivant une courbe C, mener à la courbe C et au point *m* la tangente θ et supposer que par la droite θ on fasse passer une série de plans R, R′, R″, R‴,... coupant dès lors la surface Σ et respectivement suivant les

lignes C, C′, C″, C‴,... qui seront évidemment toutes tangentes entre elles et au point m, la tangente qui leur est commune en le point m étant la droite θ.

On peut donc supposer la surface Σ engendrée par le mouvement de rotation de la *ligne* C autour de la *droite* θ, cette *ligne* C changeant de forme pendant son mouvement de rotation et prenant successivement les *formes* C′, C″, C‴,...

2° On peut mener une suite de plans R_1', R_1'', R_1''',... parallèles entre eux et au plan R et coupant la surface Σ et respectivement suivant des courbes ou *lignes* C_1', C_1'', C_1''',... et l'on pourra considérer la surface Σ comme engendrée par le mouvement de la courbe ou *ligne* C qui, se mouvant parallèlement à elle-même, se déforme successivement pour prendre successivement les formes C_1', C_1'', C_1''',...

3° On peut mener une droite D coupant, perçant la surface Σ en un point ou plusieurs points m, et faire passer par cette droite D une suite de plans R_2, R_2', R_2'', R_2''',... coupant la surface Σ et respectivement suivant les *lignes* C_2, C_2', C_2'', C_2''',... qui toutes se croiseront, se couperont en le point m, ou en les divers points m.

Et l'on pourra supposer que la surface Σ est engendrée par la rotation de la courbe C_2 autour de la sécante D, cette courbe C_2, prenant successivement les *formes* C_2', C_2'', C_2''',...

Au lieu d'engendrer la surface Σ par des courbes ou *lignes* planes, on pourrait sans peine la supposer engendrée par des courbes à double courbure.

Cela posé :

La démonstration du théorème relatif *au plan tangent*, savoir : que le plan tangent en un point m d'une surface Σ contient les tangentes à toutes les courbes qui, tracées sur cette surface, se croisent en ce point m, doit varier suivant que l'on considère tel ou tel mode de génération de la surface Σ.

Dans le *Cours de géométrie descriptive*, nous avons considéré la surface Σ comme engendrée par le premier mode indiqué ci-dessus, et le théorème a été démontré directement, en ce sens que nous n'avons pas eu besoin d'établir, au préalable, ce théorème pour une surface simple, et ainsi pour une surface développable, pour ensuite le faire passer sur la surface générale Σ.

Dans cette note, nous allons supposer que la surface Σ est déterminée par le second mode de génération exposé ci-dessus, et nous ferons passer le *théorème du plan tangent*, de dessus une surface développable, sur cette surface générale Σ, et cela de la manière suivante :

On sait qu'il n'y a rien de plus facile que de démontrer le théorème relatif au plan tangent pour une surface développable.

Et en effet :

Rappelons-nous qu'une surface développable K peut être engendrée de deux manières *principales* : ou 1° au moyen de son arête de rebroussement ξ dont toutes les

tangentes forment les génératrices droites (ou les caractéristiques) de la surface K; ou 2° au moyen d'un plan Θ roulant tangentiellement sur deux courbes *directrices* B et B_1.

Si l'on considère le premier mode de génération de la surface développable K, nous pourrons considérer une génératrice droite G de cette surface, laquelle sera une tangente à l'arête de rebroussement ξ.

La position voisine de G sera G'; et dès lors en menant par un point *m* de G une suite de *plans* ou de *surfaces* quelconques, on coupera la surface K suivant des courbes *planes* ou à *double courbure* C, C', C'',... qui se croiseront au point *m* et qui couperont la génératrice G' et respectivement aux points *n*, *n'*, *n''*,...

Or il est évident que $\overline{mn}$, $\overline{mn'}$, $\overline{mn''}$,... seront les éléments rectilignes des courbes C, C', C'',... Ces éléments rectilignes prolongés donneront les tangentes θ, θ', θ'',... à ces courbes C, C', C'',... pour le point *m*; et comme les génératrices droites successives et infiniment voisines G et G' se coupent en un point qui appartient à la courbe ξ, il s'ensuit que toutes les tangentes θ, θ', θ'',... sont situées sur un même plan Θ qui passe par les droites G et G', et c'est ce plan Θ qui a reçu le nom de plan tangent.

Ainsi, le théorème relatif au plan tangent en un point *m* d'une surface développable K se trouve démontré, lorsque l'on considère cette surface K comme étant donnée par son arête de rebroussement ξ, comme étant dès lors engendrée par une ligne droite G assujettie, par la loi de son mouvement dans l'espace, à être tangente en toutes ses positions successives à une courbe donnée ξ.

Cela posé:

Le théorème relatif du plan Θ, tangent en un point *m* d'une surface développable K, étant démontré pour un certain mode de génération de la surface K, subsistera, quel que soit le mode de génération de cette surface K.

Par conséquent, si nous supposons que la surface K est engendrée par un plan Θ roulant tangentiellement sur deux courbes directrices B et B_1 tracées sur cette surface K, le théorème subsistant toujours, nous pourrons en conclure ce qui suit:

Si la courbe B se meut sur la surface K en changeant de forme pour arriver à la forme et en la position B_1 (le changement de forme et la loi du mouvement étant déterminés), on conçoit sans peine que la courbe B passera en une position infiniment voisine B' (B' ayant une forme modifiée), et que la surface K sera tout aussi bien engendrée par le plan Θ roulant tangentiellement sur les courbes B et B_1 (situées à distance finie), que par le plan Θ roulant tangentiellement sur les courbes B et B' (situées à distance infiniment petite).

Cela dit:

Les courbes C, C', C'',... couperont respectivement la courbe B' en les points *p*,

p', p'',.., qui, en vertu du nouveau mode de génération de la surface Σ, seront des points successifs et infiniment voisins du point m; en sorte que $\overline{mp}$, $\overline{mp'}$, $\overline{mp''}$,... seront dans ce nouveau mode de génération les éléments rectilignes des courbes C, C′, C″,... (*).

Or ces éléments rectilignes prolongés donneront les tangentes θ, θ', θ'',... aux courbes C, C′, C″,... et nous savons, *à priori*, par ce qui a été démontré plus haut (en nous servant du premier mode de génération de la surface développable K), que toutes ces tangentes sont situées dans un même plan, qui n'est autre que le plan Θ tangent en m à la surface K.

Cela posé:

Si nous considérons une surface générale Σ et un point m sur cette surface, nous pourrons tracer sur cette surface une courbe B, laquelle passera par le point m; puis supposer que cette courbe B se déplace sur la surface Σ, en vertu d'une certaine loi de mouvement, et qu'elle arrive, en changeant de forme, en la position B′ infiniment voisine de B.

Les deux courbes infiniment voisines B et B′ comprendront donc sur la surface Σ une zone élémentaire et superficielle.

Cela posé:

Si nous faisons rouler un plan Θ tangentiellement aux deux courbes B et B′, nous obtiendrons une surface développable K.

Si ensuite nous faisons passer par le point m une suite de *plans* ou de *surfaces arbitraires* P, P′, P″,... ces *plans* ou *surfaces* couperont la surface Σ suivant des courbes δ, δ', δ'',... et la surface K suivant des courbes Δ, Δ', Δ'',... et les courbes δ et Δ, δ' et Δ',... passeront toutes par le point m, et de plus couperont la courbe B′ et respectivement deux à deux en les mêmes points p, p',... Par conséquent, ces courbes δ et Δ, δ' et Δ',... auront mêmes tangentes θ, θ',... au point m, puisqu'elles auront deux à deux même élément rectiligne $\overline{mp}$, $\overline{mp'}$, $\overline{mp''}$,...

Or nous savons que les tangentes θ, θ',... aux diverses courbes Δ, Δ',... de la surface K sont dans un même plan; donc nous pouvons affirmer le théorème suivant:

Théorème. *Si l'on trace une série de courbes* C, C′, C″,... *sur une surface quelconque* Σ, *toutes ces courbes se croisant en un point* m, *les tangentes menées au point* m *à ces diverses courbes sont toutes situées dans un seul plan, auquel on donne le nom de* PLAN TANGENT *au point* m *de la surface* Σ.

Cette nouvelle manière de démontrer le théorème relatif au plan tangent offre l'avantage suivant:

(*) Voyez le chap. VII des *Développements de géométrie descriptive*.

Ce que nous avons dit pour un point *m* de la courbe B tracée sur la surface générale Σ peut se dire de tout autre point de cette même courbe B.

Par conséquent, la surface développable K jouit de la propriété d'avoir en commun avec la surface Σ la zone élémentaire et superficielle comprise entre les deux courbes successives et infiniment voisines B et B', et aussi d'avoir en chaque point de la courbe B même plan tangent avec la surface Σ, propriété que l'on énonce en disant que la surface développable K engendrée par un plan Θ roulant tangentiellement à la surface Σ et sur la courbe B, est tangente à la surface Σ tout le long de la courbe B.

En nous servant, ainsi que nous venons de le faire, d'une surface simple (une surface développable) pour démontrer l'existence d'un théorème pour une surface générale, nous avons employé une méthode très-familière à la géométrie descriptive et qui est très-féconde. En effet : lorsque l'on voudra plus tard chercher la construction des divers points d'une certaine courbe λ tracée sur une surface générale Σ, et de manière à satisfaire à certaines conditions, on tracera sur la surface Σ une série de courbes α, α', α'',... d'après une loi donnée, et l'on cherchera sur ces courbes au moyen des surfaces développables A, A', A'',... tangentes à la surface Σ suivant ces courbes α, α', α'',... les points en lesquels ces courbes α, α', α'',... coupent la courbe λ.

Ce ne seront pas toujours des surfaces développables que l'on emploiera, mais ce seront toujours des surfaces plus simples que la surface Σ proposée, et pour chacune desquelles on pourrra facilement et presque *immédiatement* résoudre le problème proposé pour la surface Σ.

On en trouve un exemple remarquable dans la construction par *points* de la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre avec une surface de révolution quelconque Σ. Alors, pour chaque *parallèle* de la surface de révolution Σ, on remplace cette surface de révolution Σ par un cône Δ (surface développable la plus simple) ou par une sphère S (surface de révolution la plus simple), ces surfaces Δ ou S étant tangentes à cette surface de révolution Σ tout le long d'un *parallèle*.

Or il est utile, dans l'enseignement, d'employer le plus possible les mêmes *idées*, pour ne pas surcharger la mémoire des élèves.

Je pense donc que la manière de démontrer le théorème relatif au plan tangent, telle que je viens de l'exposer, doit être préférée, puisque *les idées géométriques* que l'on emploie dans cette démonstration se reproduisent plus tard dans la solution de divers problèmes importants où l'on fait usage du plan tangent.

N° 3.

ADDITION AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 2e PARTIE, CHAP. VII, PAGE 137.

NOTE *sur les modes divers de construction employés pour déterminer les projections horizontale et verticale de la courbe intersection de deux surfaces.*

MONGE, dans sa *Géométrie descriptive*, § III, art. 19, dit :

« Il existe entre les opérations de l'analyse et les méthodes de la géométrie des-
» criptive une correspondance dont il est nécessaire de donner ici une idée.

» Dans l'algèbre, lorsqu'un problème est mis en équations, et qu'on a autant
» d'équations que d'inconnues, on peut toujours obtenir le même nombre d'équa-
» tions, dans chacune desquelles il n'entre qu'une des inconnues, ce qui met à
» portée de connaître les valeurs de chacune d'elles.

» L'opération par laquelle on parvient à ce but, et qui s'appelle *élimination*,
» consiste, au moyen d'une des équations, à chasser une des inconnues de toutes
» les autres équations ; et en chassant ainsi successivement les différentes inconnues,
» on arrive à une équation finale qui n'en contient plus qu'une seule dont elle doit
» produire la valeur.

» L'objet de l'élimination, dans l'algèbre, a la plus grande analogie avec les opé-
» rations par lesquelles, dans la géométrie descriptive, on détermine les intersec-
» tions des surfaces courbes. »

MONGE montre ensuite comment étant données deux équations :

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

et

$$\chi(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

l'opération algébrique de l'élimination de z entre les deux équations (1) et (2) est identique à la construction en géométrie descriptive qui consiste à considérer l'équation (1) comme étant celle d'une surface Σ et l'équation (2) comme étant celle d'une seconde surface Σ', et à chercher la projection horizontale (ou sur le plan des x et y) de la courbe C intersection des deux surfaces Σ et Σ'.

Or l'on sait que cette construction consiste à couper les deux surfaces Σ et Σ' par une suite de plans horizontaux X, X', X''... Chaque plan X,..., coupe la surface Σ

suivant une courbe $\mathfrak{G}$ et la surface Σ' suivant une courbe $\mathfrak{G}'$. Les projections $\mathfrak{G}^h$ et $\mathfrak{G}'^h$ de ces courbes se coupent en des points x^h,... qui appartiennent à la projection C^h de la courbe cherchée C.

On voit donc que cela revient à donner à z dans les équations (1) et (2), une certaine valeur γ; alors les équations :

$$\varphi(x, y, \gamma) = 0 \qquad (3)$$

et

$$\chi(x, y, \gamma) = 0 \qquad (4)$$

seront respectivement les équations des courbes $\mathfrak{G}^h$ et $\mathfrak{G}'^h$, et ces deux équations (3) et (4) nous conduiront à déterminer les coordonnées x et y de chacun des points x^h,... intersection des courbes $\mathfrak{G}^h$ et $\mathfrak{G}'^h$.

En sorte qu'en éliminant z entre les équations (1) et (2), on aura bien en $\xi(x, y) = 0$ l'équation de la courbe C^h.

MONGE n'a pas poussé plus loin les analogies qui existaient entre l'*élimination algébrique* et les constructions diverses employées en géométrie descriptive pour déterminer les projections de la courbe intersection de deux surfaces.

Nous allons essayer de remplir cette lacune.

MONGE dit que les surfaces auxiliaires doivent varier de forme et de position dans l'espace, suivant le mode de génération des deux surfaces proposées et suivant leurs positions par rapport aux plans de projection, et il donne plusieurs exemples à l'appui; c'est donc de l'analogie qui existe entre certains procédés d'élimination *en analyse*, et l'emploi de ces surfaces auxiliaires *en géométrie descriptive* que nous allons parler.

Si l'on a deux équations :

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad (5)$$

et

$$\chi(x, y, z) = 0 \qquad (6)$$

et que l'élimination de z entre ces deux équations offre des difficultés *analytiques*, on sait que l'on parvient assez souvent à surmonter ces difficultés, en prenant une troisième équation :

$$z = f(x, y, m) \qquad (7)$$

dans laquelle la forme (f) de la fonction est arbitraire et dans laquelle m est une nouvelle inconnue.

Et remplaçant, dans les équations (5) et (6), z par la fonction (7), on a :

$$\varphi[x, y, f(x, y, m)] = 0 \qquad (8)$$

et

$$\chi[x, y, f(x, y, m)] = 0 \qquad (9)$$

Alors en éliminant m entre les équations (8) et (9), on obtiendra une équation :

$$\xi(x, y) = 0 \qquad (10)$$

qui sera l'équation finale demandée.

On voit donc que l'on doit examiner *avec soin* quelle est la forme de la fonction (f) qui conduira le plus facilement à l'élimination de m; or, il est évident que la forme de la fonction (f) dépendra de la forme des fonctions (φ) et (χ).

En géométrie descriptive, nous opérons absolument de la même manière. L'équation (7) est celle d'une surface auxiliaire X, et cette surface X doit être choisie *de forme* et *de position*, de manière à ce que l'on puisse facilement construire son intersection avec chacune des surfaces données Σ et Σ'.

La *forme* et la *position* de la surface X dépend donc de la *forme* et de la *position* de chacune des deux surfaces données Σ et Σ'.

Si on lit jusqu'au bout ce chapitre de la *Géométrie descriptive* de Monge, dont je viens de parler, on verra que Carnot l'avait présent à l'esprit lorsqu'il rédigea en 1812 son rapport sur le *Supplément à la géométrie descriptive*, présenté à l'Institut de France par Hachette.

N° 4.

ADDITION AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 2e PARTIE, CHAP. VII, PAGE 137.

Reconnaître si la courbe intersection de deux surfaces est plane ou à double courbure.

Nous avons dit que l'on distinguait les courbes en courbes planes et en courbes à double courbure.

La courbe plane est celle dont tous les points sont situés dans un même plan.

La courbe à double courbure est celle dont quatre points successifs et infiniment voisins ne sont pas dans un même plan, quelque part que l'on prenne ces points sur la courbe; par conséquent, la courbe à double courbure est telle que quatre de ses points, situés à distance finie (le choix de ses points étant arbitraire), ne seront pas en général dans un même plan.

Il nous sera donc facile, d'après ce qui précède, de reconnaître si une courbe C

située dans l'espace, et dont on connaît les projections C^h et C^v, est plane ou à double courbure, et cela en nous servant des méthodes de la géométrie descriptive.

En effet :

On prendra sur la courbe C trois points arbitraires : m ayant pour projections (m^h, m^v), n ayant pour projections (n^h, n^v), p ayant pour projections (p^h, p^v) ; ces trois points m, n, p détermineront un plan P, et l'on prendra un nouveau plan vertical de projection L'T' perpendiculaire au plan P et coupant ce plan suivant la trace V'^p.

Puis l'on projettera la courbe C sur ce nouveau plan vertical de projection, et l'on aura la courbe $C^{v'}$.

Il est évident qu'il ne peut arriver que deux cas : ou 1° la courbe $C^{v'}$ sera très-distincte de la ligne droite V'^p, et alors la courbe C sera évidemment une courbe à double courbure ; ou 2° la courbe $C^{v'}$ sera presque rectiligne, paraîtra se confondre avec la droite V'^p, et alors il y aura incertitude ; dans ce cas on ne pourrait affirmer si la *ligne* $C^{v'}$ est une *droite* ou non, et dès lors on ne pourrait affirmer si la courbe C est *plane* ou à *double courbure*.

Dans ce cas, sans changer l'échelle des abscisses, on pourra décupler, centupler l'échelle des ordonnées. En sorte que si l'on considère sur la courbe C un point x, sa projection verticale étant en $x^{v'}$, et ayant abaissé du point $x^{v'}$ une perpendiculaire sur la ligne de terre L'T' et la coupant au point q', et cette même ordonnée coupant la droite V'^p en un point r', la différence $\overline{r'x^{v'}}$ en raison de la grandeur de l'échelle des ordonnées pourra être assez petite (un dixième de millimètre par exemple), pour que l'on ne puisse pas affirmer que les points $x^{v'}$ et r' ne se confondent pas. Mais en décuplant l'échelle des ordonnées, la différence $\overline{r_1'x_1^{v'}}$ deviendra égale à un millimètre, différence très-appréciable à l'œil ; et remarquons de plus que les erreurs graphiques ne pourront pas être plus grandes, que l'on emploie pour les ordonnées une échelle décuple ou centuple de celle des abscisses, que lorsque l'on employait une même échelle et pour les abscisses et pour les ordonnées : les erreurs inhérentes aux instruments et à leur emploi seront toujours les mêmes.

En sorte que l'on peut dire, en toute exactitude et vérité, que la géométrie descriptive possède un moyen de reconnaître si une courbe C est plane ou à double courbure, lorsque l'on connaît le *tracé* de ses deux projections C^h et C^v.

Mais les savants qui s'occupent de géométrie pure, disent que l'*analyse* peut seule résoudre une semblable question et que la géométrie descriptive n'a pas de méthodes pour des questions de ce genre ; ce qui précède leur prouvera, j'espère, qu'ils sont dans l'erreur.

Voyons maintenant comment l'*analyse* peut résoudre une question de ce genre.

La courbe C sera donnée par les équations de ses deux projections, ou plus généralement par les équations des deux surfaces dont l'intersection n'est autre que cette courbe C, et ainsi :

$$\chi(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

et

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad (2)$$

seront les équations de la courbe C.

Pour reconnaître si cette courbe C est plane, on peut employer plusieurs méthodes :

La PREMIÈRE MÉTHODE consiste à prendre l'équation d'un plan :

$$Ax + By + Cz = 1 \qquad (3)$$

à éliminer x et y entre les trois équations (1), (2), (3), et l'on obtient une équation en z qui doit être satisfaite, quel que soit z ; ce qui fournit un certain nombre d'équations pour déterminer A, B, C.

Si toutes les éliminations entre ces équations algébriques peuvent s'effectuer, le problème proposé sera soluble.

Mais l'élimination sera-t-elle toujours possible ?

On voit donc que la géométrie l'emporte, pour la solution d'un tel problème, sur l'*analyse*, puisque la géométrie descriptive peut le résoudre, quelles que soient les courbes C^h et C^v, et que l'*analyse* est encore *imparfaite*, à ce point que nous concevons que pour certaines fonctions χ et φ l'élimination ne pourrait s'effectuer dans l'état actuel de nos connaissances algébriques.

Sans doute nous comprenons que la langue analytique ira toujours en se perfectionnant et qu'elle est susceptible d'un perfectionnement indéfini.

Sans doute alors nous pouvons dire qu'en nous servant de l'*analyse*, il n'y aura pas de problèmes que nous ne puissions *un jour* parvenir à résoudre ; mais pour être dans la vérité, il faut ajouter qu'aujourd'hui l'*analyse* est encore trop *imparfaite* pour résoudre tous les problèmes.

Ainsi, si nous concevons qu'*implicitement* elle a toute puissance, il faut convenir qu'*explicitement* elle est encore très-bornée.

La SECONDE MÉTHODE consiste à trouver l'équation de la surface enveloppe Σ des plans normeaux à la courbe C, et de voir si cette équation appartient ou non à un cylindre. Si cette surface enveloppe Σ est cylindrique, la courbe C est *plane ;* si cette surface Σ n'est pas cylindrique, la courbe C est à *double courbure.*

Mais qui ne voit de suite que dans l'emploi de cette méthode peuvent se présenter

des *difficultés d'analyse* de divers genres, et que nous ne savons pas encore résoudre; car le calcul intégral n'est pas très-avancé, malgré tous les progrès qu'il a faits dans ces derniers temps (*).

La troisième méthode consiste à déterminer l'équation du plan osculateur O en un point m de la courbe C, et de rechercher si cette équation est satisfaite ou non, quelles que soient les coordonnées (x, y, z) de ce point m, et ainsi quelle que soit la position du point m sur la courbe C.

Si l'équation est satisfaite, la courbe C est plane.

On voit de suite que les *difficultés d'analyse* qui se présenteront dans certains cas peuvent être insurmontables, vu l'état actuel de l'*analyse*.

La quatrième méthode consiste à prendre trois points arbitraires sur la courbe C et à faire passer par ces trois points un plan P, puis à changer la position du plan des coordonnées xz ou yz, en prenant un nouveau plan perpendiculaire au plan P, et de voir si la projection de la courbe C sur ce nouveau plan vertical sera une droite ou non, en d'autres termes de voir si l'équation de cette projection $C^{v'}$ est celle d'une droite V'^{p} dont on connaît l'équation; ainsi le problème est ramené à voir si deux équations sont identiques ou non.

L'*analyse*, vu son état actuel, peut-elle répondre que dans tous les cas elle pourra résoudre la question ? (**).

Nous n'avons pas besoin d'entrer dans plus de détails au sujet de la solution que fournit la géométrie descriptive, toutefois les remarques suivantes ne seront pas inutiles (***).

L'on doit voir de suite que si les points x^h et x^v, projections d'un point x de la courbe C, sont unis par une même perpendiculaire à la ligne de terre, si en x^h et x^v il y a un *nœud* sur C^h et C^v, c'est que la courbe C offre un *nœud* au point x; si en x^h et x^v il y a un *point de rebroussement* sur C^h et C^v, c'est que la courbe C offre un *rebroussement* au point x, etc.

Si la courbe C^h ou C^v a un *nœud* ou un *point de rebroussement*, la courbe C^v ou C^h n'ayant ni *nœud*, ni *point de rebroussement*, nous pouvons affirmer que la courbe C est à double courbure.

(*) Je crois que l'on peut dire, sans être trop sévère, que M. Chasles n'a pas réfléchi en écrivant dans son discours d'ouverture la phrase suivante : *la géométrie descriptive..... ne saurait indiquer, mathématiquement parlant, si cette courbe* (courbe intersection de deux surfaces) *est plane ou à double courbure. Elle n'a point de méthodes pour ces recherches, qui sont exclusivement du domaine de la géométrie rationnelle.*

(**) On voit de suite que cette méthode *analytique* n'est que la traduction en *langue algébrique* de la méthode à laquelle la géométrie nous a conduit, et que nous avons exposé ci-dessus en *langue graphique*.

(***) Voyez les *Développements de géométrie descriptive*, chap. VII, page 402 et suivantes.

Si les courbes C^h et C^v offrent chacune un ou plusieurs *nœuds*, ou un ou plusieurs *points de rebroussement*, désignant, dans le cas où il n'y a qu'un seul point singulier, par *a* le point singulier situé sur C^h, et par *b* le point singulier situé sur C^v, il arrivera deux cas : ou 1° les points *a* et *b* seront unis par une même perpendiculaire à la ligne de terre, et alors les points *a* et *b* seront les projections x^h et x^v d'un même point *x* de la courbe C, et dans ce cas l'on ne pourra pas affirmer immédiatement que la courbe C est *plane* ou à *double courbure;* ou 2° les points *a* et *b* ne seront pas situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre, et alors on pourra affirmer *immédiatement* que la courbe C est à double courbure.

Si les courbes C^h et C^h offraient plusieurs *points singuliers*, la même observation s'appliquerait à chacun d'eux.

N° 5.

ADDITION AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 2° PARTIE, CHAP. IX, PAGE 200.

NOTE *sur la méthode employée par les anciens* PERSPECTEURS *pour mettre en perspective une surface déterminée par une série de sections horizontales.*

Avant que MONGE eût publié son ouvrage sur la géométrie descriptive, ceux qui, comme les *perspecteurs* et les *tailleurs de pierre* et les *charpentiers*, se servaient de l'art des projections, ignoraient la construction du plan tangent en un point d'une surface définie par un certain mode de génération. Ils ne savaient pas par conséquent construire par points la courbe de contact d'une surface donnée et d'un cylindre ou d'un cône.

D'ailleurs, comme nous l'avons dit dans notre préface, le théorème relatif au plan tangent en un point d'une surface quelconque, savoir : *que ce plan contient les tangentes à toutes les courbes qui, tracées sur la surface proposée, se croisent au point considéré sur cette surface*, ne fut démontré qu'après DESCARTES, et au moyen de *l'analyse infinitésimale;* plus tard ce théorème permit de construire *graphiquement* le plan tangent en un point d'une surface définie par un certain mode de génération, et cela au moyen des tangentes à deux courbes se croisant en ce point et tracées sur la surface proposée. Mais l'école de Mézières ne permit pas que cette méthode gra-

phique fut divulguée. La difficulté à vaincre consistait, et consiste toujours évidemment, à choisir sur la surface proposée deux courbes telles, en vertu du mode de génération de la surface, que la construction graphique de la tangente soit connue pour l'une et l'autre de ces courbes, en un quelconque de leurs points.

Dès lors on voit que si le problème est en général *implicitement* soluble, il ne peut l'être *explicitement* que dans un certain nombre de cas particuliers.

Mais comme dans les arts, les surfaces employées sont ordinairement : 1° des cylindres ou des cônes de révolution ou des cylindres ou des cônes à base section conique; ou 2° des surfaces de révolution, comme la sphère, ou d'autres surfaces pour lesquelles la courbe méridienne est telle, en général, qu'on sait lui construire une tangente en un quelconque de ses points; ou 3° des surfaces gauches déterminées par des courbes directrices pour lesquelles on sait résoudre le problème des tangentes, il s'ensuit que l'on peut déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière et déterminer le coutour apparent, et par suite avoir la perspective de ces diverses surfaces, par l'emploi des méthodes que MONGE nous a enseignées.

Mais avant ces méthodes nouvelles, les anciens perspecteurs employaient une méthode approximative pour la solution de ces problèmes, méthode que nous allons exposer ainsi qu'il suit :

Étant donnée une surface Σ définie : par 1° une série de sections horizontales équidistantes; ou 2° une série de sections planes parallèles entre elles, équidistantes ou non entre elles, les plans de ces sections étant obliques par rapport au plan horizontal; ou 3° une série de courbes planes ou à double courbure, dont on connaît pour chacune d'elles les projections horizontale et verticale; il sera toujours facile de mettre en perspective cette surface Σ, sachant résoudre le problème général et fondamental en perspective, savoir : mettre en perspective un point dont on connaît la projection horizontale (en d'autres termes la projection au plan géométral) et la projection verticale (en d'autres termes la hauteur au-dessus du plan géométral).

Et en effet :

Désignant par C, C', C'',... les courbes qui définissent la surface Σ, nous pourrons prendre sur la courbe C une suite de points x,... dont nous pourrons déterminer les perspectives x_1,... en unissant tous les points x_1,... par une courbe C_1 nous aurons la perspective de la courbe C.

Nous pourrons donc nous procurer, *sur le tableau*, les perspectives C_1, C_1', C_1'',... des diverses courbes C, C', C'',...

Cela posé :

La courbe Δ_1, enveloppe des diverses courbes C_1,... sera évidemment la perspective de la courbe Δ, contact de la surface Σ et du cône S tangent à cette surface Σ, ce cône S ayant pour sommet l'*œil* du spectateur.

Ainsi, l'on voit que les anciens *perspecteurs* pouvaient déterminer la perspective d'une surface quelconque.

La méthode qu'ils employaient était très-longue, mais enfin elle conduisait au but; et cette solution était d'autant plus exacte (ou plus *approximative*) que les courbes C, C′, C″,... étaient plus rapprochées entre elles.

On doit voir de suite que la méthode suivie par les anciens *perspecteurs* pour mettre en perspective une surface définie par une série de courbes, était identiquement la même que celles qu'ils employaient pour déterminer l'ombre portée sur le plan horizontal par une surface de révolution dont l'axe était vertical, cette surface étant éclairée par un rayon de lumière.

N° 6.

ADDITION AU COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 2ᵉ PARTIE, CHAP. IX, PAGE 189.

PROBLÈME. *Étant données deux droites* A et B, *construire une droite* D *qui s'appuie à la fois sur les deux droites données* A et B *et qui fasse un angle* α *avec la droite* A *et un angle* 6 *avec la droite* B.

Solution. Concevons deux droites A et B dans l'espace, ces deux droites n'ayant aucun point commun, n'étant point parallèles, et étant dès lors non situées dans un même plan.

Nous prendrons sur la droite A un point arbitraire a, et par ce point nous mènerons une droite B′ parallèle à B.

Nous prendrons sur la droite B un point arbitraire b, et par ce point nous mènerons une droite A′ parallèle à A.

Les plans (A, B′) et (A′, B) seront parallèles entre eux.

Si par le point a nous faisons passer une droite faisant un angle α avec la droite A, cette droite engendrera un cône de révolution Σ ayant le point a pour sommet et la droite A pour axe de rotation.

Si par le même point a nous faisons passer une droite faisant un angle 6 avec la droite B′, cette droite engendrera un cône de révolution Σ' ayant le point a pour sommet et la droite B′ pour axe de rotation.

Ces deux cônes droits Σ et Σ' pourront : 1° se toucher suivant une génératrice

droite K, laquelle sera *nécessairement* dans le plan (A, B'); 2° se couper suivant deux génératrices droites G et G', lesquelles seront dans un plan N perpendiculaire au plan (A, B'), et ce plan N coupera le plan (A, B') suivant une droite L qui fera des angles égaux avec les droites G et G', ou, en d'autres termes, qui divisera en deux parties égales l'angle que ces deux droites G et G' font entre elles; 3° n'avoir d'autre point commun que le sommet *a*.

Cela posé :

Si par le point *b*, on mène une droite K_1 parallèle à K et deux droites G_1 et G_1' respectivement parallèles aux droites G et G' : *dans le premier cas*, les plans (A, K) et (B, K_1) seront parallèles, la droite qui résout le problème sera tout entière à l'infini; *dans le deuxième cas*, les plans (A, G) et (B, G_1) se couperont suivant une droite G_2, et les plans (A, G') et (B, G_1') se couperont suivant une droite G_2', et les deux droites G_2 et G_2' résoudront le problème proposé.

Maintenant, construisons l'*épure;* car il ne suffit pas d'avoir donné une solution géométrique purement philosophique, purement spéculative, il faut que l'on puisse s'en servir; il faut donc pouvoir écrire *graphiquement* cette solution pour que les ingénieurs puissent s'en servir, l'utiliser dans leurs travaux.

Ainsi, la *géométrie descriptive* vient, dans ce qui précède, de *décrire* ce qui existe, ce qui est dans l'espace; maintenant la géométrie descriptive va *écrire* sur les plans de projection ce qui *est* dans l'espace, de manière que l'*épure tracée* permettra de construire, dans l'espace, la solution du problème, par conséquent permettra de placer d'une *manière matérielle*, dans l'espace, la droite G_2 ou G_2' qui résout le problème proposé.

Étant données deux droites A et B par leurs projections, ces droites étant obliques par rapport aux plans primitifs de projection, l'on peut, par une suite de changements de plans de projection, parvenir à deux nouveaux plans rectangulaires entre eux, l'un perpendiculaire à la droite A, et l'autre parallèle à la droite B.

Nous supposerons donc tous ces changements de plans de projection effectués, et nous prendrons la droite A perpendiculaire au plan horizontal et située dans le plan vertical, et la droite B parallèle au plan vertical (*fig. a*, pl. 15).

Cela posé :

Nous prendrons un point *a* sur la droite A, et nous mènerons par ce point *a* une droite B' parallèle à B.

On aura donc la droite B' dans le plan vertical de projection, le point *a* étant aussi dans ce plan vertical, puisque la droite A y est située et que la droite B est parallèle à ce plan vertical.

Du point *a* comme centre et avec un rayon ρ arbitraire, nous décrirons le cercle C dans le plan vertical de projection.

Ce cercle C sera la section faite par le plan vertical de projection dans une sphère S dont le centre serait le point a et qui aurait son rayon égal à ρ.

Par le point a et dans le plan vertical de projection, nous mènerons deux droites, l'une qui fasse avec la droite A un angle α, et l'autre qui fasse avec la droite B′ un angle β. Ces deux droites, en tournant, la première autour de l'axe A, et la seconde autour de l'axe B′, engendreront deux cônes de révolution qui se couperont suivant deux droites G et G_1 qui se projetteront verticalement en la même droite G_1^v et $G_1'^v$.

La droite cherchée sera donc parallèle à G_1 ou G_1' et s'appuiera sur les droites A et B. Le reste de la construction se lit facilement sur l'*épure*.

On doit voir de suite que la solution du problème proposé se compose de la solution de deux problèmes distincts, et qu'ainsi la combinaison des solutions de ces deux problèmes particuliers nous donne la solution du problème complexe proposé.

Et en effet :

Si les deux droites A et B proposées se coupaient en un point a, la solution du problème proposé ne serait autre que celle du problème que nous savons résoudre, savoir : étant donnés les trois angles plans d'un angle trièdre, construire les angles dièdres, ou, en d'autres termes, construire sur le plan de l'un des angles donnés la projection de la troisième arête de la pyramide.

Puis ensuite :

Construire une droite G qui s'appuie sur deux droites A et B (non situées dans un même plan), et qui en même temps soit parallèle à une droite G_1, est encore un problème que nous savons résoudre; car étant données trois droites A, B, D, non situées deux à deux dans un même plan, en faisant mouvoir une droite G sur ces trois droites A, B, D, on engendre un hyperboloïde à une nappe et non de révolution (en général). Les trois droites *directrices* A, B, D, sont des génératices du premier système et les diverses positions que peut prendre la droite G sont les génératrices du second système; or l'on sait que deux génératrices de systèmes différents peuvent être parallèles, et déterminent un plan asymptote de la surface. Ainsi la seconde partie de la construction n'est que la solution d'un problème déjà connu et que nous savons résoudre *graphiquement*.

Il peut arriver plusieurs cas, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus :

1° Si l'on a $(\widehat{\alpha+\beta})$ ou $(\widehat{\alpha-\beta})$ plus grand que l'angle γ que font entre elles les droites A et B, alors on aura deux droites G_1 et G_1', et le problème aura deux solutions.

2° Si l'on a $(\widehat{\alpha+\beta})$ ou $(\widehat{\alpha-\beta})$ égal à l'angle γ, alors les deux cônes engendrés par la droite G qui fait un angle α avec l'axe A et un angle β avec l'axe B′, se tou-

cheront suivant une droite située dans le plan des axes (A, B′) et dans ce cas le problème aura bien une solution, mais cette solution sera donnée par une droite qui, s'appuyant sur les droites A et B, sera tout entière située à l'infini.

3° Si l'on a $\widehat{(\alpha+\beta)}$ ou $\widehat{(\alpha-\beta)}$ plus petit que l'angle γ, les deux cônes ne se couperont ni ne se toucheront, et dès lors le problème sera impossible.

4° Si les angles α et β sont tous les deux égaux entre eux et à un angle droit, le problème aura une solution, et une seule solution, qui sera donnée par la plus courte distance entre les deux droites A et B.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

DEUXIÈME PARTIE.

ADDITIONS DIVERSES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS — IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

ERRATA.

Page 6, 4e ligne en remontant du bas de la note : les droites A_1 et B_1, ***lisez :*** les droites A_2 et B_2.

Page 33, 22e ligne : la droite θ' en un point ***m'***, ***lisez :*** ..... en un point ***n'***.

Page 46, 7e ligne en remontant du bas de la page :

Directrices de l'ellipse et de la parabole, lisez : ***Directrices de l'ellipse et de l'hyperbole.***

Page 48, dernière ligne : plus petit que l'angle en q^v ou $\widehat{\alpha}$, ***lisez :*** ..... ou $\widehat{\lambda}$.

Page 72, 9e ligne : ***lieu des points des sommets des cônes*** S, S′, S″,... lisez : ***lieu des points, sommets des cônes*** S, S′, S″,...